Prof. Dr. Jürgen Prestin, Universität zu Lübeck

Petrivision „Lösungen: Verstehen“ 5. Mai 2018

Heureka
rief Archimedes laut durch Syrakus, nachdem er in der Badewanne sitzend, entdeckte, dass der Auftrieb eines Körpers genauso groß ist wie die Gewichtskraft des vom Körper verdrängten Mediums. Seitdem steht Heureka für die Freude und Genugtuung nach der Lösung eines schwierigen Problems. Nicht nur die exakte Formulierung von Naturgesetzen sondern auch die elegante Lösung mathematischer Probleme hat Forscher seit Jahrhunderten begeistert und war immer wieder Triebfeder für die Weiterentwicklung der Wissenschaft. Speziell die Mathematik steht manchmal synonym für das Finden von Lösungen. Man denkt sofort an die eigene Schulzeit zurück, in der man die Lösungen einer quadratischen Gleichung bestimmt hat oder eine schwierige Textaufgabe lösen sollte. Wenn man sich geistig fit halten will, dann erfreut man sich an der eigenen Lösung von Sudoku-Zahlenrätseln in unterschiedlichen Schwierigkeitsgraden. Schüler und Studenten nehmen weltweit an mathematischen Wettbewerben und Olympiaden teil, um an besonders schwierigen Aufgaben zu knobeln und Lösungen zu finden. Akademien und Universitäten veröffentlichen Aufgaben und vergeben Preise für deren Lösung.

Diese Suche nach einer Lösung war schon immer der Startpunkt mathematischer Forschung. Aber kann es auch der Ausgangspunkt gewesen sein? Wenn ich etwas lösen will oder etwas exakt beweisen möchte, muss jemand vorher eine Frage oder eine Aufgabe formuliert haben. Vielleicht ist dieses Herauskristallisieren der exakten Fragestellung sogar die größere Herausforderung? Schon im 4. Jahrhundert vor Christus beschäftigte man sich in der Antike mit Primzahlen, also den Zahlen, die nur durch 1 und sich selbst teilbar sind. Euklid bewies damals in seinem zeitlos berühmten Werk „Die Elemente“, dass es unendlich viele Primzahlen gibt. Er fand dafür eine wunderbar elegante Beweisidee, indem er annahm, dass es nur endlich viele Primzahlen gibt und er dies durch logisches Schlussfolgern auf einen Widerspruch zurückführen konnte. Heute kennen wir diese Aussage als Satz von Euklid. Im Dunkel der Geschichte bleibt aber, wer erstmals die Frage nach der Anzahl der Primzahlen stellte, wie entstand dieses Problem, das Euklid gelöst hat?

Die Frage ist so schwierig wie die Quadratur des Kreises.

Immer wieder haben solch ungelöste Probleme die Mathematik über Jahrhunderte begleitet. Pythagoras konnte vor über zweieinhalbtausend Jahren 2 ganze Zahlen angeben, deren Summe der Quadrate wieder eine Quadratzahl ergibt: $3^2+4^2=9+16=25=5^2$. Schon Euklid wusste, dass es unendlich viele solche Zahlenpaare gibt. Niedergelegt hat dies Diophantos im 3. Jahrhundert nach Christi Geburt in seinem Buch „Arithmetica“. Zusammengetragene Reste dieses Buches, die schon die Zerstörung der Bibliothek in Alexandria überstanden hatten, wurden von byzantinischen Gelehrten nach dem Fall Konstantinopels 1453 in den Westen mitgenommen.
So ein Exemplar beschäftige im 17. Jahrhundert den französischen Juristen und Mathematiker Pierre de Fermat. Eine geniale Eingebung hatte Fermat um das Jahr 1637, als er in Latein an den Rand einer Buchseite seines Exemplars schrieb:
„Es ist nicht möglich, einen Kubus in zwei Kuben, oder ein Biquadrat in zwei Biquadrate und allgemein eine Potenz, höher als die zweite, in zwei Potenzen mit demselben Exponenten zu zerlegen.“ Diese Aussage blieb über 350 Jahre eines der berühmtesten ungelösten Probleme

der Mathematik. Was heißt eigentlich „ungelöst“ in diesem Zusammenhang? Man hatte 350 Jahre keine Zahlen gefunden, die so eine Gleichung erfüllen oder „lösen“. Wenn man solche Zahlen nicht findet, möchten die Mathematiker natürlich auch sicher sein, dass es keine Lösungen gibt. Es gilt also auch als Lösung des Problems, wenn man logisch exakt beweist, dass es keine Lösungen geben kann. Dazu ermuntert, diesen Weg zu gehen, wurden Generationen von Mathematikern durch einen weiteren fulminanten Randkommentar von Fermat in seiner Kopie der Arithmetica. Er schrieb: „Ich habe hierfür einen wahrhaft wunderbaren Beweis, doch ist dieser Rand hier zu schmal, um ihn zu fassen.“
Bis in unsere Zeit wurden viele Ideen für Teillösungen zusammengetragen; es wurden aber auch viele Lösungsversuche mit logischen Fehlern vorgestellt, die den Autoren nicht die erhoffte Ehre und den zu erwartenden Ruhm einbrachten.
All die über die Jahrhunderte gelösten Spezialfälle und die dann 1994 von Andrew Wiles veröffentlichte erste wirkliche Lösung dieses Problems gaben der Mathematik einen großen Schub. Ganze Theoriegebäude entstanden im Umfeld dieser Beweisideen.
Ein gelöstes Problem wird für die Mathematik nicht per se uninteressant. Aus den Beweisen lassen sich viele neue Ideen schöpfen, die oft auch zu Verbesserungen und tieferer Einsicht führen können.
Ein spezielles Kriterium für die Güte einer Lösung ist ihre Eleganz. Wie überraschend und effektvoll werden verschiedene logische Gedankengänge miteinander verknüpft, um das Endergebnis zu erhalten? Kann es also für die gleiche Aussage elegante und auch langweilige Lösungen geben?

Einer der größten Mathematiker des 20. Jahrhunderts, der Ungar Paul Erdős hatte hierzu eine besonders phantasievolle Vorstellung von Lösungen. Er glaubte an die perfekten Beweise zu mathematischen Aussagen und er sprach immer von Gott, der ein transfinites Buch hat, in dem die besten Beweise aller mathematischen Sätze aufgeführt sind, Beweise, die elegant und perfekt sind. Ein besonderes Kompliment von Erdős war dann die Bemerkung, dass eine Lösung geradeheraus aus „dem Buch“ kommen würde. An anderer Stelle heißt es bei ihm: „You don’t have to believe in God, but you should believe in The Book“.

Eine Aufforderung zum Streben nach Eleganz, Klarheit und Perfektion in allen Lösungen.