

Bem-vindo ao Articulação Matemática

Clique nos ícones para explorar
os conteúdos desta edição



MATEMÁTICA E MÚSICA

ARTI CULA ÇÃO

MATEMÁTICA

JUNHO | 2022 EDIÇÃO Nº 6

ARTI CULA ÇÃO

MATEMÁTICA

JUNHO | 2022 EDIÇÃO Nº 6



Clique nos ícones + para acessar os conteúdos desta edição

A

Matemática para ler e interpretar a realidade

Pode ser que você não tenha pensado nas várias contribuições da Matemática para as diferentes manifestações humanas. Você pode assistir a uma animação sobre esse assunto clicando [aqui](#).

FIQUE

SA
BEN
DO!

SAIBA MAIS SOBRE
O TEMA DESTA EDIÇÃO.



Clique nos ícones + para acessar
os conteúdos desta edição

B

A relação entre Música, Física e Matemática

A Matemática e a música estão naturalmente presentes no nosso dia a dia, são tantas atividades cotidianas movidas pelo som e pelos cálculos, que não nos damos conta da sua presença. A relação entre as duas áreas vai muito além dos verbos — contar e cantar.

A RELAÇÃO entre música, física e matemática. **Blog com Ciência.**

Disponível em: <<https://museuweg.net/blog/a-relacao-entre-musica-fisica-e-matematica/>>.

Acesso em: 3 maio 2022.

FIQUE

SA
BEN
DO!

SAIBA MAIS SOBRE
O TEMA DESTA EDIÇÃO.



Clique nos ícones + para acessar
os conteúdos desta edição

C

Pitágoras não é o autor do teorema matemático que carrega seu nome

Embora seja o matemático mais conhecido do público, pouco se sabe sobre a vida e a obra de Pitágoras. Pior, as escassas informações de que dispomos são contraditórias. Foi pioneiro genial que deu os primeiros passos na transformação da matemática em ciência rigorosa? [...]

Ao que sabemos, Pitágoras nasceu na ilha grega de Samos, por volta de 560 a.C., e morreu no sul da Itália, cerca de 480 a.C.. Na juventude, viajou por Egito e Babilônia, absorvendo conhecimento matemático. Por volta de 530 a.C., fixou-se na colônia grega de Crotona, onde fundou uma sociedade filosófica e religiosa que exerceu influência política considerável na Magna Grécia, o conjunto das colônias gregas no sul da Itália.

VIANA, Marcelo. Pitágoras não é o autor do teorema matemático que carrega seu nome. **Folha de S.Paulo**, 28 nov. 2018. Disponível em: <<https://www1.folha.uol.com.br/colunas/marceloviana/2018/11/pitagoras-nao-e-o-autor-do-teorema-matematico-que-carrega-seu-nome.shtml>>. Acesso em: 3 maio 2022.

FIQUE

SA
BEN
DO!SAIBA MAIS SOBRE
O TEMA DESTA EDIÇÃO.Clique nos ícones + para acessar
os conteúdos desta edição

D

Música e Matemática é tema da 16ª edição da OBMEP

Você pode até não entender de música. Mas não precisa ser nenhum especialista para notar que um instrumento pode emitir diferentes tipos de sons, se estiver com a corda inteira, dividida pela metade ou em três partes. E a resposta para isso está na matemática! [...]

Ao longo do tempo, a música já despertou o interesse e os ouvidos de diversos matemáticos famosos. Galileu, Descartes, Huygens e D'Alembert chegaram a escrever tratados sobre composições. [...].

MÚSICA e Matemática é tema da 16ª edição da OBMEP.

Instituto de Matemática Pura e Aplicada – Impa, 9 mar. 2020.

Disponível em: <<https://impa.br/noticias/musica-e-matematica-e-tema-da-obmep-2020/>>.

Acesso em: 3 maio 2022.

FIQUE

SA
BEN
DO!

SAIBA MAIS SOBRE
O TEMA DESTA EDIÇÃO.



Clique nos ícones + para acessar
os conteúdos desta edição

E

Frações e Música?

Já parou para pensar que na contagem do tempo na música é usada a ideia de fração? Você pode assistir a um audiovisual com uma dica de como contar o tempo na música fazendo percussão corporal, clicando [aqui](#).

