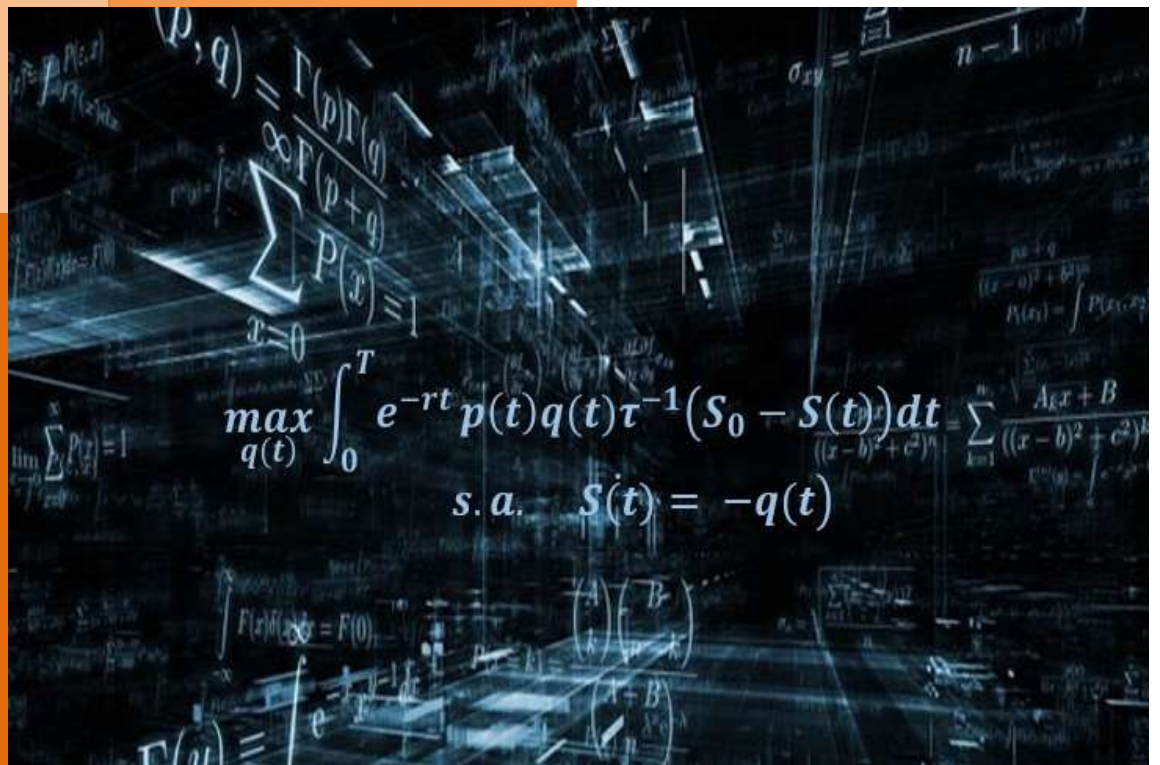


FUNDAMENTOS DE ECONOMÍA MINERA



Juan Ignacio Guzmán



PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA
DE CHILE



Tabla de contenido

NOTACIÓN	VI
CAPÍTULO 1: CONCEPTOS BÁSICOS	2
1.1 ECONOMÍA DE LOS RECURSOS NATURALES	2
1.2 ECONOMÍA MINERA	8
1.3 GEOLOGÍA Y TIPOS DE MINERALES	10
1.4 CADENA DE VALOR EN MINERÍA	12
1.5 HETEROGENEIDAD DEL RECURSO Y SU ROL EN LA PLANIFICACIÓN MINERA	13
1.6 PROBLEMAS RESUELTOS	21
CAPÍTULO 2: LOS PROBLEMAS DE LA EXPLOTACIÓN DE MINAS	25
2.1 TIPOS DE EMPRESAS MINERAS	25
2.2 PRECIO DE LOS <i>COMMODITIES</i>	27
2.3 PROBLEMA ECONÓMICO DE LA EMPRESA MINERA	31
2.4 DEFICIENCIAS DE LA SOLUCIÓN AL PROBLEMA EN LA ACTUALIDAD	38
2.5 PROBLEMÁTICAS NO-ECONÓMICAS DE LA EXPLOTACIÓN DE MINAS	41
2.6 PROBLEMAS RESUELTOS	43
CAPÍTULO 3: PRINCIPIOS DE OPTIMIZACIÓN DINÁMICA	48
3.1 RESEÑA HISTÓRICA	48
3.2 DEFINICIÓN DE OPTIMIZACIÓN INTERTEMPORAL	49
3.3 MODELO GENERAL DE OPTIMIZACIÓN DINÁMICA EN TIEMPO DISCRETO	51
3.4 TIPOS DE SOLUCIONES	55
3.5 FORMULACIÓN EN TIEMPO CONTINUO	57
3.6 MÉTODOS DE OPTIMIZACIÓN DINÁMICA	57
3.7 APLICACIÓN EN LA INDUSTRIA MINERA	58
3.8 PROBLEMAS RESUELTOS	65
CAPÍTULO 4: CÁLCULO DE VARIACIONES	70
4.1 RESEÑA HISTÓRICA	70
4.2 FUNCIONALES	72
4.3 CONDICIÓN DE PRIMER ORDEN PARA EL CÁLCULO DE VARIACIONES	83
4.4 CÁLCULO DE VARIACIONES EN MÚLTIPLES VARIABLES	98
4.5 TRES CASOS ADICIONALES AL CÁLCULO DE VARIACIONES	108
4.6 PROBLEMAS RESUELTOS	121
ANEXO I: RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS	157
ANEXO II: CASOS ESPECIALES PARA LA ECUACIÓN DE EULER-LAGRANGE	162
CAPÍTULO 5: PROGRAMACIÓN DINÁMICA	165
5.1 INTRODUCCIÓN A LA PROGRAMACIÓN DINÁMICA	165
5.2 DERIVACIÓN MATEMÁTICA DE LA ECUACIÓN DE HAMILTON-JACOBI-BELLMAN	174

5.3	NOTA MINERA: EL PROBLEMA DE KENNETH LANE	178
5.4	OTRAS APLICACIONES DE LA PROGRAMACIÓN DINÁMICA	187
5.5	PROBLEMAS RESUELTOS	188
CAPÍTULO 6: CONTROL ÓPTIMO		208
6.1	PRINCIPALES APLICACIONES	208
6.2	PROBLEMA DEL CONTROL ÓPTIMO	209
6.3	PRINCIPIO DEL MÁXIMO	212
6.4	CONDICIONES DE TRANSVERSALIDAD Y CONDICIONES INICIALES	218
6.5	CONDICIONES DE SEGUNDO ORDEN O SUFICIENTES	220
6.6	PROBLEMA DEL CONTROL ÓPTIMO EN LA MINERÍA Y SU SIGNIFICADO.	223
6.7	CASOS PARTICULARES	227
6.8	PROBLEMAS RESUELTOS	235
CAPÍTULO 7: CÁLCULO ESTOCÁSTICO		253
7.1	RESEÑA HISTÓRICA	253
7.2	PROCESOS ESTOCÁSTICOS	254
7.3	PROCESO DE WIENER	259
7.4	MOVIMIENTO BROWNIANO CON <i>DRIFT</i>	265
7.5	CÁLCULO ESTOCÁSTICO DE <i>ITÔ</i>	268
7.6	PROCESO DE <i>ITÔ</i>	269
7.7	LEMA DE <i>ITÔ</i>	282
7.8	DESIGUALDAD DE JENSEN	288
7.9	PROBLEMAS RESUELTOS	291
CAPÍTULO 8: CONTROL ÓPTIMO ESTOCÁSTICO		317
8.1	PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	318
8.2	PROGRAMACIÓN DINÁMICA ESTOCÁSTICA	323
8.3	CONTROL ÓPTIMO ESTOCÁSTICO	331
8.4	PROBLEMAS RESUELTOS	338
CAPÍTULO 9: EL MUNDO DE HOTELLING		345
9.1	SUPUESTOS DEL MUNDO DE HOTELLING	345
9.2	PROBLEMA DE LA MINA EN EL MUNDO DE HOTELLING	349
9.3	PRECIO DE EQUILIBRIO EN EL MUNDO IDEAL DE HOTELLING	359
9.4	REGLA DE HOTELLING COMO MAXIMIZADOR DEL BIENESTAR SOCIAL	365
9.5	RELAJACIÓN DE LOS SUPUESTOS DE HOTELLING	369
9.6	OTRAS EXTENSIONES TEÓRICAS DEL MUNDO IDEAL DE HOTELLING	382
9.7	PROBLEMAS RESUELTOS	383
CAPÍTULO 10: EL PROBLEMA DE DETERMINAR LA PRODUCCIÓN ÓPTIMA		407
10.1	LAS RESTRICCIONES EN MINERÍA	407
10.2	PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	408
10.3	RELAJANDO LOS SUPUESTOS DEL MUNDO IDEAL DE HOTELLING	414

10.4	ANÁLISIS DE ESTABILIDAD	424
10.5	ESTÁTICA COMPARATIVA	432
10.6	PROBLEMAS RESUELTOS	437
CAPÍTULO 11: EL PROBLEMA DE DETERMINAR LA INVERSIÓN ÓPTIMA		459
11.1	LA INVERSIÓN EN MINERÍA	459
11.2	DETERMINACIÓN DE LA CAPACIDAD DE PRODUCCIÓN MEDIANTE PLANIFICACIÓN MINERA	463
11.3	RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA MEDIANTE OPTIMIZACIÓN DINÁMICA	466
11.4	PROBLEMAS RESUELTOS	475
CAPÍTULO 12: EL EFECTO DE LOS IMPUESTOS Y ROYALTIES		486
12.1	<i>ROYALTY</i>	487
12.2	IMPUESTO <i>UNIT-BASED</i>	489
12.3	IMPUESTO A LA UTILIDAD O IMPUESTO A LA RENTA	495
12.4	IMPUESTO A LAS VENTAS (<i>AD VALOREM</i>)	497
12.5	IMPUESTO HÍBRIDO	508
12.6	IMPUESTOS MINEROS EN CHILE Y EN EL RESTO DEL MUNDO	509
12.7	PROBLEMAS RESUELTOS	512
CAPÍTULO 13: FUENTES DE INCERTIDUMBRE EN MINERÍA		522
13.1	FUENTES DE INCERTIDUMBRE EN UN PROYECTO MINERO	522
13.2	RELEVANCIA DE LA INCERTIDUMBRE DE PRECIOS DE <i>COMMODITIES</i> EN LA EXPLOTACIÓN MINERA	529
13.3	MERCADOS DE <i>COMMODITIES</i>	531
13.4	DERIVACIÓN CONCEPTUAL DEL PRECIO EN LA INDUSTRIA DE LOS <i>COMMODITIES</i> MINERALES	533
13.5	PROCESOS ESTOCÁSTICOS PARA CÁLCULOS DE PRECIOS DE <i>COMMODITIES</i>	541
13.6	PROBLEMAS RESUELTOS	548
CAPÍTULO 14: EL PROBLEMA DE DETERMINAR LA PRODUCCIÓN ÓPTIMA BAJO INCERTIDUMBRE		558
14.1	LA INCERTIDUMBRE EN EL PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN DE LA PRODUCCIÓN	558
14.2	EL PROBLEMA DE LA PRODUCCIÓN ÓPTIMA CON CERTIDUMBRE	559
14.3	EL PROBLEMA DE LA PRODUCCIÓN ÓPTIMA CON INCERTIDUMBRE	563
14.4	PROBLEMAS RESUELTOS	584
CAPÍTULO 15: EL PROBLEMA DE DETERMINAR LA EXPLORACIÓN ÓPTIMA		596
15.1	INTRODUCCIÓN	596
15.2	EL ROL DE LA EXPLORACIÓN	603
15.3	ESFUERZO DE EXPLORACIÓN Y DESCUBRIMIENTO DE RECURSOS	608
15.4	EXPLOTACIÓN Y EXPLORACIÓN ÓPTIMA DETERMINÍSTICA	619
15.5	PROBLEMAS RESUELTOS	644
CAPÍTULO 16: INTRODUCCIÓN A LAS OPCIONES REALES		654
16.1	INTRODUCCIÓN	654

16.2	OPCIONES REALES EN MINERÍA	666
16.3	OPORTUNIDAD Y <i>TIMING</i> DE INVERSIÓN	678
16.4	UN PROBLEMA CLÁSICO EN LA MINERÍA: BRENNAN Y SCHWARTZ (1985)	704
16.5	INVERSIÓN SECUENCIAL	731
16.6	OPCIONES DE INTERÉS PARA FUTURAS INVESTIGACIONES	756
BIBLIOGRAFÍA		818

Notación

Este libro ha sido escrito utilizando las reglas de ortografía de la RAE 2010.

