



**Universidad Autónoma de Nuevo León
Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas**

**Un panorama general sobre la algebrizabilidad de ecuaciones
diferenciales**

María Esther Grimaldo Reyna

Índice

- ➊ Preliminares
- ➋ Objetivo
- ➌ Resultados
 - Algebrizabilidad de campos planares.
 - Algebrizabilidad de campos vectoriales en el espacio.
 - Ecuaciones diferenciales no autónomas.
 - Conclusiones.
- ➍ Bibliografía.



- Un espacio vectorial V se define sobre un campo F .



Un espacio de Banach
se define sobre el
campo real o complejo.

Un módulo
se define sobre
un álgebra.



Se definen ecuaciones diferenciales
sobre álgebras
en lugar de ecuaciones diferenciales
de tiempo real o complejo.

Una $\mathbb{K}$ -álgebra $\mathbb{A}$, es un $\mathbb{K}$ -espacio lineal con un producto bilineal $\mathbb{A} \times \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ denotado por $(x, y) \mapsto xy$, el cual es asociativo y conmutativo y con unidad e que satisface $ex = xe = x$

Esto es:

Para todo $x, y, z \in \mathbb{A}$ y $\alpha \in \mathbb{K}$ se tiene

- a) $x(yz) = (xy)z$
- b) $xy = yx$
- c) $x(y + z) = xy + xz$
- d) $\alpha(xy) = (\alpha x)y$

Un elemento $a \in \mathbb{A}$ es llamado *regular* si existe $a^{-1} \in \mathbb{A}$ llamado *inverso* de a tal que $a^{-1} \cdot a = a \cdot a^{-1} = e$.

Si $a \in \mathbb{A}$ es no regular, entonces a es llamado *singular*. Si $a, b \in \mathbb{A}$ y b es regular, el cociente a/b está dado por $a \cdot b^{-1}$.

CONSTANTES DE ESTRUCTURA

Si $\beta = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ es una base ordenada de un álgebra $\mathbb{A}$, el producto entre los elementos de β está dado por:

$$\beta_i \beta_j = \sum_{k=1}^n c_{ijk} \beta_k$$

donde $c_{ijk} \in \mathbb{K}$ para $i, j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$ son llamadas las *constantes de estructura* de $\mathbb{A}$ asociadas a β .

PRIMERA REPRESENTACIÓN FUNDAMENTAL

La primera representación de $\mathbb{A}$ asociada a β es el isomorfismo $R : \mathbb{A} \rightarrow M(n, \mathbb{K})$ definido por:

$$R(\beta_i) = R_i$$

para $i = 1, 2, \dots, n$, donde R_i es la matriz

$$R_i = \begin{pmatrix} c_{i11} & c_{i21} & \dots & c_{in1} \\ c_{i12} & c_{i22} & \dots & c_{in2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i1n} & c_{i2n} & \dots & c_{inn} \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^2$ es un álgebra asociativa, conmutativa y con unidad $e_{\mathbb{R}^2} = (1, 0)$, con el producto:

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2, x_1y_2 + y_1x_2)$$

Para la primera representación fundamental:

$$(1, 0)(1, 0) = (1, 0) = 1(1, 0) + 0(0, 1), c_{111} = 1, c_{112} = 0$$

$$(1, 0)(0, 1) = (0, 1) = 0(1, 0) + 1(0, 1), c_{121} = 0, c_{122} = 1$$

$$(0, 1)(1, 0) = (0, 1) = 0(1, 0) + 1(0, 1), c_{211} = 0, c_{212} = 1$$

$$(0, 1)(0, 1) = (0, 0) = 0(1, 0) + 0(0, 1), c_{221} = 0, c_{222} = 0$$

$$R(1, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, R(0, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Sea } (x, y) = x(1, 0) + y(0, 1) \in \mathbb{R}^2$$

$$R(x, y) = xR(1, 0) + yR(0, 1)$$

$$R(x, y) = x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

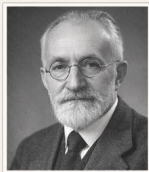
$$R(x, y) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix}$$

El conjunto de matrices

$$\left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix} \right\}$$

es una $\mathbb{R}$ álgebra.