FIQUE

SA
BEN
DO!

SAIBA MAIS SOBRE
O TEMA DESTA EDIÇÃO.

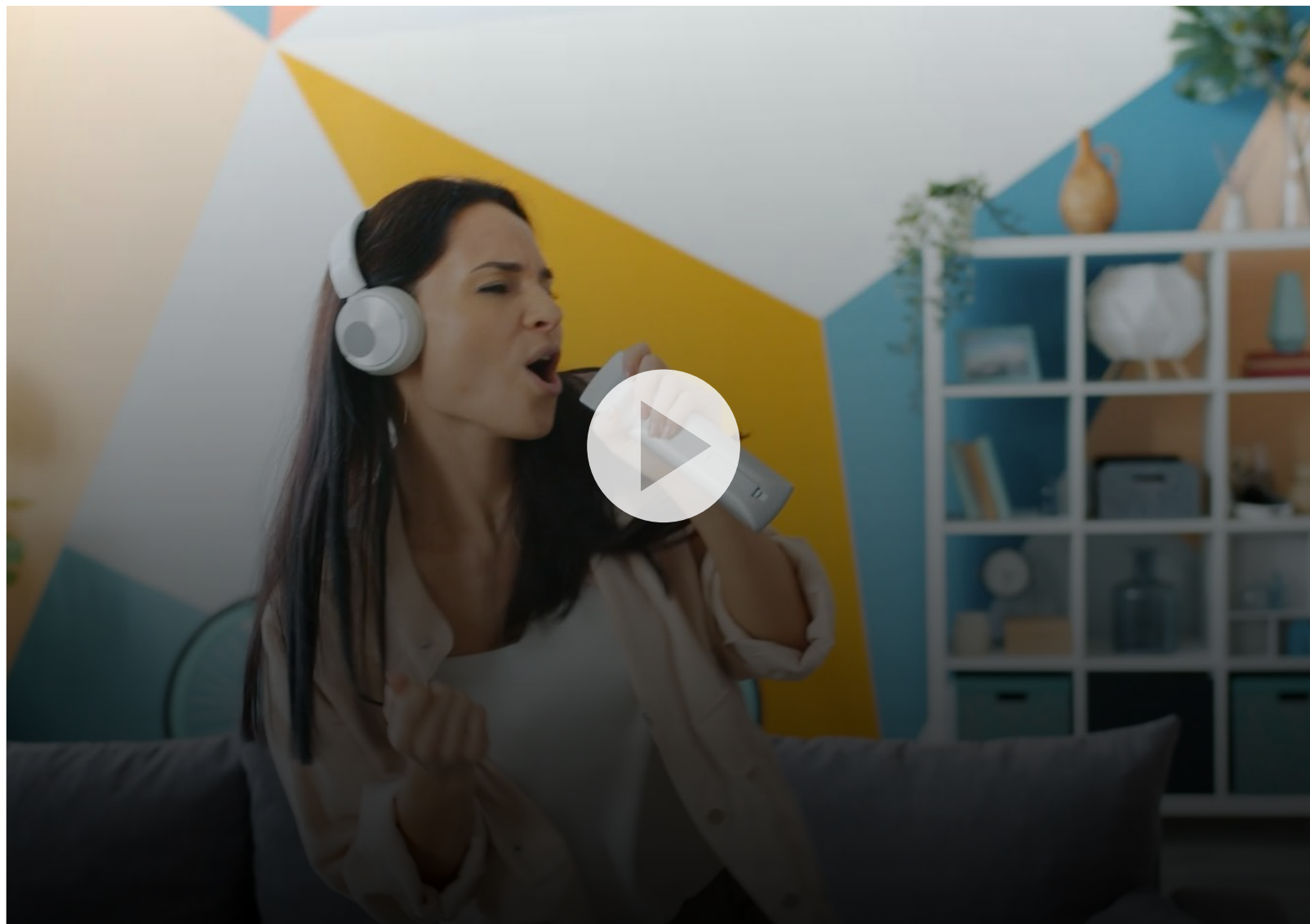


Clique nos ícones + para acessar
os conteúdos desta edição



Matemática e Música

Clique no *play* e assista ao vídeo desta edição.