Todas las variables presentadas en el libro, sean temporales o espaciales, se encuentran definidas en espacio continuo. En casos excepcionales se desarrollan estas variables en tiempo y/o espacio discreto, pero cuando este es el caso se especifica para no generar confusión. El tiempo se expresa por t e implícitamente, a menos que se indique otra cosa, el tiempo inicial viene dado por $t_0 = 0$. En cuanto al espacio N -dimensional, este se denota de acuerdo con R^N . Un punto en el espacio físico se describe por el vector $\mathbf{x} = (x, y, z) \in R^3$. Nótese que en este caso x con negrillas se reserva para variables vectoriales mientras que x sin negrillas describe una variable escalar.

Las funciones continuas se denotan por C^0 , mientras que las funciones diferenciables por C^1 . De forma análoga las funciones α -ésima diferenciables se denotan por C^α . En cuanto a las derivadas totales de la función $x(t)$ estas son referidas de forma indistinta como $x'(t)$, $\dot{x}(t)$ o $\frac{dx(t)}{dt}$. La selección de una u otra forma se adapta de acuerdo a cada capítulo o sección, no existiendo necesariamente una guía estricta en el uso de una u otra forma específica. Para el caso en que la función $x(t)$ se presenta en tiempo discreto la diferencia de la variable por $\Delta x = x_{t+1} - x_t$. Los diferenciales (sobre funciones continuas) a su vez se denotan por dx en el caso de aquellos determinísticos y por dz para los estocásticos (diferenciales de Wiener).

La derivada parcial de una función $f(x, y)$ con respecto a x se expresa indistintamente por $\frac{\partial f}{\partial x}$ o f_x , aunque esta última forma (más moderna) es en general preferida por sobre la primera. Según esta última notación la segunda derivada parcial con respecto a x corresponde a f_{xx} (que en notación clásica corresponde a $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$).

Debido a que el tópico fundamental del libro corresponde a la optimización dinámica, y por tanto el interés en general consiste en encontrar variables que son funciones del tiempo, muchas veces se omitirá la dependencia temporal con el único objeto de hacer menos engorroso el álgebra o la presentación. Así, variables como $q(t)$ o $S(t)$, de uso extensivo en el libro, serán

muchas veces simplificadas y escritas simplemente como q o S , respectivamente. En algunos casos excepcionales se utilizará la notación q_t o S_t , pero en general esta es una notación menos extensiva. La justificación para mantener en algunos casos esta última notación se refiere a que todavía es de uso frecuente en la literatura.

El autor es consciente de que el entendimiento del lector aumenta en la medida que exista consistencia en la selección del nombre y notación de las variables usadas una y otra vez obra lo largo de las páginas del libro. En general esta ha sido la predisposición al escribir, muchas veces llegando incluso a modificar la notación original de los artículos o libros consultados. Sin embargo, pretender absoluta consistencia en un libro que cuenta con más de 800 páginas y que describe y utiliza decenas de variables no fue siempre posible.

Así, por ejemplo, el libro denota por $E[\cdot]$ y a $Var[\cdot]$ las esperanzas y varianzas matemáticas de una variable aleatoria, mientras que \bar{x} describe el promedio o media aritmética de una variable (esto es $\bar{x} = \sum_{i=1}^N x_i$). A menos que se haya cometido un error tipográfico (que en una obra de este tamaño no puede descartarse *a priori*) el uso de esta notación debiese siempre mantenerse.

A su vez, el libro presenta una serie de variables económicas y financieras de uso extensivo en la literatura académica y la industria minera. En este sentido se ha tratado de mantener consistencia a lo largo de las páginas para denotar el precio del *commodity* a extraer (P), los costos de producción (C), los costos marginales de producción (C_q o C'), la utilidad instantánea (π) y la tasa de descuento (r). En el caso del funcional de mayor relevancia para esta obra, el Valor Actual Neto, este se puede denotar por sus siglas en castellano (VAN) o cuando la exposición es puramente matemática por J o V (este último caso en general se limita al Capítulo 16 debido a que esta es la notación preferida en el caso de la teoría de las opciones reales).

Las unidades de medida en general no juegan un rol de relevancia en la exposición (no así en la práctica de la explotación de minas) debido a que el tratamiento es generalmente algebraico. Sin embargo, cuando se ha requerido, para mejorar la exposición o plantear algunos problemas aplicados, se utiliza el Sistema Internacional de Unidades de Medida (SI).

Algunas letras mayúsculas se han intentado reservar (como los casos antes mencionados J y V) para variables de uso frecuente. Tal es el caso de H para denotar Hamiltoniano, L para

Lagrangiano, S para reservas remanentes y T para la vida de la mina (*life of mine* o LOM). En el caso de las letras minúsculas el libro mantiene q para referirse a la producción de la mina.

Finalmente, algunas letras para denotar variables de interés se han tomado prestadas de otros alfabetos distintos al latino. Tal es el caso de τ para los impuestos, Ω para el volumen excavado y de \mathfrak{p} para el *timing* óptimo de inversión. Esta última letra (*thorn*, del alfabeto inglés antiguo) es primera vez que se utiliza según el conocimiento del autor para referirse a esta variable, y su uso se justifica debido a que tanto t , T como τ se encontraban todas ya usadas para expresar otras variables.

Parte I

Introducción

Capítulo 1: Conceptos básicos

En este capítulo se describen los conceptos básicos que se deben considerar con objeto de estudiar los fundamentos de la economía minera. En particular, se sitúa a esta disciplina como parte de la economía de los recursos naturales, donde se encuentra relacionada con la economía de minerales (aunque el objeto de estudio no es idéntico), esta última más tradicional y reconocida. Se describen las principales diferencias entre ambas disciplinas, para luego reforzar la cadena de valor del proceso minero, introducir la terminología principal de las áreas afines, así como detallar la importancia de la heterogeneidad y distribución espacial de los *commodities* minerales en los yacimientos y su rol en el estudio de la economía minera.

1.1 Economía de los recursos naturales

La economía se divide en tres áreas principales, a saber: Microeconomía, Macroeconomía y Econometría.

La economía de los recursos naturales es una de las disciplinas de la microeconomía (otras por ejemplo son la organización industrial, la economía de la salud o la educación). La microeconomía es la parte de la economía que estudia el comportamiento económico de los agentes económicos individuales, como son los consumidores, las empresas, los trabajadores y los inversores; así como de los mercados en los que estos interactúan. La microeconomía considera las decisiones que toma cada uno para cumplir ciertos objetivos propios, como pudiera ser la maximización de la satisfacción personal en el caso de las personas o de las utilidades o valor presente neto en el caso de las empresas.

La economía de los recursos naturales corresponde al estudio de cómo la sociedad asigna los recursos naturales escasos tales como reservas pesqueras, plantaciones de árboles, agua dulce, minerales, entre otros.¹ Dentro de los recursos naturales se pueden considerar los siguientes:

- Minerales.
- Forestales.
- Tierra.
- Plantas.
- Animales terrestres.
- Peces.
- Agua.
- Servicios meteorológicos.

Evidentemente, la tendencia es a pensar en que los recursos anteriores son todos de distinta naturaleza, y en este punto sería crítico tener una forma de clasificarlos. Para tal fin se presenta en la subsección siguiente la ecuación fundamental de los recursos naturales.

1.1.1 Ecuación fundamental de los recursos naturales

Sea S_t la cantidad de reservas de un recurso natural disponible para su explotación en el instante t . Sin pérdida de generalidad se asumirá en un principio que el tiempo es discreto, y para efectos de la derivación de la ecuación se asumirá la existencia de dos periodos distintos: 0 y 1. Durante el periodo 0, se explota una cantidad Q_0 del recurso y en dicho periodo se suma al reservorio inicial una cantidad ΔS . De aquí, la relación fundamental entre dichas variables, que se puede llamar “ecuación fundamental de los recursos naturales”, viene dada por:

$$S_1 = S_0 - Q_0 + \Delta S \quad (1.1)$$

¹ Debe distinguirse este concepto del de economía ambiental, cuyo objeto de estudio es la forma en que son dispuestos los residuos o desechos de la sociedad, y la calidad resultante del agua, el aire y el suelo como receptores de dichos desechos. La economía ambiental también se encarga del estudio de la conservación de los ambientes naturales y la biodiversidad. Para una introducción a la economía ambiental el lector puede consultar Field y Field (2016).

La ecuación anterior no solo relaciona en el tiempo al *stock* o reserva (S) de un recurso natural con su flujo (Q), sino que el término ΔS entrega en sí mismo una forma simple de clasificación. De hecho, dependiendo del signo de este término se podrán clasificar los recursos en renovables ($\Delta S > 0$), no-renovables ($\Delta S = 0$) y perecibles ($\Delta S < 0$).

Los recursos renovables son aquellos en los que el recurso se va reponiendo en el tiempo. De esta forma las cantidades en el reservorio del recurso están afectas al proceso de reposición propio. En el caso de los recursos biológicos (flora y fauna) el proceso de reposición guarda relación con la reproducción de dichos recursos.

Los recursos no-renovables son aquellos en los que el recurso no se repone (al menos no en una escala de tiempo humana). Los minerales son un buen ejemplo, pues el proceso de formación de los yacimientos en la Tierra, o de los elementos químicos en el espacio, ocurren a escalas que para todos los efectos distan de ser relevantes para la especie humana. De hecho, los procesos de formación de depósitos minerales en la tierra pueden tomar millones de años, mientras que la especie humana (*homo sapiens*) apenas ha existido no más de 300.000 años (Stringer y Galway-Witham, 2017).

Por su parte, los recursos perecibles son aquellos en los que el solo paso del tiempo va destruyendo parte o todas las reservas. Un ejemplo de esto son los glaciares, los que por efecto del calentamiento global están derritiéndose en muchos casos. Incluso antes de considerar una explotación (o afectación) artificial, muchos glaciares están destinados a desaparecer.

En línea con los conceptos anteriores, es relevante mencionar el concepto de “agotabilidad”. Se dice que un recurso es agotable cuando sus reservas pueden reducirse a cero y no volver a generarse más. Si bien existe la tendencia en pensar en los recursos no-renovables y perecibles como agotables, una simple revisión de la ecuación (1.1) basta para determinar que la agotabilidad no requiere que $\Delta S \leq 0$. Más bien, en una economía compuesta solo de dos periodos se requiere para garantizar agotabilidad únicamente que:

$$S_0 - Q_0 + \Delta S = 0 \quad (1.2)$$

La ecuación (1.2) permite entrever que para que un recurso natural sea agotable la tasa de extracción debe ser igual o mayor a las reservas iniciales más la tasa de reposición del recurso. De esta forma, aunque es trivial mostrar que tanto los recursos no-renovables como perecibles deben ser agotables, lo cierto es que los recursos renovables pueden también caer en esta

categoría. De hecho, la historia de la Tierra está llena de casos de extinciones de especies animales y vegetales. Algunas de estas extinciones se deben a razones naturales, pero sin duda el hombre en su explotación a veces desmedida ha acabado con un sin número de especies (Ceballos *et al.*, 2015).

La agotabilidad es en sí misma uno de los conceptos fundamentales en la economía minera, pues la empresa minera debe lidiar constantemente con el que el depósito o la calidad del recurso que explota se vaya agotando (y nunca más se recupere).

Otro concepto clave es el de “reciclabilidad”. Ciertos recursos no-renovables son reciclables. Es decir, una vez que han sido extraídos y utilizados para un uso final, al alcanzar su ciclo de vida pueden volver a ser utilizados pese a que ahora ya no necesitan volver a extraerse. Este es, por ejemplo, el caso de muchos metales, tales como el cobre o el hierro, pero también de otros no-metales como las gemas preciosas. Algunos *commodities* minerales no son, sin embargo, reciclables. Esto ocurre pues una vez extraídos son finalmente “consumidos”. Un ejemplo de *commodities* minerales que se “consumen” son el petróleo, carbón o uranio utilizado en la generación de energía, así como también del cloruro de potasio utilizado en fertilizantes.

La ecuación fundamental de los recursos naturales debe ser ajustada para dar cuenta de un recurso que posee un cierto nivel de reciclabilidad. De esta forma, si $0 < \alpha < 1$ es el nivel de reciclabilidad, es decir, la fracción del recurso extraído en $t = 0$ que es reciclado en $t = 1$, entonces se tendrá que:

$$S_1 = S_0 - Q_0 + \alpha Q_0 \quad (1.3)$$

Nótese, sin embargo, que el término α no es propiamente tal una tasa de reposición. De hecho, la cantidad de reservas en cualquier instante de tiempo no puede ser mayor a las reservas iniciales existentes del recurso.