Maurice Fréchet y Edgar R. Lorch



Maurice Fréchet

(1878–1973)

- Matemático francés.
- Pionero en análisis funcional y espacios métricos.



Edgar R. Lorch

(1907–1990)

- Matemático estadounidense.
- Contribuciones en espacios de Banach y análisis funcional.

En el estudio de ecuaciones diferenciales y análisis funcional aparecen distintas nociones de diferenciabilidad.

Las más utilizadas son:

- Diferenciabilidad de Fréchet
- Diferenciabilidad de Lorch

Ambas generalizan la derivada clásica a funciones definidas entre espacios normados o álgebras.

Diferenciabilidad de Fréchet

Sean X, Y espacios normados y $F : X \rightarrow Y$.

Decimos que F es **diferenciable en el sentido de Fréchet** en $x_0 \in X$ si existe una aplicación lineal continua

$$DF(x_0) : X \rightarrow Y$$

tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|F(x_0 + h) - F(x_0) - DF(x_0)h\|}{\|h\|} = 0$$

La transformación $DF(x_0)$ se llama **derivada de Fréchet**.

Sea A una álgebra normada sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Una función $F : A \rightarrow A$ es **A -diferenciable en el sentido de Lorch** en $a \in A$ si existe $b \in A$ tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|F(a+h) - F(a) - bh\|}{\|h\|} = 0$$

El elemento b se llama **derivada de Lorch** de F en a .

Interpretación de la diferenciabilidad de Lorch

La diferenciabilidad de Lorch impone que la derivada tenga la forma

$$DF(a)h = bh$$

es decir, la derivada está dada por **multiplicación en el álgebra**.

Importancia en sistemas diferenciales

La diferenciabilidad de Lorch permite interpretar ciertos sistemas diferenciales como:

- ecuaciones de Cauchy–Riemann generalizadas
- campos vectoriales algebrizables
- sistemas dinámicos inducidos por álgebras

Esto conecta:

Álgebras $\longleftrightarrow$ Sistemas diferenciales

DIFERENCIABILIDAD SOBRE ÁLGEBRAS

Sea $f : U \subset \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$, definida en un conjunto abierto U . f es $\mathbb{A}$ -diferenciable en $x_0 \in \mathbb{A}$ si existe un elemento $f'(x_0) \in \mathbb{A}$ llamado $\mathbb{A}$ -diferencial de f en x_0 y satisface:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h|}{|h|} = 0,$$

donde $f'(x_0)h$ denota el producto en $\mathbb{A}$ de $f'(x_0)$ con h .

Teorema

Supongamos que el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\sum_{i,j=1}^n d_{kij} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, (n^2 - n)) \quad (1)$$

tienen la propiedad de que para algún entero fijo p , este implica que se cumple lo siguiente:

$$\left(\frac{\partial f_r}{\partial x_s} \right) = \left(\sum_{t=1}^n a_{tsr} \frac{\partial f_t}{\partial x_p} \right) = \sum_{t=1}^n (a_{tsr}) \frac{\partial f_t}{\partial x_p} = \sum_{t=1}^n A_t \frac{\partial f_t}{\partial x_p}.$$

Supongamos que las matrices $A_i = (a_{isr}), i = 1, 2, \dots, n$, son conmutativas y

$$\sum_{i=1}^n d_{kii} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n^2 - n).$$

Entonces existe una única álgebra $\mathbb{A}$ lineal, conmutativa, asociativa sobre $\mathbb{K}$ para la cual (1) es un conjunto de ecuaciones de Cauchy Riemann generalizadas.

Dada una ecuación diferencial ordinaria autónoma de la forma

$$\dot{x} = f(x)$$

donde $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es diferenciable en el sentido usual, se busca:

Objetivo



- Mostrar cómo se pueden utilizar las álgebras para resolver algunos sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias.