As relações entre a Música e a Matemática

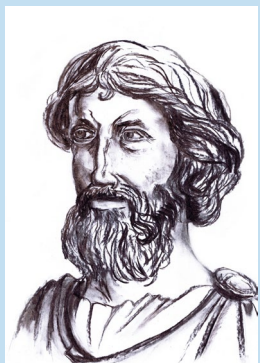
Normalmente quando você escuta uma música, não está pensando na Matemática; o mesmo ocorre de maneira inversa, durante seus estudos de Matemática, se estiver dedicado e concentrado, é provável que não esteja pensando em Música. A Matemática e a Música aparentam estar bem distantes entre si, mas na realidade guardam interessantes relações. Para entendê-las, não é necessário ser um músico profissional, nem mesmo aprofundar os estudos matemáticos no Ensino Superior. Se lembrarmos que, assim como os números e a contagem, a música é uma das mais antigas manifestações da humanidade, podemos analisar alguns aspectos que remontam à Antiguidade, na Grécia.



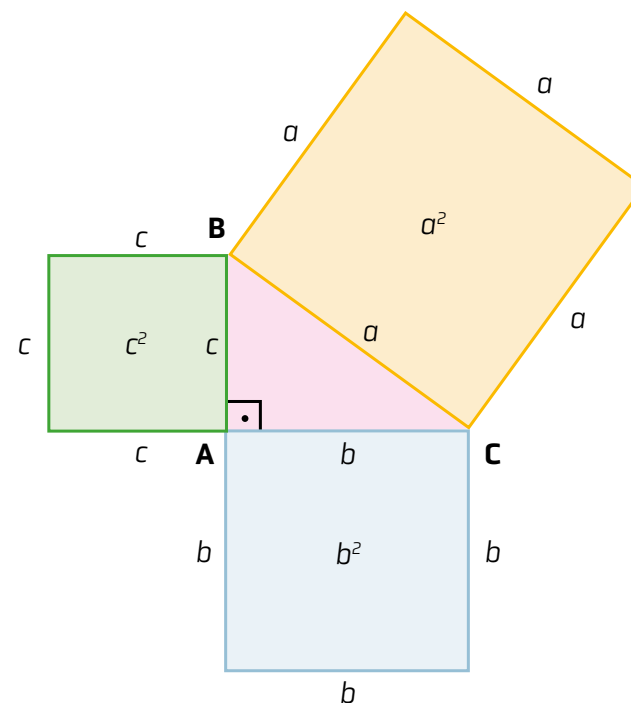
Pitágoras e a Música

Conhecemos e associamos Pitágoras ao teorema que relaciona os lados do triângulo retângulo: dado um triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos. Algebricamente, seja a a medida da hipotenusa do triângulo retângulo e b e c as medidas dos catetos, então: $a^2 = b^2 + c^2$. Uma das inúmeras demonstrações desse teorema pode ser representada geometricamente, como ao lado.