Toda la exposición anterior depende de que el tiempo sea discreto. Pero, ¿cómo cambiarían las ecuaciones si ahora el tiempo es continuo?

En un tiempo t cualquiera se debe cumplir que el cambio diferencial en las reservas (\dot{S}_t) sean idéntico a lo que sale o entra en el sistema, lo que se ve gráficamente en la Figura 1.1.²

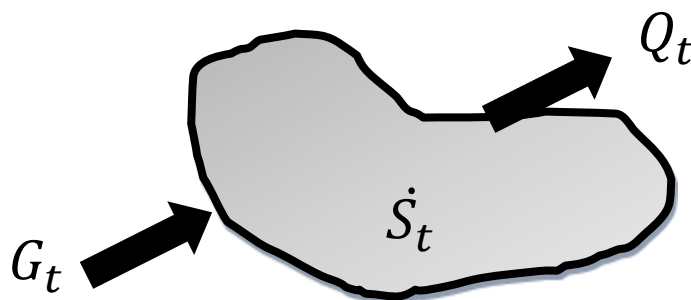


Figura 1.1. Representación gráfica del cambio de las reservas en tiempo continuo

La Figura 1.1 considera que el recurso posee una tasa de reposición o generación G_t , que incrementa las reservas en cada instante de tiempo, mientras que se realiza de forma simultánea una extracción de Q_t unidades del recurso. De aquí, la ecuación fundamental de los recursos naturales en tiempo continuo vendrá dada por:

$$\dot{S}_t = -Q_t + G_t \quad (1.4)$$

Nótese que en la ecuación anterior el subíndice t representa el que la variable es función del tiempo, pudiéndose escribir de forma alternativa Q_t o $Q(t)$.³ La ecuación (1.4) en general representa una ecuación diferencial para S_t o $S(t)$, cuya solución viene dada por:

$$S(t) = \int_{t_0}^t [-Q(s) + G(s)] ds \quad (1.5)$$

En donde t_0 corresponde al tiempo inicial.

Un ejemplo de ecuación diferencial como la (1.4) viene dada por la ecuación logística, la que expresa la relación entre el cambio de una población animal (por ejemplo, de peces) respecto a una constante de crecimiento interno (r) y a una constante de capacidad máxima poblacional (K). Esta ecuación, presentada en 1838 por Verhulst (Verhulst, 1838), es:

²En sistemas dinámicos como el que describen las reservas remanentes es común utilizar la notación de Newton para derivada (esto es, \dot{S}) en lugar de la notación $\frac{dS}{dt}$. En este libro se utilizarán ambas indistintamente.

³En este último caso la ecuación (1.4) se escribiría $\dot{S}(t) = -Q(t) + G(t)$.

$$\frac{dS}{dt} = r \left(1 - \frac{S}{K}\right) S \quad (1.6)$$

En la ecuación (1.6) la tasa de generación viene dada precisamente por el término $r \left(1 - \frac{S}{K}\right) S$ (mientras que la tasa de extracción es nula, es decir nada se extrae de la población en un instante de tiempo dado), y en la actualidad es una de las formas funcionales preferidas para dar cuenta de la generación en sistemas biológicos. Como es de esperar, esta función tiene importantes aplicaciones en la economía de los recursos naturales, en particular a aquellos del tipo biológico.

Integrando la ecuación (1.6) según (1.5) se obtiene la solución dada por:

$$S(t) = \frac{KS_0 e^{rt}}{K + S_0(e^{rt} - 1)} \quad (1.7)$$

De la fórmula anterior queda claro que sin fuerzas externas asociadas a una extracción, la población tenderá a su nivel máximo potencial K . Sin embargo, bastaría que la tasa de extracción sea lo suficientemente alta y el recurso se volverá agotable. Esto pues si la población llega a caer a 0, nunca más podrá regenerarse debido a que $S(t) = 0$ para todo t siempre que $S_0 = 0$.

1.1.2 Propósito de la economía de los recursos naturales

Como se detalla en Field (2008), la economía de los recursos naturales tiene por propósitos fundamentalmente los siguientes cuatro:

- Conservación.
- Tasa de explotación óptima.
- Derechos de propiedad.
- Distribución de rentas.

La conservación da cuenta de la posibilidad de mantener una cantidad suficiente de reservas para el uso de las generaciones futuras, considerando que el valor mismo de las reservas es positivo *per se*. La disciplina de la economía que trata en detalle con esta problemática es la economía ecológica.

La tasa de explotación óptima de los recursos naturales es en sí misma un área de la optimización estática y/o dinámica, y que da cuenta de la determinación de las políticas óptimas (desde el punto de vista privado y/o social) de los recursos naturales. Ejemplos clásicos en este sentido son el de determinar la tasa de explotación óptima de un mineral en una mina o de una cosecha en el caso de una plantación vegetal.

El estudio de los derechos de propiedad es significativo cuando las reservas del recurso no son completamente apropiables desde el punto de vista de los derechos privados. Un ejemplo de esto es un banco de peces en altamar, puesto que no existe necesariamente un dueño del recurso y más bien el derecho pertenece a aquel que lo explote primero. El problema de los derechos de propiedad es particularmente importante en el caso de los recursos que pueden ser considerados bienes públicos pero cuya explotación es privada, lo que se describe magistralmente en Hardin (1968) y se conoce como el “problema de los comunes” o la “tragedia de los comunes” (este último es el término original introducido por Hardin).

Finalmente, los recursos naturales suelen formar parte integral del capital natural de los países. Es por esto que muchas veces se gravan tributos especiales o *royalties* con objeto de distribuir en la sociedad las rentas que una explotación de dichos recursos pudiera conllevar.

El presente libro se limita a estudiar los recursos minerales desde la segunda de estas perspectivas, pero como se verá en las Partes III y IV, la tasa óptima de explotación conlleva un conjunto más rico de problemas y en el caso de la minería (a diferencias de otros recursos naturales) su estudio debe realizarse con un marco científico propio basado en las geo-ciencias (geología, geotecnia, geometalurgia, etc.) e ingeniería de minas.

1.2 Economía minera

En el presente curso se hará uso del término “economía minera” para dar cuenta de la disciplina que mezcla la economía de los recursos naturales en cuanto a lo que corresponde a la determinación de la tasa óptima de explotación de una operación minera, con la ingeniería de minas y geociencias. Esta fusión, aunque conceptualmente reconocida en la literatura, no cuenta con una aceptación como disciplina en sí misma y desde este punto de vista este libro plantea la necesidad y pertinencia de empezar a trabajar esta disciplina de forma independiente.

En la actualidad, la determinación de la tasa óptima de explotación de minas suele trabajarse en dos disciplinas distintas y de casi nula comunicación entre sí: la economía de minerales y la planificación minera.

Mientras la economía de minerales entrega un contexto general al problema, con objeto de alcanzar ecuaciones e intuiciones simples se suele eliminar la mayor parte de las problemáticas reales de la explotación de yacimientos minerales, de tal forma que muchos de los resultados dejan de ser válidos en el mundo real o sencillamente no es evidente cómo extrapolarlos al mundo real. Para una revisión en detalle de las políticas asociadas a la explotación de los recursos minerales en un contexto puramente de la economía de minerales, el lector puede consultar Tilton y Guzmán (2016).

En cuanto a la planificación minera, esta es una disciplina de la ingeniería de minas, pero que cuenta con un escaso reconocimiento académico pues la forma en la que ataca los problemas es (contraria a la economía y en particular a la economía de minerales) desde una base muy particular. Es decir, esta disciplina busca encontrar el plan minero de cada operación más que establecer una teoría robusta o serie de reglas operacionales respecto a la óptima explotación de los recursos.⁴

De hecho, este curso busca aportar a la discusión académica en el sentido de que, pese a que se podrían estudiar muchas de las problemáticas presentadas recurriendo solo a la economía de minerales, lo cierto es que esta última no cuenta con las herramientas de geociencias e ingeniería aplicadas a una operación minera y que son necesarias para resolver el problema planteado.

RECUADRO 1.1

LA ECONOMÍA DE MINERALES COMO DISCIPLINA ECONÓMICA

⁴ Existen, sin embargo, teorías, conceptos y reglas utilizadas por la planificación minera, pero salvo raras excepciones son en general de escaso soporte matemático y teórico.

La economía de minerales es una disciplina interdisciplinaria que involucra el estudio de la economía de los mercados de minerales, así como las industrias en los que operan, además de la forma en la que las firmas y actores se comportan y operan en dichos mercados.

La economía de minerales cubre en su sentido más amplio tres clases de *commodities*: energéticos, metales y no-metales. Los minerales energéticos son el carbón, petróleo, gas natural y uranio. Desde el punto de vista de la literatura académica estos son sin duda los *commodities* más estudiados. Por su parte, los metales cubren un amplio espectro de *commodities* (metales base, preciosos, livianos, etc.), al igual que aplicaciones. Los no-metálicos se encuentran bastante menos estudiados, pese a ser de extremada relevancia para el ser humano moderno, pues sus usos consideran no solo joyería (gemas), sino que también fertilizantes, abrasivos y otros productos necesarios para el desarrollo de la industria.

Para una introducción relativamente exhaustiva de la economía de minerales, con un foco en los mercados de *commodities* metálicos y no-metálicos, el lector puede referirse a Tilton y Guzmán (2016). Para el caso de los *commodities* energéticos, se puede consultar Dahl (2014).

1.3 Geología y tipos de minerales

A diferencia de gran parte de los sectores productivos, la minería es única en el sentido de que su insumo básico – los minerales – se desarrollan de forma exógena a la voluntad o esfuerzo del hombre, en una escala temporal geológica que se extiende mucho más allá que la humana. Así, por ejemplo, Meyer (1985) muestra que mientras las formaciones de depósitos pórfidos de cobre es reciente en escala geológica (< 500 millones de años) la formación de depósitos estratificados de hierro se produjo entre 3.000 y 2.000 millones de años atrás. Esto explica por ejemplo por qué la cordillera de los Andes (que es relativamente joven en escala geológica) es rica en pórfidos de cobre, mientras que gran parte del hierro estratificado se encuentra en formaciones litológicas más antiguas en Brasil o en el oeste de Australia.

Meyer (1985) también discute como la distribución de la formación de depósitos de cromo, níquel, cobre y zinc muestran una gran variabilidad en cuanto a sus tiempos de formación, mientras que los depósitos de hierro, titanio, uranio, oro, plata, molibdeno, tungsteno y estaño son más restringidos. En cuanto a su distribución geográfica, los depósitos minerales de cobre,

oro o plomo en general poseen una amplia distribución, mientras que otros minerales como el niobio, tungsteno o tierras raras se encuentran más restringidos.

Clave para el entendimiento de los mercados de minerales es la formación y distribución de los depósitos de minerales en el mundo. Dicho entendimiento es tarea fundamental de los geólogos, los que en distintas disciplinas y especialidades son capaces no solo de entender el proceso de formación de un depósito, sino que también son capaces de determinar la cantidad y calidad de un mineral y los elementos que lo componen. La especialidad que contiene las técnicas, metodologías y estudios relevantes para el entendimiento de los depósitos minerales es la geología económica (Evans, 1997; Pohl, 2011; Arndt y Ganino, 2012).

A diferencia de otros recursos naturales (tales como los bosques o el agua), la disposición y tamaño de los depósitos minerales no son conocidos *a priori*. De hecho, se requiere de un proceso de exploración intensivo en tiempo y recursos para identificar, delinear y cuantificar los recursos de un depósito mineral. No es de extrañar entonces que la exploración geológica, que se encarga precisamente de todo esto, sea una de las actividades principales de la industria minera, al punto que prácticamente todas las firmas de la industria llevan a cabo algún nivel de exploración con objeto de descubrir, aumentar o mejorar su base de recursos.

El primer aspecto fundamental de la exploración geológica en búsqueda de depósitos minerales se refiere al lugar donde realizar esta. No solo este debe contar con un potencial geológico adecuado, de acuerdo al *commodity* de interés, sino que también el país receptor de la exploración debe contar con una legislación apropiada para que aquellos que realizan la exploración (altamente riesgosa por lo demás), en caso de tener éxito en el descubrimiento de recursos, sean capaces de usufructuar de la riqueza que genere una mina a partir de dichos depósitos. Aunque la mayor parte de los países poseen legislaciones en este sentido, muchas veces en la práctica la exploración no es posible pues o bien no se cuenta con la posibilidad de adquirir licencias de exploración y/o explotación, o aun cuando esto último sea factible la inestabilidad de las instituciones en el país hacen pensar que no será posible la apropiación de una parte suficiente de la riqueza que se genere. En algunas zonas geográficas incluso existe prohibición de explorar debido a acuerdo internacionales, como por ejemplo en el caso de la Antártida, la cual se encuentra protegida para efectos de exploración de recursos minerales hasta que se revise el *Protocol on Environmental Protection to the Antarctic Treaty* en 2048. Otro caso en el cual existe una legislación internacional regulada por el International Seabed Authority es el fondo submarino en aguas internacionales. Aunque *a priori* puede parecer

extraño, lo cierto es que existe una activa exploración por búsqueda de minerales en la corteza oceánica (Marvasti, 2013).