- Dar las condiciones bajo las cuales aseguramos la existencia de un álgebra con respecto a la cual f es Lorch-diferenciable y en este caso, encontramos el álgebra correspondiente para expresar f como una ecuación diferencial sobre un álgebra.



- Expresar f como una ecuación diferencial sobre un álgebra.



- Resolver la ecuación en el álgebra y posteriormente encontrar las soluciones a la ecuación diferencial ordinaria.



Definición

Sea A el espacio $\mathbb{R}^2$ con un producto de $\mathbb{R}$ -álgebra. Decimos que un campo vectorial

$$F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

es **A -algebrizable** en U si F es A -diferenciable en U .

Definición

Sea A el espacio $\mathbb{R}^2$ con un producto de $\mathbb{R}$ -álgebra. Diremos que el sistema diferencial

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2), \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2)\end{aligned}$$

es A -algebrizable si el campo vectorial asociado es A -algebrizable.

RESULTADOS

ALGEBRIZABILIDAD DE CAMPOS PLANARES

Teorema. Sea $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ Fréchet diferenciable sobre el conjunto U . Supongamos que existen pares de matrices $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2 \in \mathbb{M}(2, \mathbb{R})$ de uno de los siguientes tipos

$$\text{I)} \quad \mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{II)} \quad \mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{III)} \quad \mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

RESULTADOS

ALGEBRIZABILIDAD DE CAMPOS PLANARES

las cuales son ortogonales a la matriz Jacobiana $Jf(x, y)$, esto es

$$\langle \mathbf{B}_i, Jf(x, y) \rangle = 0, \quad i = 1, 2,$$

para todo $(x, y) \in U$, entonces $\mathbb{R}^2$ dotado con la estructura de álgebra dada por el producto correspondiente (I, II o III)

$$\text{I) } \begin{array}{c|cc} \cdot & e_1 & e_2 \\ \hline e_1 & e_1 & e_2 \\ e_2 & e_2 & -be_1 + ae_2 \end{array}, \text{ II) } \begin{array}{c|cc} \cdot & e_1 & e_2 \\ \hline e_1 & -ae_1 & e_1 \\ e_2 & e_1 & e_2 \end{array}, \text{ III) } \begin{array}{c|cc} \cdot & e_1 & e_2 \\ \hline e_1 & e_1 & 0 \\ e_2 & 0 & e_2 \end{array},$$

es un álgebra $\mathbb{A}$ tal que f es $\mathbb{A}$ -diferenciable.

ALGEBRIZABILIDAD DE CAMPOS PLANARES

Ejemplo

Considere el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1^2 - 2x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= 2x_1x_2 + 2x_2^2,\end{aligned}$$

asociado al campo vectorial $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido por

$$f(x_1, x_2) = (x_1^2 - 2x_2^2, 2x_1x_2 + 2x_2^2)$$

y cuya matriz Jacobiana es

$$Jf(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 & -4x_2 \\ 2x_2 & 2x_1 + 4x_2 \end{pmatrix}.$$

Las matrices

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

son ortogonales a la matriz Jacobiana $Jf(x_1, x_2)$, esto es

$$\langle \mathbf{B}_i, Jf(x_1, x_2) \rangle = 0, \quad i = 1, 2,$$

para todo $(x_1, x_2) \in U$. Entonces, f es $\mathbb{A}$ -algebrizable con respecto al álgebra $\mathbb{A}$, la cual es $\mathbb{R}^2$ con el producto

$\cdot$	e_1	e_2
e_1	e_1	e_2
e_2	e_2	$-2e_1 + 2e_2$

donde $e = e_1$ es la identidad en $\mathbb{A}$.

RESULTADOS

ALGEBRIZABILIDAD DE CAMPOS PLANARES

Ahora, $f(te) = f(t(1,0)) = (t^2, 0) = t^2(1, 0) = t^2 e_1 e_1 = t^2 e^2 = (te)^2 = \xi^2$.