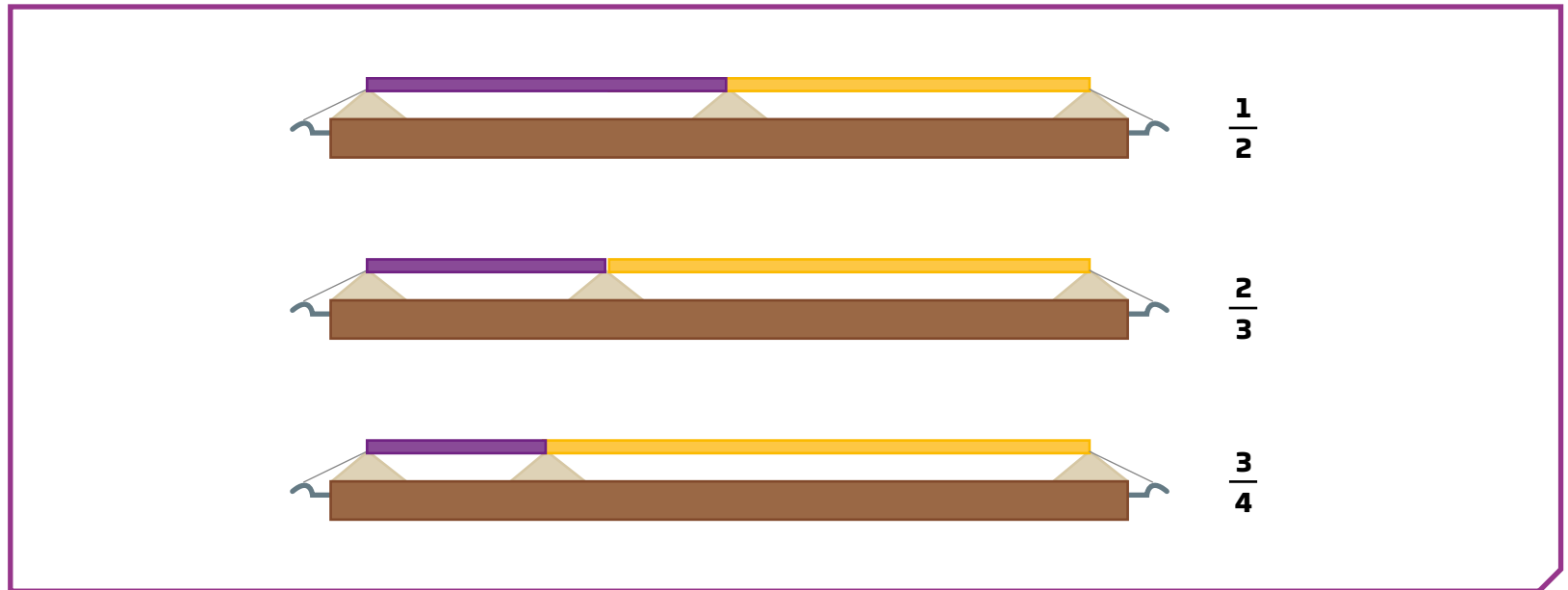
Deixando um pouco de lado o teorema, focaremos na seguinte lenda: conta-se que, ao passar perto de uma oficina de ferreiros, Pitágoras ficou curioso pela sonoridade das marteladas sobre os metais. A junção de alguns sons lhe parecia agradável, enquanto outros, dissonantes. Em razão disso, procurou fazer uma investigação. Na busca de uma “medida” dessa percepção sonora, usou uma corda presa nas extremidades de cavaletes sobre uma caixa acústica. Com esse monocórdio, variou, usando um cavalete móvel e o comprimento da corda em diferentes partes para analisar os sons emitidos. A ideia era encontrar uma razão entre números inteiros que indicasse tal consonância.



Retrato de Pitágoras.



Em sua experiência, identificou que os sons produzidos tinham consonância quando as partes da corda se dividiam, respectivamente, pelas frações $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$, conforme representado a seguir.

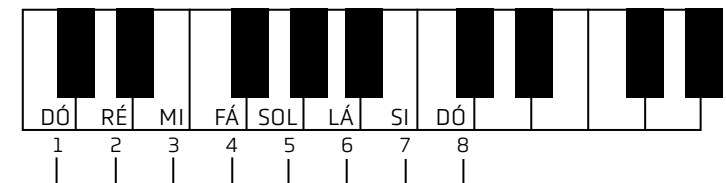


O intervalo entre os sons (duas notas musicais), considerando cada uma dessas razões, equivale ao que atualmente chamamos de **oitava justa** $\left(\frac{1}{2}\right)$, **quinta justa** $\left(\frac{2}{3}\right)$ e **quarta justa** $\left(\frac{3}{4}\right)$.

Na teoria musical, se considerarmos as notas musicais que conhecemos: Dó, Ré, Mi, Fá, Sol, Lá, Si, a oitava justa é o intervalo para se percorrer de Dó a Dó, como mostra a figura a seguir, que representa as teclas de um piano.

Percorrendo de Ré a Ré, Mi a Mi, Fá a Fá, e assim por diante, também temos o intervalo de oitava justa. Já a quinta justa, corresponde, por exemplo, ao intervalo de Dó a Sol, e o de quarta justa, de Dó a Fá.