En cuanto a los *commodities* minerales no existe una clasificación estándar de estos, aun cuando se suelen dividir en energéticos, metales y no-metales (ver Recuadro 1.1). Considerando esta clasificación, y en base a la Tabla 1.1 de Tilton y Guzmán (2016), el mercado de los *commodities* minerales en 2014 superó los 1,5 trillones de dólares en ventas, representando alrededor del 2% del PIB mundial en dicho año.

1.4 Cadena de valor en minería

Una vez se han identificados los recursos minerales el siguiente paso es su transformación a un activo económico, proceso que consiste en la determinación del subconjunto de recursos que finalmente se convertirán en reservas. La función de conversión de recursos en reservas, o creación propiamente tal de reservas, se conoce en minería como planificación minera. Esta disciplina se preocupa de determinar la estrategia óptima de explotación que sea factible desde el punto de vista operacional. Esta asignación dinámica tiene tres componentes principales. La primera se refiere a la tasa óptima de extracción. La segunda se conoce como el nivel de consumo de las reservas, y se refiere a la ley de corte óptima o LOM (*life of mine*) de las reservas. La tercera componente se relaciona con la ubicación espacial de la explotación en cada instante de tiempo, lo que se denominará en este libro como “lugar de recuperación”.

El problema de la planificación minera, sin embargo, es solo parcialmente explicado por la agotabilidad de los recursos minerales. Como Carlisle (1954) reconoció en un artículo también seminal (pero a diferencia de Hotelling muy poco citado y expandido en la literatura económica), la naturaleza de la distribución heterogénea de las calidades de mineral en el depósito hace necesario diferenciar la tasa de extracción – generalmente el problema de estudio en la teoría económica de los recursos agotables – del nivel de recuperación. Para Carlisle, este último hace referencia a la proporción del recurso de mineral conocido que es finalmente explotado. Dicho nivel de recuperación puede ser visto simplemente como la fracción de los recursos finalmente convertidos en reservas. Así, el nivel de recuperación está íntimamente ligado a dos conceptos ampliamente utilizados en la industria minera: ley de corte y LOM. El primero es precisamente la ley de mineral que separa los recursos de las reservas. El segundo corresponde al horizonte de tiempo en el que se espera extraer la totalidad de las reservas.

Como reconoce Carlisle, las decisiones de la tasa de extracción y nivel de recuperación se influyen mutuamente, pese a que no hay una relación inherente entre ambas variables. Así por ejemplo, siendo selectivos con aquellos recursos de mayor calidad, es posible alcanzar una alta tasa de extracción, pero generalmente el nivel de la recuperación será bajo. En este sentido una estrategia de alta selectividad de corto plazo, tipo “florear la mina” (*gutting or picking the eyes out* en inglés), conllevará generalmente a un bajo nivel de recuperación de las reservas totales en el largo plazo. Por otro lado, un alto nivel de recuperación de las reservas puede darse si la tasa de extracción permanece constante o incluso declina en el tiempo.

El bajo impacto en la literatura académica que ha tenido el nivel de recuperación de Carlisle comparado con la tasa de extracción de Hotelling puede explicarse por diversas razones. En este sentido al menos dos factores se reconocen en contra de la teoría de Carlisle. El primero se refiere a que al considerar el nivel de recuperación es necesario involucrarse con la heterogeneidad de la calidad del recurso – y desde el punto de vista geológico no existen dos depósitos idénticos. Por lo tanto, se hace difícil desarrollar a nivel conceptual aspectos teóricos sobre algo que probablemente no pueda generalizarse y deba estudiarse en una base de caso a caso. El segundo factor se refiere a que la calidad misma no se encuentra distribuida espacialmente de forma homogénea en el depósito. Esto explica por qué muchas veces no es factible extraer las reservas *à la Ricardo*,⁵ esto es desde la mayor a la menor calidad, o por qué en las reservas se podría considerar mineral de menor calidad que algún otro que finalmente no se considera extraer.

1.5 Heterogeneidad del recurso y su rol en la planificación minera

Con objeto de simplificar la exposición considérese como ejemplo el caso en que la calidad del mineral puede ser representado por una variable escalar única, la que sin pérdida de generalidad podríamos considerar es la ley del mineral. De esta forma, es común pensar en la distribución de leyes en un depósito según una curva de distribución (nótese que esta no representa una variable aleatoria) como la que se muestra en el Figura 1.2. En esta se representa la frecuencia con la que distintas leyes de mineral se obtienen en el depósito.

⁵ El economista inglés David Ricardo (1772-1823) sostenía que los recursos naturales se explotaban en general desde las calidades más altas a las más bajas. Para mayor información consúltese Tilton (2003).

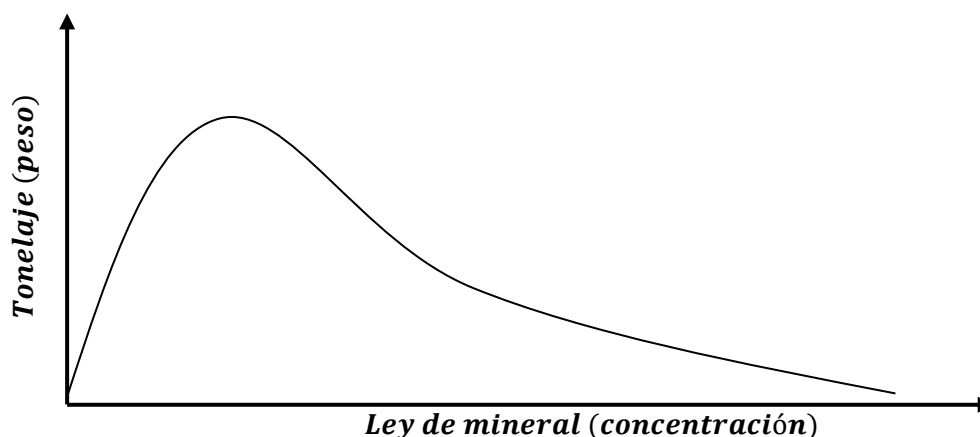


Figura 1.2. Distribución de la ley de mineral en un depósito

La Figura 1.3 muestra la curva tonelaje-ley de un depósito monoproducto,⁶ la que representa la heterogeneidad del mineral en términos de su ley. Típicamente dos curvas se utilizan en este diagrama. La primera, decreciente, se refiere a la cantidad de mineral (en unidad de peso) que puede conseguirse sobre una cierta “ley de corte”. La segunda, creciente, ilustra la evolución de la ley media sobre la ley de corte que caracteriza al mineral que satisface esta restricción. Una teoría *à la* Carlisle requeriría la introducción en la problemática de la economía de los recursos agotables de una curva de esta naturaleza.

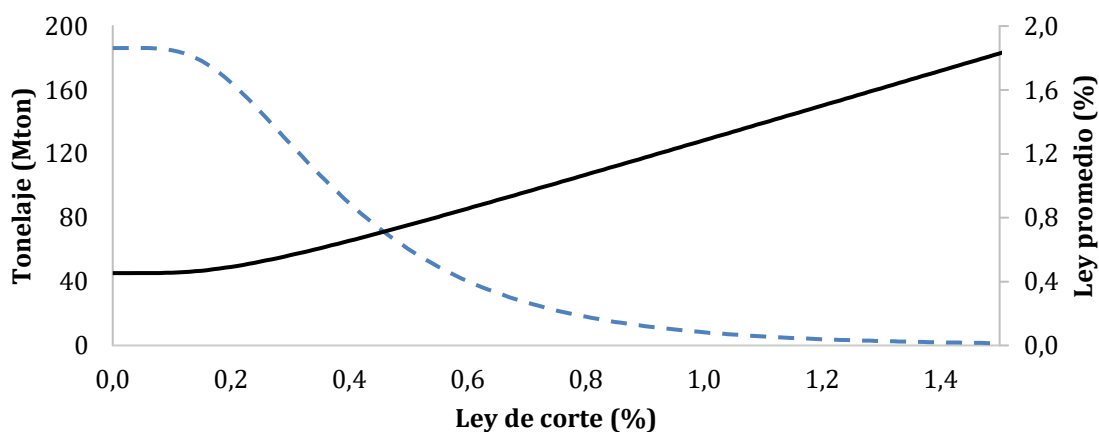


Figura 1.3. Ejemplo de una curva tonelaje-ley para una mina de cobre

⁶ En economía de minerales se conoce al *commodity* monoproducto explotado por una mina como “producto principal”. Cuando dos o más productos deben considerarse en la planificación minera estos se refieren como “co-productos”. Finalmente, cuando de la explotación de uno o más productos se deriva “por arrastre” otro *commodity* este último se conoce como “sub-producto”.

Otra forma de entender la heterogeneidad del recurso se representa en la Figura 1.4, la que muestra una separación dependiendo del nivel de homogeneidad espacial y variabilidad temporal de los yacimientos minerales. Esta clasificación divide los yacimientos en cuatro tipos, a saber:

- I: Uniformes u homogéneos y estacionarios. Estos depósitos corresponden a yacimientos con leyes más o menos constantes en el espacio, y cuya ley puntual en el depósito no varía con el paso del tiempo (ya sea por acciones naturales o propias de la explotación). Ejemplo de este tipo de yacimientos se encuentran en la explotación de la bauxita, el carbón y el hierro.
- II: No-uniformes o heterogéneos y estacionarios. Estos depósitos están caracterizados por tener leyes variables en el espacio, pero con leyes puntuales en el depósito que no varía con el paso del tiempo (ya sea por acciones naturales o propias de la explotación). Ejemplo de este tipo de yacimientos ocurren en el caliche, cobre o platino, particularmente cuando la explotación se realiza a cielo abierto (rajo o canteras).
- III: No-uniformes o heterogéneos y no-estacionarios. Estos depósitos están caracterizados por tener leyes variables en el espacio, con leyes puntuales en las cuales hay una variación con el paso del tiempo (ya sea por acciones naturales o propias de la explotación). Ejemplo de este tipo de yacimientos ocurren en la explotación de salares (donde se extrae litio y potasio) u otros reservorios líquidos o gaseosos (donde se extrae gas natural o petróleo), o en la explotación por medio de *block caving* (pues el hundimiento produce un cambio de posición de las leyes puntuales en el tiempo).
- IV: Uniformes u homogéneos y no-estacionarios. Estos depósitos están caracterizados por tener leyes constantes en el espacio, con leyes puntuales en las cuales hay una variación con el paso del tiempo (ya sea por acciones naturales o propias de la explotación). Al igual que en III, este tipo de yacimientos representan salares u otros reservorios líquidos o gaseosos.