Entonces

$$F(\xi) = \xi^2$$

y

$$\xi = -(\tau + c)^{-1}$$

y $c \in \mathbb{A}$ es una constante en el álgebra.

Resolver la ecuación diferencial se reduce a encontrar

$$-(\tau + c)^{-1}$$

.

RESULTADOS

ALGEBRIZABILIDAD DE CAMPOS PLANARES

Entonces

$$w(0,0) = \left(\frac{-c_1}{((c_1+c_2)^2+(c_2)^2)} \quad \frac{-c_2}{(c_1+c_2)^2+(c_2)^2} \right).$$

Como

$$w(0) = \frac{-1}{c}$$

obtenemos

$$\begin{aligned}(x_1(t), x_2(t)) &= w(te) \\ &= w(t, 0) \\ &= \left(\frac{-(t+c_1)}{(t+c_1)^2+(c_2)^2} \quad , \quad \frac{-c_2}{(t+c_1)^2+(c_2)^2} \right)\end{aligned}$$

y satisface la condición que

$$x_1(0) = \frac{-c_1}{(c_1)^2+(c_2)^2} \text{ y } x_2(0) = \frac{-c_2}{(c_1)^2+(c_2)^2}$$

RESULTADOS

Caracterización de sistemas cuadráticos algebrizables en el plano.

Los sistemas planares cuadráticos algebrizables, son:

① Type I

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a_0 + (b_2 - ab_1)x - bb_1y - 2bb_4xy \\ &\quad + \left(\frac{1}{2}b_3 - ab_4\right)x^2 - \frac{1}{2}bb_3y^2 \\ \dot{y} &= b_0 + b_1x + b_2y + b_3xy + b_4x^2 + b_5y^2,\end{aligned}$$

donde $a, b, a_0, b_0, b_1, \dots, b_5$ son constantes reales con la relación

$$ab_3 = 2b_5 + 2bb_4.$$

La ecuación diferencial de una sola variable sobre el álgebra correspondiente está dada por:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{d\tau} &= (a_0 e_1 + b_0 e_2) + ((b_2 - ab_1)e_1 + b_1 e_2)\xi \\ &+ \left(\left(\frac{1}{2}b_3 - ab_4 \right) e_1 + b_4 e_2 \right) \xi^2. \end{aligned}$$

1 Type II

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy + a_4x^2 + a_5y^2 \\ \dot{y} &= b_0 + (a_1 + aa_2)y + \left(\frac{1}{2}a_3 + aa_5\right)y^2,\end{aligned}$$

donde $a, b_0, a_0, a_1, \dots, a_5$ son constantes reales con la relación

$$a_3 = -2\frac{a_4}{a}.$$

La ecuación diferencial de una sola variable sobre el álgebra correspondiente está dado por:

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{d\tau} &= (a_0e_1 + b_0e_2) + (a_2e_1 + (a_1 + aa_2)e_2)\xi \\ &+ \left(a_5e_1 + \left(\frac{1}{2}a_3 + aa_5\right)e_2\right)\xi^2.\end{aligned}$$

1 Type III

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a_0 + a_1x + a_2x^2 \\ \dot{y} &= b_0 + b_1y + b_2y^2,\end{aligned}$$

donde a_i y b_i son constantes reales para $i = 0, 1, 2$. La ecuación diferencial de una sola variable sobre el álgebra correspondiente está dado por:

$$\frac{d\xi}{d\tau} = (a_0e_1 + b_0e_2) + (a_1e_1 + b_1e_2)\xi + (a_2e_1 + b_2e_2)\xi^2.$$

Algebrizabilidad de campos vectoriales en $\mathbb{R}^3$.

Teorema 1.