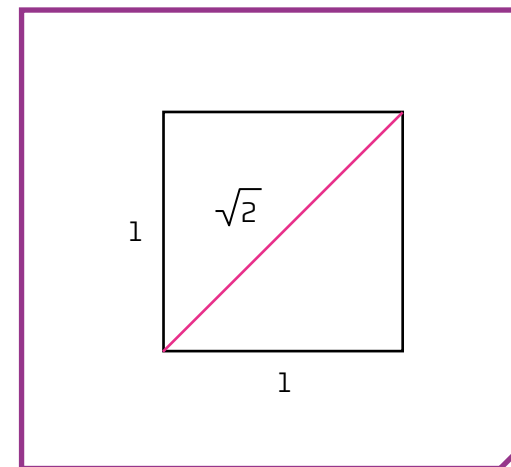
Essa foi uma das maiores descobertas da civilização grega. A partir daí, surgiu o que foi chamada de escala musical pitagórica, muito parecida à que temos hoje.



Dos racionais aos irracionais

A escala pitagórica, assim como o conhecimento matemático partilhado entre os gregos, padecia da falta de apropriação dos números irracionais. Para termos uma noção desse problema, vamos analisar a seguinte questão: é possível construir um quadrado de lado de medida $a \in \mathbb{N}$, de modo que sua diagonal também seja um número natural? A resposta é não. Considere o quadrado de lado unitário, representado ao lado.

Pelo teorema de Pitágoras, sabemos que a medida da diagonal do quadrado de lado unitário é $\sqrt{2}$. No entanto, essa descoberta foi um dos possíveis passos para se perceber que nem toda relação entre dois números inteiros pode ser representada por um número racional. Acredita-se até que a descoberta dos irracionais provocou uma crise no pensamento intelectual na Antiguidade.

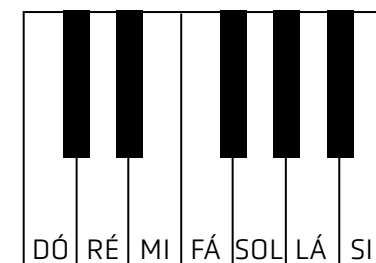


Retomando a escala pitagórica, ela possibilitou uma medida precisa para a afinação dos instrumentos musicais e uma sistematização para a música, concebendo as 12 notas em uma oitava, como pode ser observada nas teclas do piano, representada ao lado.

No entanto, a escala era inconsistente, pois era construída com as razões entre os números inteiros simples (1, 2, 3 e 4). Por princípio, deveria obedecer a três regras:

- a proporção do ciclo de oitavas é 1 : 2 [a equivalência entre oitavas];
- a proporção do ciclo de quintas é 2 : 3 [a unidade tomada para a construção das demais notas da escala];
- a fração de uma nota da escala deve ser um valor entre $\frac{1}{2}$ e 1.

Tomando da Física a frequência [número de vibrações por intervalo de tempo] como a medida de uma nota, sabemos que a razão 1 : 2 estabelece que a frequência de uma nota na oitava adiante [mais aguda] é inversamente proporcional à oitava anterior [mais grave], isto é, $f_1 = 2f_0$ e de uma quinta é, respectivamente, $f_1 = \frac{3}{2}f_0$.





Desse modo, as duas primeiras regras da escala musical pitagórica não podem ser satisfeitas ao mesmo tempo. Para isso, deveriam existir dois números naturais n e m , tais que:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n = 2^m \Rightarrow 3^n = 2^{n+m}$$

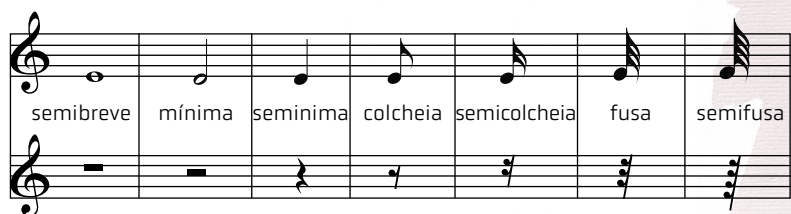
Assim como vimos na situação sobre a diagonal do quadrado de lado unitário, sabemos que uma potência de 3 não pode ser igual a uma potência de 2 no conjunto de números naturais; então, o conjunto solução dessa equação é vazio. Isso resulta na impossibilidade de se obter uma oitava com base nas quintas, isto é, o ciclo de quintas não coincide com o ciclo de oitavas, não permitindo que a escala possa ser fechada. Na prática isso gerava dois problemas:

- a impossibilidade de transpor uma música para outras tonalidades, pois produzia uma diferença — uma **dissonância** perceptível aos ouvidos;
- os instrumentos musicais necessitavam ser afinados para cada tom que se quisesse tocar.