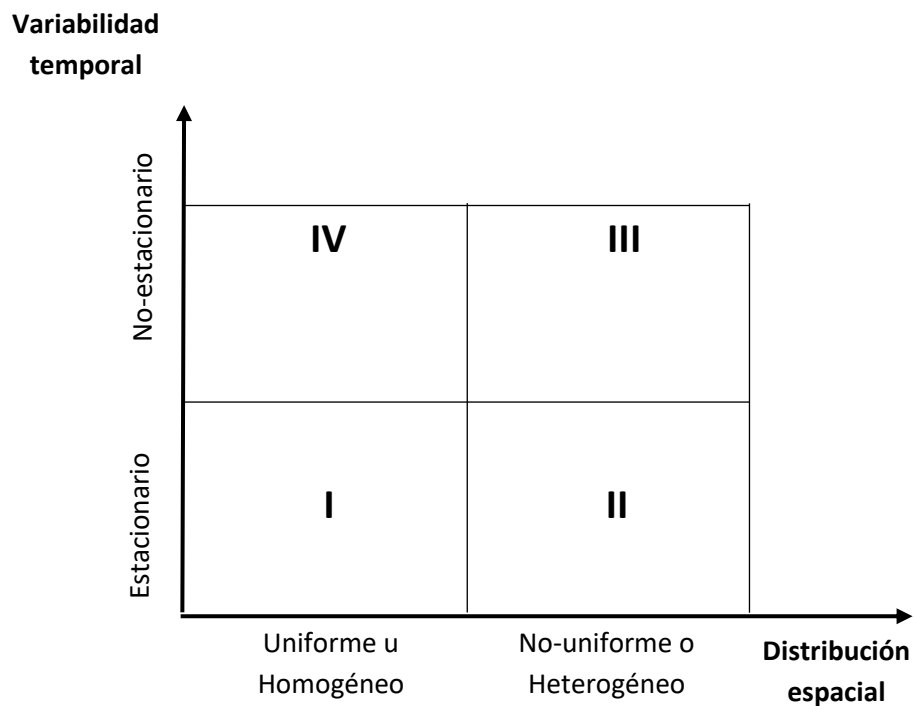


Figura 1.4. Distribución espacial y variabilidad temporal de leyes de mineral

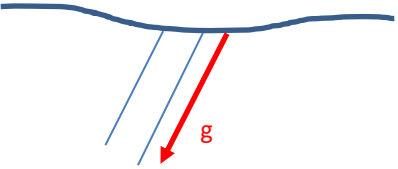

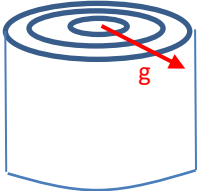
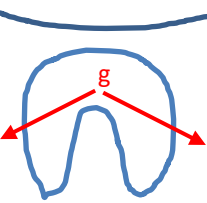
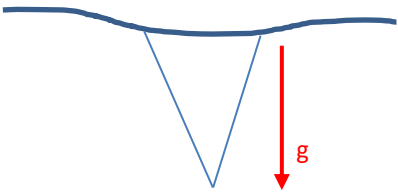
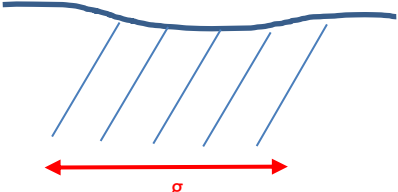
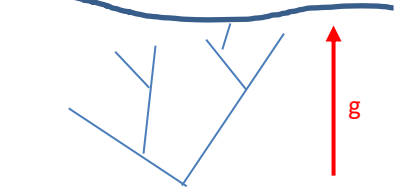
Respecto a la distribución espacial del mineral (yacimientos) en el espacio, la Tabla 1.1 muestra ocho depósitos conceptuales, así como la geometría y dirección de decrecimiento de leyes. En esta tabla también se especifican algunos ejemplos de *commodities* minerales que son explotados desde cada uno de este tipo de yacimientos.

Tabla 1.1. Geometrías típicas de depósitos y dirección de decrecimiento de leyes (g) Fuente: Elaboración propia en base a Dill (2010) y otras fuentes

TIPO DE DEPÓSITO	GEOMETRÍA Y DIRECCIÓN DE DECREMENTO DE LEYES (g)	EJEMPLOS
Estratificado en roca		Bauxita Caliche (yodo ↓ y nitratos ↑) Carbón Hierro Níquel

Tabla 1.1. Geometrías típicas de depósitos y dirección de decrecimiento de leyes (g) (Cont.). Fuente:

Elaboración propia en base a Dill (2010) y otras fuentes

TIPO DE DEPÓSITO	GEOMETRÍA Y DIRECCIÓN DE DECRECIMIENTO DE LEYES (g)	EJEMPLOS
Filón, vena o veta		Cobre Grafito Oro Plata Plomo Zinc
Estratificado en Salar		Litio Potasio
Concéntrico		Berilio Cromo PGM (metales del grupo del platino)
Pórfido		Cobre Molibdeno Oro (subproducto) Plata (subproducto)
Pipa		Diamantes
Por capas		Cobalto
Árbol		Mercurio

Aunque Carlisle (1954) permanece en un terreno conceptual, la idea de introducir la tasa de recuperación de las reservas (que nace precisamente de la heterogeneidad del yacimiento) ha tenido bastante repercusión en minería, siendo pionero en este sentido el trabajo de Kenneth Lane (1964).⁷ Aun cuando Lane deriva endógenamente un nivel de recuperación del recurso, lo cierto es que solo incorpora la curva tonelaje-ley de forma homogénea en el espacio, no preocupándose de la forma en la que se realizará la explotación a lo largo de dicha curva. Implícitamente entonces, Lane supone la existencia de todos los recursos “a la vista” (es decir, disponibles para su extracción), contradiciendo esencialmente la naturaleza del problema minero.

La inclusión de una curva tonelaje-ley para la modelación económica de la explotación de un recurso agotable presenta dos problemas principales. El primero es que cada depósito tiene una curva tonelaje-ley única e irrepetible, y aunque las curvas pueden en ciertos depósitos responder a una misma forma funcional (por ejemplo, en pórfidos de cobre el autor ha podido testear positivamente el uso de una distribución de leyes log-normales),⁸ cualquier función no dejaría de ser percibida como arbitraria, a la vez que aumenta considerablemente la modelación matemática al punto que posiblemente sin el uso de métodos numéricos no es posible derivar resultados útiles (para ser aplicados en su generalidad). El segundo problema radica en que para ser usada en conjunto con una tasa de extracción, la curva tonelaje-ley debe ser acompañada de una regla exógena de explotación a lo largo de la curva. Aunque se podría optar a una explotación *à la* Ricardo, esto es, desde las más altas leyes a las leyes de menor calidad, lo cierto es que esta regla o alguna otra no es completamente realista. Cualquier regla realista debiera considerar además la distribución espacial de la calidad y el método de explotación de la operación.

Como se ilustra en la Figura 1.5, la significativa dispersión de las leyes en un depósito, sumado al método de explotación del mismo, hacen imposible en la práctica satisfacer la regla de minar desde la mayor a la menor ley durante la vida de la operación.

⁷ En el Capítulo 5 se desarrolla la teoría de Lane en base a la programación dinámica.

⁸ En Rossi y Deutsch (2014) se argumenta que en muchos depósitos la distribución de leyes de los elementos de interés es lognormal.

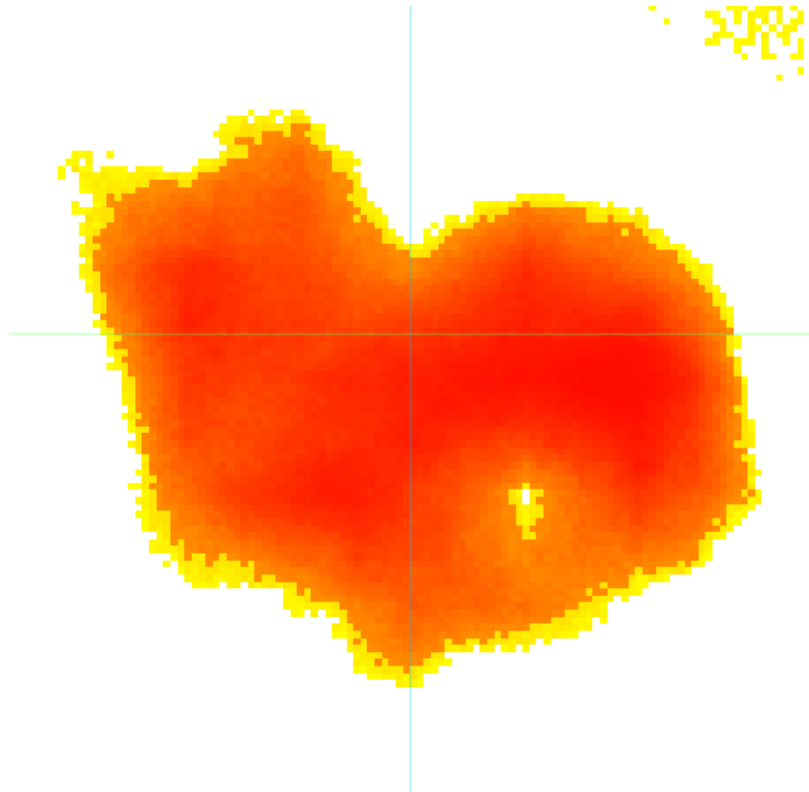


Figura 1.5. Ejemplo de distribución espacial de leyes de mineral (planta)

Al igual que Carlisle, Lane en ningún caso se ocupa de la distribución espacial de leyes del recurso. Aunque posteriores a Lane se han desarrollado algunos trabajos de corte económico y conceptual en que se mezcla el tema de la agotabilidad con la heterogeneidad espacial del recurso, en todos los casos se asume una fuerte simetría espacial. Esto permite tratar el problema de la heterogeneidad espacial *à la* Carlisle. En esta línea se encuentran algunos artículos en los cuales se mezcla la teoría de los recursos agotables con la búsqueda de la ley de corte óptima de explotación, tales como Krautkraemer (1988) y Shinkuma y Nishiyama (2001).

Lo cierto es que no existe una teoría general para la problemática de la heterogeneidad espacial, así como se encuentra desarrollada la teoría económica de los recursos agotables. Es decir, no existe nada en la literatura como la “regla de Hotelling” que aplique a un yacimiento con calidades distribuidas heterogéneamente en el espacio. En el Capítulo 9 se derivan por primera vez, según el conocimiento del autor al menos, algunas reglas en este sentido.

Como innovación que debiese permitir ampliar la definición de Carlisle para incorporar la heterogeneidad del recurso se propone la introducción del término “lugar de recuperación”. Aunque íntimamente ligado a la tasa de recuperación de Carlisle, este último factor es más

general y da cuenta de la posición en la que se realizará la extracción, así como el destino que tendrá dicha unidad (botadero, planta, stock).

Que no exista una teoría general no impide, sin embargo, que se puedan desarrollar casos particulares. De hecho, la determinación de la asignación dinámica óptima es un problema que se resuelve en prácticamente todas las minas. De hecho, las bases de la planificación minera se encuentran hoy día arraigadas netamente en el ámbito de la ingeniería y no de la economía, por considerarse este un problema básicamente de optimización matemática y cuya solución solo puede ser encontrada en casos particulares (esto es, mina a mina).

Desde el punto de vista de la economía el problema de encontrar el plan minero o secuencia de extracción óptima pasa por reconocer no solo el método de explotación (cielo abierto, subterráneo, aluvial, marino, etc.) sino que también las tecnologías de procesamiento (concentración, lixiviación, etc.) y cualquier restricción técnico-operativa-financiera que pueda tener la operación. Una vez se han seleccionado estos se debe identificar una función objetivo. Pensando en el problema de largo plazo (que es donde se definen precisamente las reservas) típicamente la función objetivo se refiere al valor del negocio, pudiendo representarse esta por el VAN (valor actual neto). No obstante, no es poco frecuente encontrarse en ciertas firmas e industrias de minerales con funciones objetivos distintas al momento de realizar la planificación minera. En la experiencia del autor algunos objetivos buscados por las empresas al momento de diseñar sus estrategias de explotación de sus recursos son cumplimiento de cuotas de producción, minimización de costos, llenado de capacidad de planta o ley promedio del *commodity* alimentado a planta. Conocer la función objetivo de las firmas que conforman una industria es clave para entender la formación de la oferta en este mercado, y por tanto es un aspecto que pudiendo parecer trivial merece la máxima atención.

Con la función objetivo definida y un conjunto de restricciones técnico-operativas-financieras, solo restan la determinación de un conjunto de parámetros para poder plantear el problema como uno de optimización matemática. Aun cuando se pueda plantear correctamente el problema, la complejidad y tamaño del mismo hace en la práctica imposible contar con una solución matemáticamente óptima. De hecho, se ha demostrado matemáticamente que el problema de determinar la estrategia de extracción óptima en minería es uno de complejidad del tipo NP-Hard (Gleixner, 2008). Un problema se dice tiene complejidad del tipo NP-Hard cuando chequear la solución correcta no es posible de realizar en un tiempo finito. Esto plantea un paradigma, pues mientras la planificación minera es por construcción la función que busca

encontrar la estrategia óptima, en la práctica no es posible chequear la optimalidad de la solución. La forma de enfrentar en la práctica este paradigma es bien conocido en la industria y básicamente consiste en buscar un conjunto acotado de soluciones factibles al problema y testear cuál de ellas permite optimizar de mejor forma la función objetivo, a la vez que cumple todas las restricciones impuestas.