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una función Fréchet-diferenciable sobre un conjunto abierto U . Supongamos la existencia de seis matrices linealmente independientes $\mathbf{B}_i \in \mathbb{M}(3, \mathbb{R})$ para $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ de los siguientes tipos

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} -1 & c & d \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_3 = \begin{pmatrix} 0 & e & f \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_4 = \begin{pmatrix} 0 & g & h \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_5 = \begin{pmatrix} 0 & i & j \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_6 = \begin{pmatrix} -1 & k & l \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

las cuales son ortogonales a la matriz Jacobiana $Jf(x, y, z)$ de f , esto es

$$\langle \mathbf{B}_i, Jf(x, y, z) \rangle = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

for all $(x, y, z) \in U$. Si las matrices

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & -a & -b \\ 1 & -c & -d \\ 0 & -e & -f \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & -b & -h \\ 0 & -d & -j \\ 1 & -f & -l \end{pmatrix}$$

son conmutativas, esto es $M_1 M_2 = M_2 M_1$, entonces $\mathbb{R}^3$ dotado con la estructura de álgebra dado por el siguiente producto

$$\begin{array}{c|ccc}
 \cdot & e_1 & e_2 & e_3 \\
 \hline
 1) \quad e_1 & e_1 & e_2 & e_3 \\
 e_2 & e_2 & -ae_1 - ce_2 - ee_3 & -be_1 - de_2 - fe_3 \\
 e_3 & e_3 & -be_1 - de_2 - fe_3 & -he_1 - je_2 - le_3
 \end{array} \quad (2)$$

es un álgebra $\mathbb{A}$ tal que f es $\mathbb{A}$ -diferenciable.

Teorema 2.

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ Fréchet-diferenciable sobre un conjunto abierto U .

Supongamos que existen seis matrices linealmente independientes

$\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_6 \in \mathbb{M}(3, \mathbb{R})$ de los siguientes tipos

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & -1 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ e & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ g & 0 & h \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & j \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ k & -1 & l \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

las cuales son ortogonales a la matriz jacobiana $Jf(x, y, z)$ de f , esto es

$$\langle \mathbf{B}_i, Jf(x, y, z) \rangle = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

para todo $(x, y, z) \in U$. Si las matrices

$$M_1 = \begin{pmatrix} -a & 1 & -g \\ -c & 0 & -i \\ -e & 0 & -k \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} -b & 0 & -h \\ -d & 0 & -j \\ -f & 1 & -l \end{pmatrix}$$

son conmutativas, esto es $M_1 M_2 = M_2 M_1$, entonces $\mathbb{R}^3$ dotado de la estructura de álgebra dado por el siguiente producto

$$II) \quad \begin{array}{c|ccc} \cdot & e_1 & e_2 & e_3 \\ \hline e_1 & -ae_1 - ce_2 - ee_3 & e_1 & -be_1 - de_2 - fe_3 \\ e_2 & e_1 & e_2 & e_3 \\ e_3 & -be_1 - de_2 - fe_3 & e_3 & -he_1 - je_2 - le_3 \end{array} \quad (3)$$

es un álgebra $\mathbb{A}$ tal que f es $\mathbb{A}$ -diferenciable.

Teorema

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ Fréchet-diferenciable sobre un conjunto abierto U . Supongamos que existen seis matrices linealmente independientes $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_6 \in \mathbb{M}(3, \mathbb{R})$ de los siguientes tipos

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a & b & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ c & d & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ e & f & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ g & h & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ i & j & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ k & l & 0 \end{pmatrix}$$

las cuales son ortogonales a la matriz jacobiana $Jf(x, y, z)$ de f , esto es

$$\langle \mathbf{B}_i, Jf(x, y, z) \rangle = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

para todo $(x, y, z) \in U$. Si las matrices

$$M_1 = \begin{pmatrix} -a & -g & 1 \\ -c & -i & 0 \\ -e & -k & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} -b & -h & 0 \\ -d & -j & 1 \\ -f & -l & 0 \end{pmatrix}$$

son conmutativas, esto es, $M_1 M_2 = M_2 M_1$, entonces $\mathbb{R}^3$ dotado con la estructura de álgebra dado por el siguiente producto

III)	$\cdot$	e_1	e_2	e_3
	e_1	$-ae_1 - ce_2 - ee_3$	$-be_1 - de_2 - fe_3$	e_1
	e_2	$-be_1 - de_2 - fe_3$	$-he_1 - je_2 - le_3$	e_2
	e_3	e_1	e_2	e_3

es un álgebra $\mathbb{A}$ tal que f es $\mathbb{A}$ -diferenciable.