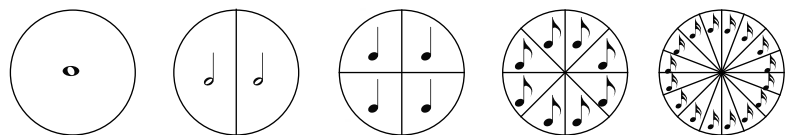
Séculos depois, com o desenvolvimento da Física, concebendo o som como fenômeno acústico, e o desenvolvimento teórico dos números irracionais, foi possível resolver o problema da escala pitagórica, fazendo surgir a escala musical conhecida atualmente. A escala precisou de um ajuste, uma ligeira desafinação, imperceptível para os nossos ouvidos.

Formação matemática em elementos musicais

A atual escrita musical é dotada de sinais gráficos (células rítmicas) para indicar o tempo de duração das notas ou das pausas. Observe o diagrama a seguir, em que a linha de cima sinaliza as notas e a de baixo as pausas.



Partindo da semibreve, convencionalmente considerada como a unidade, cada notação a seguir indica uma duração que corresponde à metade da anterior. Desse modo, temos a seguinte proporção:



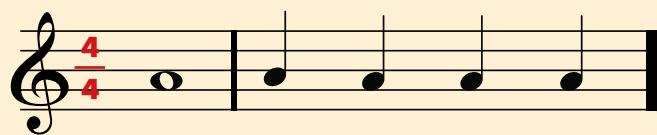
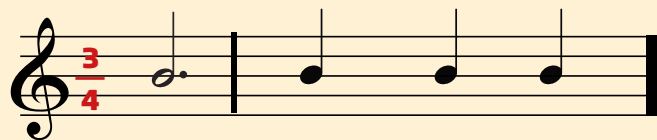
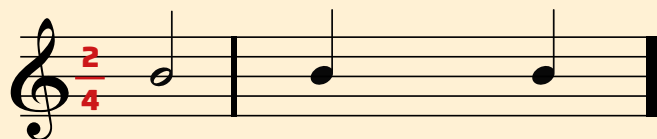
$$1 \text{ semibreve} = 2 \text{ mínimas} = 4 \text{ seminimas} = 8 \text{ colcheias} = 16 \text{ semicolcheias} \text{ etc}$$





◀ **Fernando Manenti Santos**
é licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo e pós-graduado (MBA) em *book publishing* pelo Instituto Singularidades, com experiência docente no ensino de Matemática. Atua na edição de conteúdos e obras didáticas na área de Matemática.

Mas não basta enfileirar esses sinais para sabermos como uma música deve ser tocada. É importante também saber seu andamento, desse modo, as barras verticais são utilizadas para dividir o compasso musical. Também é indicada, no começo de cada linha da partitura, uma fração, que define o andamento. Por exemplo, os compassos de formação $2/4$ (dois por quatro), $3/4$ (três por quatro) e $4/4$ (quatro por quatro), são assim indicados.



Note que o denominador da fração determina qual é a célula rítmica de referência (4 = semínima) e que o número de cima é quantas semínimas vão caber dentro de um compasso, que são 4. Logo, o compasso $4/4$ cabem 4 semínimas, mas esse tempo pode ser distribuído com outras células rítmicas, mas que precisam preencher o equivalente a 4 semínimas. Assim, o compasso $4/4$ pode ser preenchido com 4 semínimas, como acabamos de mencionar, ou 2 mínimas ou 1 semibreve.