La complejidad del problema de planificación minera permite asegurar que las firmas mineras no son estrictamente racionales en el sentido neoclásico de la economía (i.e., no son maximizadores de utilidad). Más bien, el criterio bajo el cual se aceptan los planes mineros es uno de suficiencia. Este concuerda con la idea del Premio Nobel de Economía Herbert Simon respecto a que las firmas en lugar de optimizar buscan “satisfacer” (*satisficing* en inglés), en el sentido que quien toma decisiones es uno que busca una solución satisfactoria más que una solución óptima (Simon, 1956). Pese a que en la práctica, y luego de mucho esfuerzo, la solución a la que se llega podría estar cercana al óptimo matemático (distintos analistas consideran que la diferencia actual de los mejores procesos podrían diferir en un rango no superior al 10% del valor en la función objetivo si se considerara la solución óptima), la imposibilidad de maximizar el VAN o cualquiera sea la función objetivo que la firma posea obliga a repensar a la firma minera como un ente no completamente racional (en el estricto sentido económico), al menos en lo que respecta a la escala en la que se toman decisiones. Y esto incluso asumiendo que la única fuente de “irracionalidad económica” es la complejidad del problema matemático.

Luego de que se define la estrategia para desarrollar los recursos y transformarlos en reservas, el siguiente paso que sigue en la etapa de creación de valor en minería es la de invertir en aquellos activos necesarios para la explotación de dichos recursos. La inversión en minería es típicamente intensiva en capital, mano de obra y altamente específica a la ubicación y características del depósito mineral a explotar.

Una vez identificado un depósito, medido sus recursos, estimada sus reservas e invertido en el desarrollo de la operación para llevar a cabo la explotación del mismo el paso culmine es el de la explotación de las reservas. Este será precisamente el tema a desarrollar en este libro.

1.6 Problemas resueltos

Problema 1.1

Escondida, cuyo depósito es un pórfido de cobre, posee recursos conocidos (sobre una ley de cobre de 0,2%) de 22.788 Mton en 2013 (incluidas las ya reservas extraídas a ese año), con una ley promedio de cobre de 0,59%. Por otro lado, las reservas totales se estiman en 8.182 Mton a una ley promedio de cobre de 0,78% (incluyen reservas extraídas y por extraer). Si las leyes de los pórfidos de cobre distribuyen según una distribución lognormal, estime la ley de corte de las reservas.

Solución

Se tiene los siguientes datos:

ITEM	LEY DE CORTE (%)	LEY MEDIA (%)	TONELAJE(Mton)
Recursos	0,2	0,59	22.788
Reservas	x	0,78	8.182

Además, se sabe que las leyes distribuyen según una distribución lognormal, que se define mediante la siguiente ecuación:

$$f(t) = \frac{e^{-\frac{1}{2} \frac{(\ln(t)-\lambda)^2}{\xi^2}}}{\sqrt{2\pi\xi t}}$$

Y cuyos parámetros ξ y λ , se definen como sigue:

$$\xi = \sqrt{\ln\left(1 + \frac{\sigma^2}{\mu^2}\right)}$$

$$\lambda = \ln(\mu) - \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{\sigma^2}{\mu^2}\right)$$

Donde μ corresponde a la ley media del yacimiento y σ a la desviación estándar. Por otro lado, $f(t)$ es una función densidad de probabilidad, por lo tanto, la integral en su dominio (de 0 a 100%), debe ser 1. En otras palabras:

$$\int_0^{100} f(t) dt = 1$$

Además, el yacimiento posee recursos conocidos sobre una ley de corte 0,2%, y cuya ley media es de 0,59%, lo cual puede ser descrito mediante el centro de masa de la función en el intervalo 0,2% a 100%. Esto se refleja mediante la ecuación:

$$\frac{\int_{0.2}^{100} f(t)tdt}{\int_{0.2}^{100} f(t)dt} = 0,59\%$$

Por último, nos dicen que la ley media de las reservas es de 0,78%, pero se debe encontrar la ley de corte de las reservas. Escrito de otra forma:

$$\frac{\int_x^{100} f(t)tdt}{\int_x^{100} f(t)dt} = 0,78\%$$

Cabe destacar que, con estas tres ecuaciones, y reemplazando $f(t)$ y sus valores correspondientes se tiene un sistema de ecuaciones con incógnitas μ , σ y x . Resolviendo (en este caso utilizando el software matemático MAPLE), se obtiene que:

$$\mu = 0,5479$$

$$x = 0,4266$$

$$\sigma = -0,3783$$

De aquí la ley de corte de las reservas sería aproximadamente $x = 0,43\%$. Nótese que esta ley es relativamente alta cuando se la compara con leyes de corte de minas más marginales, las cuales pueden llegar a 0,2% o 0,3%.

Con ello, reemplazando en las ecuaciones para ξ y λ se obtiene lo siguiente:

$$\xi = 0,6243$$

$$\lambda = -0,7965$$

Una manera de comprobar si los resultados obtenidos son correctos, es calculando el valor esperado de la función en su dominio, y chequear que resulte igual a μ . Es decir, se debe cumplir lo siguiente:

$$\int_0^{100} f(t)tdt = \mu$$

Evaluando dicha integral con los valores anteriormente obtenidos, se comprueba que μ es igual a 0,5479, lo cual se aproxima bastante al valor anteriormente obtenido.

Nota histórica: la derivación de las curvas de tonelaje-ley para un depósito de cobre en base a la información de los recursos y reservas solamente fue propuesta y validada empíricamente (para un conjunto de más de 30 minas) por el autor mientras trabajaba en GEM en 2014.

Capítulo 2: Los problemas de la explotación de minas

En este capítulo se describen los principales problemas de carácter económico que enfrentan las empresas mineras. En particular se analiza cómo las distintas firmas logran maximizar el valor de su negocio en base a distintos objetivos que pudieran tener los dueños o accionistas de las mismas, con especial referencia a la explotación óptima de minas. Se realiza una breve descripción para entender la industria de los *commodities* minerales y la principal variable detrás del cambio de estrategia de extracción: el precio de venta del producto. El problema que debe resolver la empresa minera involucra además una serie de restricciones y consideraciones, pudiendo incluso variar el objetivo a perseguir con la extracción entre las distintas empresas.

2.1 Tipos de Empresas Mineras

Antes de iniciar el estudio de las problemáticas que enfrentan las empresas ligadas a la industria minera, se deben reconocer dos tipos, a saber: *juniors* y *majors*. A continuación, se exponen las principales características de una y otra.

2.1.1 Empresas *junior*

Son aquellas empresas que se dedican fundamentalmente a la exploración, o cuando sumo a la explotación de un único yacimiento. En la gran mayoría de empresas *juniors*, estas se limitan a vender la propiedad minera descubierta sin explotar, para seguir explorando otro yacimiento.

En el caso de aquellas empresas que explotan un yacimiento, no es poco frecuente lo hagan hasta una etapa intermedia de procesamiento y no a un producto considerado final. Así, por ejemplo, muchas empresas *junior* de cobre extraen el mineral y lo envían en forma de concentrado a distintas fundiciones, pero rara vez producen cátodos.

2.1.2 Empresas *major*

Se refieren a aquellas compañías que poseen y explotan múltiples yacimientos minerales, y que concentran su negocio en la explotación minera. Por lo general no se dedican a exploración de nuevos yacimientos, sino que más bien compran las pertenencias mineras a compañías *junior* más pequeñas. Son grandes empresas diversificadas y por lo general también producen dos o más *commodities* minerales. A modo de ejemplo, pertenecen a este grupo empresas como BHP, Río Tinto, Vale, Norilsk Nickel y Anglo American, entre otras.

No obstante, lo anterior, existen empresas *major* con múltiples yacimientos y que se concentran en la extracción de un tipo de *commodity*. Este es el caso por ejemplo de Codelco o Antofagasta Minerals, las que, aun cuando producen como subproductos molibdeno, plata y oro, mantienen como negocio principal la producción de cobre. En otras industrias de minerales es común contar con empresas especializadas, como en el caso del potasio (un ejemplo de empresa *major* en esta industria es PotashCorp) o el aluminio (por ejemplo, representada por Alcoa).

RECUADRO 2.1

BHP: LA EMPRESA DE MINERÍA METÁLICA MÁS GRANDE DEL MUNDO

Fundada en 1885, BHP es una empresa minera de origen australiano que se dedica a la exploración, desarrollo, producción y procesamiento de minerales, gas y petróleo (Macklin y Thompson, 2010).

Hacia abril de 2017 contaba con más de 40 operaciones a nivel global, 65.000 empleados y una valorización de mercado ligeramente menor a los 100 mil millones de dólares, lo que la convierte en la compañía pública productora de minerales (excluyendo petróleo) más grande del mundo (Forbes, 2016). Dentro de los metales que produce se encuentran cobre, oro, plata, molibdeno, zinc, uranio y plomo.

La empresa se organiza desde 2016 en cuatro divisiones principales: Minerals Australia, Minerals Americas, Petróleo y Marketing. La división Minerals Americas, encargada de las operaciones minerales en todo el continente americano, tiene su sede en Santiago de Chile. Dentro de su portafolio se encuentra Escondida, la mina de cobre con mayor producción del planeta, la cual concentra el 7,8% de la producción mundial (al 2015).

Los múltiples desafíos que posee BHP Billiton son un buen ejemplo de lo variado que pueden llegar a ser los problemas que resuelve una empresa en la industria minera, debido a la heterogeneidad de sus proyectos en cuanto a tamaño de producción, tipo de mineral a extraer, contexto sociopolítico y ubicación geográfica.

2.2 Precio de los *Commodities*

Los *commodities* primarios se pueden definir como equivalentes al valor de la producción del sector primario, que comprende la agricultura, ganadería, silvicultura, apicultura, la acuicultura, la caza, la pesca, explotación forestal y la minería. De manera simple corresponde a todos los recursos naturales con poca o ninguna manipulación en su generación.

En los mercados competitivos, los precios de los *commodities* primarios no regulados, y en particular de los *commodities* minerales, son determinados por la intersección de las curvas de oferta y demanda. En general existe una acentuada inestabilidad en los precios de estos recursos. Esto se debe a que la elasticidad precio de la demanda es bastante baja dado que el costo de dichas materias representa una pequeña proporción del precio del producto terminado (Tilton y Guzmán, 2016).

Los *booms* de los *commodities* se definen como aumentos acentuados y simultáneos en el precio real de un amplio grupo de productos. Es por esto que comúnmente se dice que los precios de los *commodities* presentan “co-movimiento” (Pindyck y Rotemberg, 1990). Se han detectado tres *booms* desde la segunda guerra mundial (con inicios en 1950-1951, 1973-1974 y 2003-2004, respectivamente), los que se comparten el que las industrias no fueron capaces de satisfacer el rápido crecimiento de la demanda (Radetzki, 2009).

Lo que mueve la industria minera es la existencia de un negocio minero, y para esto suceda se requiere la existencia física y demanda de materiales minerales como lo son los *commodities*. El último *boom* en el precio de estos, registrado en el periodo 2004-2011 (con interrupción en

2008-2009 debido a la Crisis Financiera), así como el periodo de ajuste que ha sobrevenido al mismo desde 2012 demuestran que es necesario para las empresas ajustar los planes mineros de extracción (así como las condiciones operacionales y de inversión) a los cambios en el mercado para aprovechar las fluctuaciones del ciclo del negocio. Una parte importante del esfuerzo de las empresas mineras se centran precisamente en el mejoramiento de los planes mineros con el fin de maximizar el valor del negocio ante los cambios reales y esperados en el precio de los *commodities* que explotan.

2.2.1 Mecanismos de fijación de precios

La determinación del precio de un producto mineral se ve afectado por una gran variedad de factores. Para cada mineral existen distintos criterios a considerar, generalmente estos métodos incluyen características químicas, propiedades físicas y/o porcentajes de un componente clave según el uso que se le vaya a dar, entre otros.

Al revisar la historia de los mercados de minerales, es posible concluir que diversas han sido las formas en las que estos se han transado. Además, los métodos de negociación y comercialización han evolucionado de la mano con el constante desarrollo de los países y los avances tecnológicos. Si bien los tipos de mercados son dinámicos y cambian conforme a un conjunto amplio de variables, hoy en día se evidencian cuatro tipos de mercados principalmente, cada uno con características muy particulares que los definen. A continuación, se describen los cuatro tipos de mercados: bolsas especializadas, negociaciones *over-the-counter*, precios de productores y precios negociados entre el comprador y el vendedor. Asimismo, se presentan las condiciones principales que llevan a que un *commodity* se asocie a un tipo de mercado en particular.

2.2.1.1 Bolsas especializadas

La utilización de bolsas de valores especializadas como plataforma de comercialización se remonta hacia 1870 en donde los primeros *commodities* minerales se transaron, específicamente en la Bolsa de Metales de Londres o London Metal Exchange (LME). Hoy en día existen otras bolsas de igual importancia que la LME, como la Bolsa Mercantil de Nueva York o New York Mercantile Exchange (NYMEX), y la Bolsa de Metales de Shanghái o Shanghai Metal Exchange Market (SHMET). Las bolsas nombradas previamente son los tres centros comerciales más importantes y conocidos en el mundo en cuanto a la comercialización de *commodities*. En la LME se transan aluminio, aleación de aluminio, cobre, estaño, níquel,

zinc, plomo, cobalto, molibdeno y barras de acero. En la NYMEX, junto a su división de *commodities* New York Commodity Exchange (COMEX), se transan principalmente aluminio, cobre, oro, plata, platino, paladio y uranio. En la SHMET se transan aluminio, cobalto, cobre, estaño, níquel, oro, paladio, plata, platino, plomo, zinc.