Ejemplo

Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(x, y, z) = (x^2 - 2yz, 2xy - y^2 - 2yz, 2xz - 2yz - z^2)$$

y

$$Jf(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & -2z & -2y \\ 2y & 2x - 2y - 2z & -2y \\ 2z & -2z & 2x - 2y - 2z \end{pmatrix}.$$

Las matrices

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_5 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_6 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

satisfacen las condiciones del Teorema 1,

y las matrices

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

conmutan. Entonces $\mathbb{R}^3$ dotado de la estructura de álgebra dada por el producto

$\cdot$	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	e_2	e_3
e_2	e_2	$-e_2$	$-e_1 - e_2 - e_3$
e_3	e_3	$-e_1 - e_2 - e_3$	$-e_3$

es un álgebra $\mathbb{A}$ tal que f es $\mathbb{A}$ -diferenciable.

Si $e = e_{\mathbb{A}}$, entonces

$$\begin{aligned} f(te) &= f(t, 0, 0) \\ &= (t^2, 0, 0) \\ &= t^2(1, 0, 0) \\ &= t^2e \\ &= \xi^2 \\ &= f(\xi) \end{aligned}$$

Luego, con $\frac{d\xi}{d\tau} = \xi^2$ se tiene que las soluciones son $\xi(\tau) = -(\tau + c)^{-1}$, donde $c = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{A}$ es una constante relacionada con la condición inicial y $\tau = (t, r, s)$ es un parámetro (tiempo) sobre el álgebra $\mathbb{A}$.

La primera representación R de $\mathbb{A}$ es determinada por

$$R(e_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, R(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y

$$R(e_3) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

La expresión para $\xi(\tau)$ es igual a la pre-imagen bajo R de la matriz de

$$\begin{pmatrix} (t + c_1) & -(s + c_3) & -(r + c_2) \\ (r + c_2) & (t + c_1) - (r + c_2) - (s + c_3) & -(r + c_2) \\ (s + c_3) & -(s + c_3) & (t + c_1) - (r + c_2) - (s + c_3) \end{pmatrix}^{-1}.$$

Entonces

$$\xi(\tau) = \frac{1}{|A|}(g_1(\tau), g_2(\tau), g_3(\tau)) \text{ donde}$$

$$\begin{aligned} g_1(\tau) &= (t + c_1)^2 - 2(t + c_1)(r + c_2) - 2(t + c_1)(s + c_3) \\ &\quad + (r + c_2)^2 + (r + c_2)(s + c_3) + (s + c_3)^2 \\ g_2(\tau) &= (s + c_3)^2 - (t + c_1)(s + c_3) \\ g_3(\tau) &= -(r + c_2)^2 + (t + c_1)(r + c_2) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}|A| &= (x + c_1)^3 - 2(x + c_1)^2(y + c_2) - 2(t + c_1)^2(z + c_3) + (x + c_1)(y + c_2)^2 \\ &+ 3(x + c_1)(y + c_2)(z + c_3) + (x + c_1)(z + c_3)^2 - (y + c_2)^2(z + c_3) \\ &- (y + c_2)(z + c_3)^2.\end{aligned}$$

En este caso, la solución $(x(t), y(t), z(t)) = \xi(t, 0, 0)$ de $\frac{dx}{dt} = f(x)$

está dada por

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{1}{|A_0|} \left((t + c_1)^2 - 2(t + c_1)(c_2) - 2(t + c_1)(c_3) \right), \\&+ (c_2)^2 + (c_2)(c_3) + (c_3)^2 \\y(t) &= \frac{1}{|A_0|} \left((c_3)^2 - (t + c_1)(c_3) \right), \\z(t) &= \frac{1}{|A_0|} \left(-(c_2)^2 + (t + c_1)(c_2) \right),\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}|A_0| &= (t + c_1)^3 - 2(t + c_1)^2(c_2) - 2(t + c_1)^2(c_3) + (t + c_1)(c_2)^2 \\&+ 3(t + c_1)(c_2)(c_3) + (t + c_1)(c_3)^2 - (c_2)^2(c_3) - (c_2)(c_3)^2.\end{aligned}$$