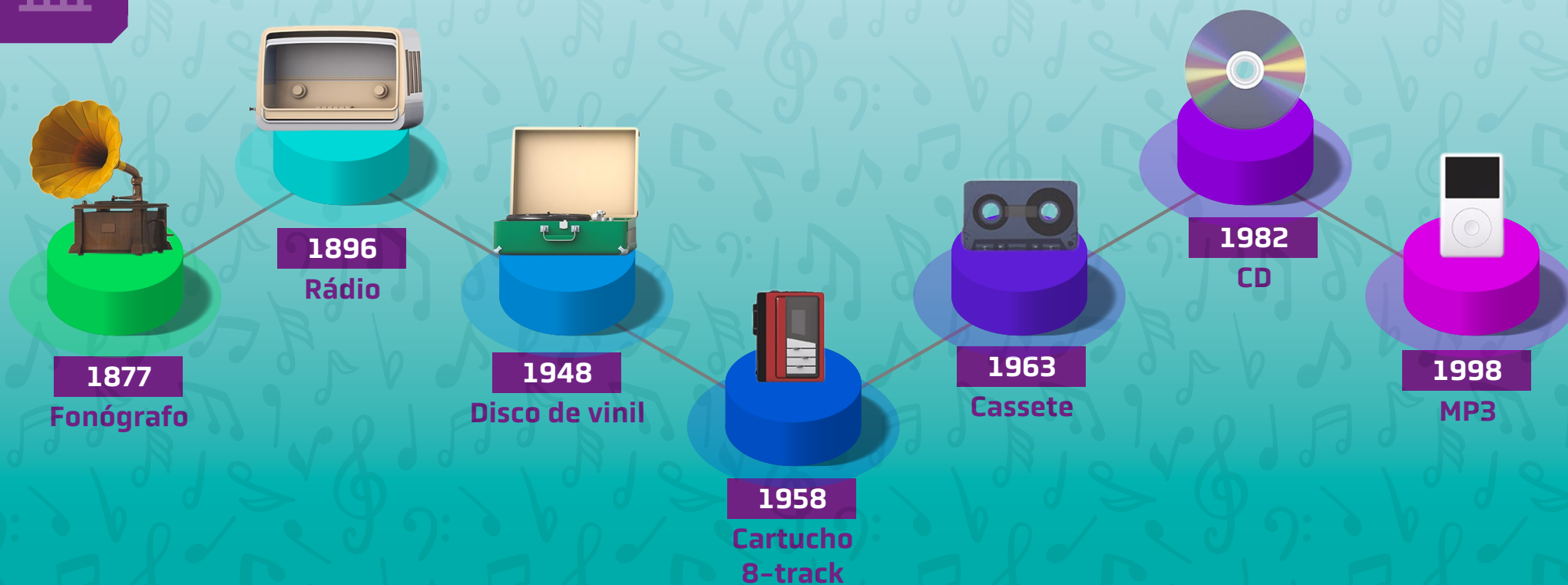
Há ainda outros sinais gráficos, regras e técnicas que precisam ser aprendidas para uma boa prática musical, além do próprio manuseio de um instrumento musical ou da voz, mas, até aqui analisamos o suficiente para lançarmos uma nova perspectiva sobre a música, concebida intrinsecamente à Matemática.





A evolução dos tocadores de música

Falamos de vários aspectos matemáticos na música, mas não falamos dos tocadores de música, que nos possibilitam o contato com nossas canções favoritas, sem que precisemos sequer cantar ou tocar.





- Fração
- Números racionais
- Números irracionais
- Razão e proporção
- Grandezas diretamente proporcionais
- Grandezas inversamente proporcionais
- Equações exponenciais
- Frequência acústica
- História da Matemática
- Teoria musical

V

Organizando ideias

1. Com base no texto da seção **Diálogo aberto** e lembrando da ordem das notas musicais, construa a escala musical pitagórica, preenchendo o quadro a seguir com as frações das notas que Pitágoras deve ter encontrado no monocórdio. Em seguida, escreva as frações que representam as frequências das notas em relação à nota Dó.

Nota	Fração do monocórdio	Razão em relação à nota Dó
Dó	1	1
Ré		
Mi		
Fá		
Sol		
Lá		
Si		
Dó	2	2

Com base no quadro, calcule a razão das frequências entre as notas e responda: que problema podemos identificar nessa escala? Justifique sua resposta.

Debate e reflexão

Pesquise sobre a música **Take five** de Dave Brubeck [1920–2012]. Se possível, ouça e identifique a formação dos compassos. Discuta com seus colegas o porquê de você acreditar que ela foi composta com essa formação de compasso.