2.2.1.2 Over-the-counter (OTC)

En contraste a las bolsas de valores, en donde los *commodities* son tranzados de forma anónima, que provee a los participantes de garantías en caso de que alguna de las contrapartes falle en honrar un contrato, el mercado OTC permite la negociación directa entre participantes con posiciones opuestas. Esto implica que el riesgo, incluyendo el riesgo que alguno de los participantes no cumpla el contrato, lo asumen exclusivamente las partes involucradas en la negociación. Ejemplo de este tipo de mercado es el London Bullion Market Association (LBMA), en donde se transa la mayor fracción del negocio del oro y la plata en el mundo (estos también se transan en bolsas de valores como la NYMEX o la SHMET). Otro ejemplo de este tipo de mercado es el London Platinum and Palladium Market (LPPM), el cual se encarga de la mayoría de transacciones de platino y paladio.

Es importante mencionar que la forma en la que se publican los precios de los mercados OTC difiere de aquella utilizada en las bolsas, las que publican los precios de forma continua conforme las negociaciones van ocurriendo durante un día laboral. En el caso de las negociaciones OTC, las publicaciones ocurren una vez al día y el precio a publicar es el resultado de balancear las cantidades a transar indicadas en las órdenes de compra y venta del día. De este modo, el mercado OTC publica un precio de apertura (en inglés *opening price*).

2.2.1.3 Precio del productor

En el caso de ciertos productos minerales, son los productores quienes anuncian el precio al cual están dispuestos a vender sus productos. Este precio puede ser el resultado tanto de negociaciones entre los productores (colusión), como el precio al cual el líder está dispuesto a vender. Para que este tipo de mercado sea válido, muchos factores se deben satisfacer a favor del productor. Entre estos destacan que el número de productores sea reducido (lo que resulta en una posición con poder de mercado respecto a los compradores, permitiéndoles influenciar el precio), que la demanda por los productos sea global y/o que exista un alto nivel de especificación del producto mineral transado.

A lo largo de la historia, este tipo de mercados ha sido bastante común para una gran variedad de productos minerales (ya sean metálicos, químicos o industriales). Ejemplo de lo anterior fue la comercialización por décadas en América del Norte del aluminio, níquel, molibdeno, cobre, plomo y zinc. No obstante, durante las décadas de 1970 y 1980 se produjo un cambio en la forma de comercialización de estos metales debido principalmente a que la demanda de los mismos cambió de una regional a una global y a que el número de participantes – fundamentalmente productores – creció. Como resultado, muchos mercados en donde el productor fijaba el precio se desplazaron a bolsas de valores. Durante este periodo tanto el aluminio como el níquel comenzaron a ser transados en la LME. Actualmente, aún existe una gran variedad de *commodities* que se comercializan bajo un esquema de precio del productor, como, por ejemplo: gemas preciosas y no preciosas, metales del grupo del platino (rodio, iridio, etc.), potasio, minerales de boro, cemento, entre otros.

2.2.1.4 Precio negociado

Este tipo de mercado está asociado a contratos bilaterales negociados directamente entre compradores y vendedores, sin el respaldo de una institución que otorgue garantías entre las partes. Sin embargo, cuando los productores son numerosos, pequeños y dispersos, existe espacio para que terceros especializados pueden operar como intermediarios, comprando la producción de un grupo de productores para luego negociar los términos de venta directamente con los consumidores finales (un ejemplo de esto es lo que ocurre entre productores de fertilizantes y distribuidores agrícolas). Este tipo de mercado, que hoy en día es común, es el observado cuando existe un nivel de diferenciación medio a alto entre los productos comercializables (como el mineral de hierro o carbón), se venden en cantidades relativamente pequeñas (como el ácido bórico, cadmio o niobio), y/o no son adecuados para la negociación en bolsas de productos básicos debido a su heterogeneidad o por ser un producto que suple una demanda muy específica (como las gemas preciosas). A pesar de que los precios se negocian directamente entre los participantes, igualmente existen diversas fuentes que proveen de precios de referencia, lo cual juega un rol crítico en las negociaciones.

Por otra parte, cuando un producto mineral es producido y consumido por unas pocas empresas, entonces la negociación del precio surge como el mecanismo idóneo a ser implementado. Algunos ejemplos clásicos de negociación de precios son en el mercado del acero laminado, en donde unas pocas acerías producen el acero laminado en frío que posteriormente es consumido por la industria automovilística para ser utilizado especialmente en la construcción

de carrocerías, y el mercado de láminas (u hojas) de aluminio utilizado en la fabricación de latas de bebidas y envases de alimentos. Otros ejemplos son el mercado de ferroaleaciones a granel (como el ferromanganeso), ferroaleaciones utilizadas para producir aceros y aceros especiales como el tungsteno y cobalto inoxidable, metales menores como el cadmio y bismuto, y productos a base de minerales como el carbonato de litio.

2.2.2 Volatilidad del precio

Existe una gran inestabilidad en los precios de los *commodities*, la cual se traduce en una alta volatilidad de los precios. Esto no solo es crítico para las empresas que producen o consumen minerales sino que también para los países que dependen de los ingresos que su minería genera (tales como Chile, Sudáfrica, Botsuana, Perú, entre otros).

Varios estudios sobre el tema de la inestabilidad del precio de los *commodities* han concluido que la volatilidad de estos es del mismo orden de magnitud que la volatilidad del tipo de cambio o del precio de las acciones (Labys, 1999).

Si se incluyen los efectos de la incertidumbre en la determinación de los precios de equilibrio de mercado, la trayectoria de precios estaría generada más bien por un proceso estocástico que uno determinístico. En el Capítulo 13 se discutirá en detalle respecto a la modelación de los precios de los *commodities* minerales, pero para esto se deberá introducir primero la matemática necesaria en el Capítulo 6.

Para una discusión en mayor detalle respecto a la volatilidad de los precios de los *commodities* minerales el lector puede referirse a García y Guzmán (2018). En este artículo se revisa a volatilidad histórica de 50 *commodities* minerales para el periodo 1900-2014.

2.3 Problema económico de la Empresa Minera

Las empresas mineras en la práctica se verán siempre enfrentadas a problemas complejos a la hora de tomar las distintas decisiones que maximizan su beneficio económico. Es por esto que es necesario generar modelos matemáticos (numéricos en la práctica) que representen esta realidad lo más fehacientemente posible, para poder acercarse al resultado óptimo y tomar la mejor decisión. A continuación, se presentan los conceptos que permiten construir estos modelos y como estos se relacionan con el problema real.

2.3.1 Función objetivo

El problema del productor minero parte por la definición de utilidad, la que se puede escribir matemáticamente para cada instante de tiempo (asumiendo que las inversiones se encuentran hundidas) de la siguiente forma:

$$Utilidad(Q_t) = \pi_t(Q_t) = Ingresos(t) - Costos(t) = p_t Q_t - c_t(Q_t) \quad (2.1)$$

En esta ecuación Q_t es la producción del mineral de interés en un tiempo determinado t , p_t corresponde al precio en el que se vende este mineral en ese mismo período de tiempo y $c_t(Q_t)$ corresponde a una función de costos que depende de la producción.

La operación minera buscará en general maximizar la utilidad de la mina. En un contexto de múltiples periodos de tiempo, sin embargo, el problema a resolver consistirá en el de maximizar la suma de las utilidades (descontadas de una forma apropiada, lo que se discutirá más adelante) a lo largo de la vida útil de la mina. Dicho tiempo útil se conoce en minería definido LOM (*life of mine*) y para efectos de este libro se hará referencia al mismo como T . Cabe destacar que la vida útil de la mina no necesariamente corresponde a una variable exógena al problema de optimización de la mina y, de hecho, muchas veces también deberá formar parte de la solución. Cuando este es el caso se considerará que el LOM es una variable endógena al problema.

2.3.2 Restricciones

En el proceso de lograr un modelo que represente el problema real al que se enfrentan los productores mineros se deben considerar las restricciones a las cuales el problema de optimización se encuentra sujeto. A continuación, se verán las principales restricciones que se emplean en este tipo de problemas. Estas restricciones se ampliarán considerablemente hacia el Capítulo 10 y sucesivos del libro.

Una de las restricciones más comunes a la hora de enfrentar el problema de cuanto producir es la de la agotabilidad de los recursos. Esta es expresada por la ecuación fundamental de los recursos naturales descrita en el capítulo anterior y que en tiempo continuo viene dada por:

$$\dot{S}_t = -Q_t + G_t \quad (2.2)$$

En esta ecuación, como en el resto del libro, Q_t corresponde a la tasa de extracción del recurso en el tiempo t y G_t corresponde a la generación de nuevas reservas posiblemente debido a la

exploración en el caso de los recursos no-renovables, y a la reproducción en el caso de los recursos biológicos.

Luego, es necesario establecer las dimensiones de las reservas en el momento en que se inicia la explotación del mineral, por lo que se definen estas en el tiempo inicial según la siguiente ecuación:

$$S(0) = S_0 \quad (2.3)$$

Esta restricción establece que S_0 es un valor fijo y conocido para las reservas en el instante previo al inicio de las operaciones de extracción.

En el caso particular en que $G_t = 0$, se tiene que la exploración de nuevas reservas es nula. Debido a que no se puede extraer más que lo contenido en las reservas iniciales, se debe cumplir entonces (en tiempo discreto) lo siguiente:

$$\sum_{t=0}^T Q_t \leq S_0 \quad (2.4)$$

Además, existirán ocasiones en las cuales será necesario establecer un límite en la capacidad de la producción, por lo que el valor de Q_t deberá estar acotado superiormente. Esta restricción vendrá dada por la capacidad de extracción máxima de la mina, la cual por lo general es representada por K .⁹ A su vez, la producción de mineral no puede ser negativa.¹⁰ Por lo tanto, la inecuación para la restricción en la capacidad de producción vendrá dada por:

$$0 \leq Q_t \leq K \quad (2.5)$$

Finalmente, es necesario establecer una restricción de no negatividad para las variables a las cuales les resulta imposible tomar valores menores a cero, como por ejemplo las reservas iniciales. En ese caso, se tendrá que:

⁹ En general la capacidad de producción puede considerarse a su vez una función del tiempo, esto es $K(t)$. Para efectos de simplificar la exposición se ha asumido en esta sección y gran parte del libro que dicha capacidad es, sin embargo, constante.

¹⁰ Aunque existen operaciones mineras donde existe inyección de minerales en la tierra, este es un caso muy poco relevante y generalmente representa una exigencia más que una decisión económica de la empresa. Como ejemplo de esto se encuentra la explotación de litio y potasio en el Salar de Atacama. Una de las empresas que aquí operan deben inyectar al Salar parte del litio que extraen para cumplir la exigencia asociada al contrato de explotación que poseen con el dueño, en este caso el Estado de Chile (a través de la agencia gubernamental CORFO).

$$S_0 \geq 0 \quad (2.6)$$

2.3.3 Tasa de descuento y VAN

Se define como tasa de descuento $r > 0$ aquella tasa de interés utilizada para calcular el valor presente de un flujo futuro (Brealey y Myers, 2015). Este valor se descuenta período a período debido a la depreciación del dinero en el tiempo. En términos prácticos y desde el punto de vista del inversionista, se tiene que la tasa de descuento r es un indicador tanto del costo de oportunidad del inversionista como del riesgo propio del proyecto (Brealey *et al.*, 2015).

En las empresas mineras, la tasa de descuento es alrededor del 10% anual. En general, las empresas *majors* tienen tasas que van del 8% al 12% anual. Por su parte, las empresas *juniors* poseen tasas de descuento que van entre el 6% y 15% anual. Esta mayor variabilidad se explica pues o bien el costo de oportunidad del inversionista es muy alto o la tasa es simplemente manipulada para reflejar un valor de negocio alto (lo que es común en el caso de la venta de depósitos descubiertos o explorados por la empresa).