Resumen proceso de solución para sistemas de EDO con campos en $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$

- Se encuentra un álgebra de matrices en $M(n, \mathbb{R})$ para la cual se cumple que

$$Jf(x) \in M(n, \mathbb{R}).$$

- Se utiliza el álgebra de matrices para encontrar un producto en $\mathbb{R}^n$, con el cual $\mathbb{R}^n$ es un álgebra A .
- Se escribe f en términos de la variable del álgebra A .
- Se escribe la ecuación diferencial ordinaria como una ecuación diferencial sobre A y se resuelve.
- Se usan las soluciones de la ecuación diferencial sobre A para encontrar las soluciones de la ecuación diferencial ordinaria.

- a) Buscar una generalización del tipo de familias de campos vectoriales

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

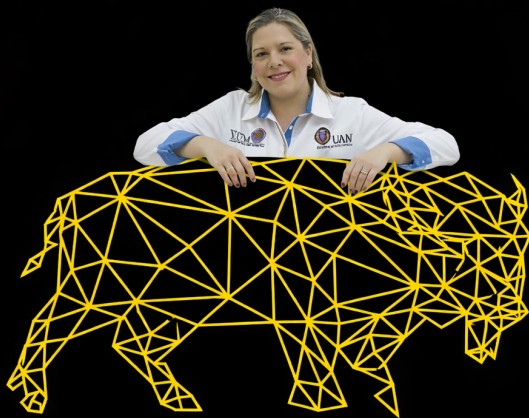
algebrizables (para cada valor entero n).

- b) Implicar los resultados de este trabajo en el caso de los sistemas diferenciales no autónomos a teoría de control.
- c) Realizar simulaciones de las soluciones del sistema original y compararlas con las simulaciones de las soluciones de la ecuación en el álgebra.

- [1] P. Ketchum, Analytic Functions of Hypercomplex Variables, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 30, pp. 641-667, 1928,
<http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9947-1928-1501452-7>.
- [2] J. Ward, From Generalized Cauchy-Riemann Equations to Linear Algebra, From Generalized Cauchy-Riemann Equations to Linear Algebra, vol. 4, pp. 456-461, 1953,
<http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9939-1953-0055981-6>.
- [3] E. Lorch, The Theory of Analytic Functions in Normed Abelian Vector Rings, Transactions of the American Mathematical Society, vol. 54, No. 3, pp. 414-425, 1943,
<http://dx.doi.org/10.2307/1990255>.

- [4] E. A. Coddington and N. Levinson, Theory of Ordinary Differential Equations, McGraw-Hill, 1955.
- [5] J. A. Ward, A theory of analytic functions in linear associative algebras, Duke Math. J., vol. 7, pp. 233-248, 1940, <http://dx.doi.org/10.1215/S0012-7094-40-00714-1>.
- [6] L. V. Ahlfors, "Complex Analysis", McGraw-Hill International Book Company, 1979.

- [7] M. A. Alcorta-García, M. E. Frías-Armenta, M. E. Grimaldo-Reyna, E. López-González, *Algerizability of vector fields in the space*. AVANZA, Cuerpo Académico de Matemáticas Aplicadas, Vol. V, ISBN 978-607-9224-52-3. Ciudad Juárez Chihuahua, México.
- [8] E. López-González; Loeza L.; M.A Alcorta-García; M.E Grimaldo-Reyna. Diferenciabilidad y ecuaciones diferenciales sobre álgebras, Universidad Autónoma de Ciudad Juárez, 2012.
- [9] V.I. Arnold, "Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations", Springer-Verlag, 1988.



π - GRACIAS