V No vestibular

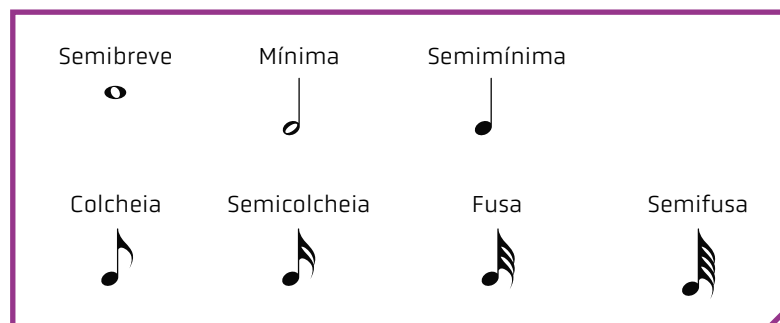
[Enem/MEC]

Na música, usam-se sinais gráficos chamados figuras de duração para indicar por quanto tempo se deve emitir determinado som.

As figuras de duração usadas atualmente são: semibreve, mínima, semínima, colcheia, semicolcheia, fusa e semifusa.

Essas figuras não possuem um valor [tempo] fixo. Elas são proporcionais entre si. A duração de tempo de uma semibreve é equivalente à de duas mínimas, a duração de uma mínima é equivalente à de duas semínimas, a duração de uma semínima equivale à de duas colcheias e assim por diante, seguindo a ordem dada.

Considere que a semibreve tem a duração de tempo de uma unidade.



Disponível em: www.portaledumusicalcp2.mus.br.
Acesso em: 11 nov. 2013 [adaptado]

A sequência que indica a duração de tempo de uma mínima, de uma semínima, de uma colcheia, de uma semicolcheia, de uma fusa e de uma semifusa é

a) 2, 4, 8, 16, 32, 64

b) 1, 2, 4, 8, 16, 32

c) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$

d) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \frac{31}{32}, \frac{63}{64}$

e) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}$



Diretor-geral

Ricardo Tavares de Oliveira

Diretor de Conteúdo e Negócios

Cayube Galas

Diretor Adjunto de Sistema de Ensino

Julio Ibrahim

Gerente de Produção e Design

Letícia Mendes de Souza

Editora

Carolina Cardoso Dutra Evangelista

Editor Assistente

Fernando Manenti Santos

Colaboradores

Alexandre da Silva Sanchez
Carolina da Silva Brandão

Coordenador de Eficiência e Analytics

Marcelo Henrique Ferreira Fontes

Analista de Fluxo

Letícia Bovolon Bezerra

Assistente de Fluxo

Samantha de Fátima Santos

Supervisora de Preparação e Revisão

Adriana Soares de Souza

Assistente Editorial

Renata Slovac Savero

Preparação e Revisão

Equipe FTD

Coordenadora de Imagem e Texto

Marcia Berne

Imagem e Licenciamento

Equipe FTD

Coordenadora de Criação

Daniela Di Creddo Máximo

Coordenador de Produção e Arte

Fabiano dos Santos Mariano

Supervisor de Produção e Arte

Pedro Gentile

Projeto Gráfico

Bruno Attili
Carlos Feitosa Ferreira

Editora de Arte

Carlos Feitosa Ferreira
Renata Kuba

Nono Estúdio: Coordenador Audiovisual

Diego Morgado

Nono Estúdio: Designers Audiovisuais

Ananda Castilho Barberino
Caio Francisco Brandão
Mauro Akira Ueda
Michel Luciano Silva Araújo

Crédito das imagens e vídeos

[capa] ©phadventure/123RF.COM; [p.2] silverkblackstock/Shutterstock.com; [p.3] zhu difeng/Shutterstock.com;
[p.4] German Vizulis/Shutterstock.com, non c/Shutterstock.com, Selma Caparoz; [p.5] Renata Kuba;
[p.6] John_Dakapu/Shutterstock.com, kichikimi/Shutterstock.com; [p.7] Siberian Art/Shutterstock.com; [p.8] Visual Generation/Shutterstock.com,
PLotulitStocker/Shutterstock.com; [p.9] Arquivo Pessoal, Kumer Oksana/Shutterstock.com, Visual Generation/Shutterstock.com;
[p.10] Kuliperko/Shutterstock.com, Nikolaeva/Shutterstock.com; haroldguevara/Shutterstock.com; [p.12] Visual Generation/Shutterstock.com.