Al estar la tasa de descuento asociada al riesgo del proyecto minero, es esperable que exista diferencia en este parámetro para distintos *commodities*. Así, por ejemplo, en el caso del oro, la tasa de descuento (6% como mediana) generalmente es más baja que en el caso del cobre (8% como mediana). Esto se debe a que el precio del oro, al ser este un activo financiero, es completamente diversificable. Es decir, es posible construir un portafolio de papeles financieros que replican exactamente el riesgo asociado al precio, y por tanto en teoría el riesgo puede ser anulado al invertir en un portafolio que replique a la inversa este riesgo.¹¹

A través del riesgo del país, la tasa de descuento también dependerá del país donde se esté llevando a cabo la explotación minera. Por ejemplo, se puede considerar el caso de operar en Estados Unidos, donde los intereses de los inversionistas están fuertemente protegidos por distintas instituciones, y existen reglas claras al respecto. En este caso el riesgo país es bajo. Por otro lado, y en comparación, hay países con mayor grado de inestabilidad política, en los cuales se corren riesgos tales como la posible expropiación de la mina. Es común en minería

¹¹ Esto contrasta con el riesgo sistémico o no-diversificable, el cual por definición no puede ser replicado en el mercado financiero. En general la mayoría de los productos derivados de la minería contienen riesgos de esta naturaleza, y aun cuando el precio de los *commodities* pudiera parecer siempre diversificable (pues en general se transa en el mercado financiero) lo cierto es que en gran parte responde a consideraciones propias del mercado en cuestión.

entonces que las empresas castiguen sus proyectos u operaciones en países con alto nivel de riesgo país, por sobre lo que ocurre en países con un bajo nivel de riesgo país.

La tasa de descuento depende también del tipo de proyecto. Así, generalmente las empresas utilizarán una tasa distinta para el caso que se trate una nueva mina (*greenfield*) o para la continuación de una mina ya operativa (*brownfield*). La justificación de una menor tasa en el caso de las minas *brownfield* radica en la existencia de cierta experiencia operativa y una relación ya establecida con la comunidad (ambos elementos que en un proyecto *greenfield* son fuentes de alta incertidumbre).

Otro factor significativo para estimar la tasa de descuento se refiere al método de explotación. Generalmente una mina subterránea tendrá más riesgos que una mina a cielo abierto, por lo que su tasa de descuento podría ser por lo mismo más alta.

Una vez definida la tasa de descuento del proyecto u operación, es posible estimar el Valor Actual Neto, comúnmente conocido por las siglas VAN. Este corresponde a la suma de los flujos futuros del proyecto, pero con los valores de cada período descontados de acuerdo a la tasa de descuento de la empresa para la mina en cuestión.

La existencia de una tasa de descuento positiva para el problema de maximizar el VAN será clave en la problemática enfrentada por la mina al momento de generar sus planes de extracción, como se discutirá en extenso en este libro. Esto explica de hecho porque pese a que la mirada de la mina es en general de largo plazo, finalmente gran parte del esfuerzo se tiende a concentrar en el primero o primeros años de operación de la mina.¹²

Una discusión importante respecto a la tasa de descuento, y que muchas veces en minería se da por entendida, es que esta sea constante en el tiempo. Aunque parece natural esperar que en general sea una función del tiempo (es decir, $r(t)$), lo cierto es que de ser este el caso se produce un problema de “inconsistencia intertemporal”,¹³ el que se manifiesta en que las

¹² A modo de ejemplo, el autor ha podido comprobar en la práctica como regla empírica para minas operativas de cobre que el 60% del VAN total se alcanza los primeros 5 años de operación. A su vez más del 80% del VAN se alcanza los primeros 10 años de operación, y alrededor del 95% en los primeros veinte años de operación.

¹³ Esto en el contexto minero podría ser explicado pues el riesgo de una operación depende en cierta medida del ciclo de vida de la mina. Así por ejemplo, una mina en una etapa inicial de explotación generalmente tendrá todos los riesgos propios de un proyecto, los que ya no estarán presente cuando la operación se encuentre en régimen.

decisiones óptimas de las empresas cambian en el tiempo por el simple hecho de que avance el tiempo (y no porque haya cambios en los parámetros de evaluación del problema). Para más sobre esta problemática y la necesidad de contar con una tasa de descuento constante el lector puede consultar Strotz (1955-1956).

Considerando entonces el descuento de los flujos de caja futuros, la función objetivo que enfrenta una empresa minera racional considerando una tasa de descuento r en tiempo discreto viene dado por:¹⁴

$$\max_{Q_t, T} VAN = \sum_{t=0}^T \frac{\pi_t(Q_t)}{(1+r)^t} \quad (2.7)$$

Análogamente, en tiempo continuo lo anterior es equivalente a:

$$\max_{Q_t, T} VAN = \int_0^T e^{-rt} \cdot \pi_t(Q_t) \quad (2.8)$$

Cabe notar que en ambos problemas se ha asumido que no solo la cantidad a producir por la empresa es optimizable, sino que también el LOM de la misma. Asimismo, debe tomarse en cuenta que la tasa de descuento en (2.7) y (2.8) no son equivalentes, pues en el primer caso la tasa es discreta y en el segundo es continua.

2.3.4 Ejemplos clásicos de soluciones estáticas y dinámicas en minería

Todo lo anterior contrasta con una de las teorías clásicas de optimización estática en minería, utilizada para determinar la envolvente económica de la explotación (y que se discutirá en mayor detalle en el Capítulo 3). En este caso la problemática es atemporal o estática, por lo que en lugar de maximizar el VAN en general la determinación de la envolvente económica consistirá en maximizar la suma de los flujos de caja no-descontados de la operación.

En el caso de la minería de rajo, el problema de determinar la envolvente económica es conocido como el problema del límite del *pit* final. Hasta la fecha, la planificación minera ha desarrollado varios métodos diferentes para encontrar el límite del *pit* final con el fin de maximizar el valor económico de los depósitos, aunque en general dichos métodos se limitan a un contexto estático.

¹⁴Una empresa se dice racional en el sentido neoclásico de la economía precisamente cuando busca maximizar su función de VAN (Auger y Guzmán, 2010).

El algoritmo de *Lerchs-Grossman* es uno de ellos el cual permite diseñar, en una sección vertical, la geometría del *pit* que arroja la máxima utilidad neta (Hustrulid *et al.*, 2013). El método resulta interesante ya que elimina procesos de prueba y errores al diseñar manualmente el rajo en cada una de las secciones. La metodología es conveniente y ha llevado al desarrollo de programas que automatizan algunos aspectos del análisis de sensibilidad. Debido a que la verdadera naturaleza del problema es, sin embargo, dinámica, la solución encontrada por el algoritmo de *Lerchs-Grossman* es sub-óptima (Guzmán, 2008d).

Una aplicación de optimización dinámica en minería es el algoritmo de Lane (para más antecedentes consúltese el Capítulo 5). Este consiste en determinar, considerando el costo de oportunidad del dinero en el tiempo, la ley de corte necesaria para discriminar entre mineral y lastre en el depósito. El algoritmo de Kenneth Lane (1965) permite determinar leyes de corte con objeto de maximizar el VAN de la operación, sin embargo, en la práctica se suele aplicar de forma estática pues se resuelve el problema periodo a periodo, sin considerar la intertemporalidad de las decisiones, lo que es crítico en la formulación conceptual de Lane.

Cabe mencionar que el algoritmo de Lane corresponde a un proceso iterativo en donde hay una relación de dependencia entre el VAN y la ley de corte crítica. El propósito es determinar la mejor estrategia de explotación del yacimiento, en base a una política de leyes de corte que defina la cantidad de material y mineral a extraer en cada período de tiempo. La siguiente figura muestra la representación del cálculo del VAN.

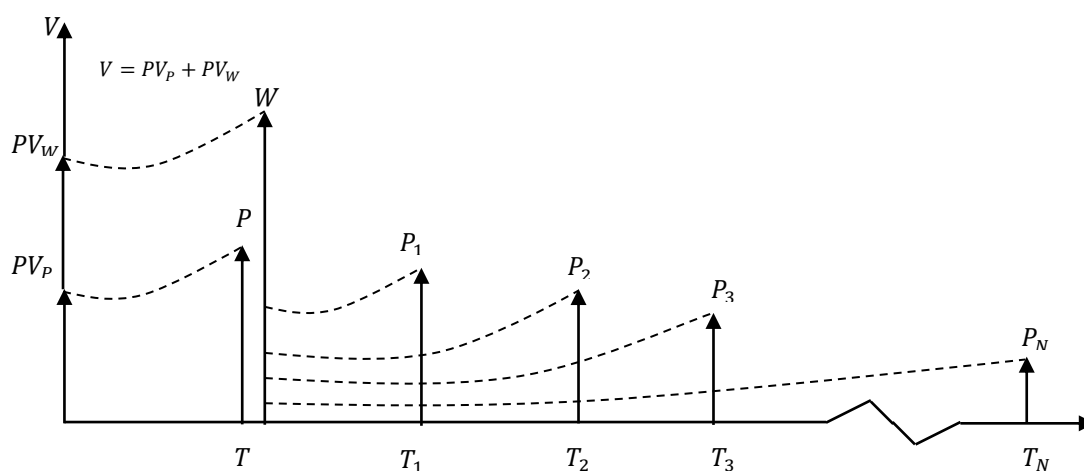


Figura 2.1. Cálculo del VAN

El valor presente de todos los flujos que el proyecto generará es V . Este valor está compuesto de dos partes: la primera PV_p viene de la utilidad P obtenida en T habiendo minado la cantidad Q_m . La segunda, PV_w proviene de las utilidades que se generarán al minar el material remanente. Además, W es el valor que acumula todos estos valores desde P_1 hasta P_N .

Sin embargo, como se mencionó en el capítulo anterior, Lane en ningún caso se ocupa de la distribución espacial de leyes del recurso. Pese a esto, este algoritmo igual sigue siendo utilizado ampliamente en la actualidad en softwares computacionales.¹⁵

2.3.5 Funciones objetivo alternativas

Aunque es una práctica extendida en el mundo minero el que las decisiones se tomen con objeto de maximizar el VAN de la operación, en ciertas empresas y/o industrias de minerales, existen otras funciones objetivo que se utilizan de parte de las empresas productoras.

Dentro de las funciones objetivo que el autor ha podido constatar algunas empresas o industrias mineras utilizan se encuentran:

- Minimización de los costos.
- Maximización del LOM.
- Maximización del flujo de caja de corto plazo.
- Maximización del precio de la acción de la empresa.

Es necesario destacar que ninguna de las funciones objetivo anteriores es completamente equivalente a maximizar el VAN de la operación, y puesto que es esta última la función objetivo para la cual existe mayor soporte teórico y empírico en el presente libro se limitará la exposición (al menos en el caso determinístico) a este caso. Aun así, la teoría aquí presentada puede extenderse, *mutatis mutandis*, a cualquiera de estas otras especificaciones.

2.4 Deficiencias de la solución al problema en la actualidad

¹⁵ Para una función objetivo más realista en minería, considerando algunos aspectos de la heterogeneidad espacial del recurso, y que se basa en el aprendizaje de este curso el lector puede referirse Uhlmann (2015).

Cada negocio minero tiene definido sus objetivos estratégicos de manera de poder sustentar su misión como empresa. Como se discutió en la sección anterior el principal objetivo estratégico de la empresa minera es maximizar el valor de su negocio, es decir, el VAN.

Es muy importante entender la naturaleza de los problemas asociados a la solución que actualmente derivan las empresas mineras en cuanto a la explotación óptima de sus recursos. Estos se asocian a tres conceptos principalmente: intertemporalidad, recursividad y determinismo.

El carácter intertemporal se refiere a que “lo que se haga en el presente afectará el futuro”. Si hoy se fija una cantidad de producción Q_0 , eventualmente cambiará la restricción de agotabilidad en las decisiones futuras. Es precisamente esta decisión de agotabilidad la que liga las decisiones del pasado con las decisiones del presente y del futuro, lo que indica que este es un problema de optimización dinámica (en el Capítulo 3 se desarrollará en mayor detalle esto). En la aplicación actual de la planificación minera, muchas veces no se releva el carácter de intertemporal de las decisiones y es común se concatenen soluciones propias de problemas estáticos periodo a periodo.

Otro concepto importante a mencionar corresponde a la recursividad (ver Figura 2.2). Cuando se realiza el plan minero, se busca la estrategia óptima para determinar la secuencia de extracción. Disponiendo de los límites económicos de la explotación final, así como de las fases o sectores de dicha explotación (es decir, la secuencia de extracción), se debe definir el cómo se van a extraer las reservas, por lo que se entra en una etapa de planificación de la explotación. Una vez determinado esto se procede a calcular el valor del negocio. En el caso de la explotación de un rajo, por ejemplo, el problema recae en la determinación del *pit* final mediante el algoritmo de *Lerchs- Grossman*. Una vez definido este límite, el cual es en esencia parte solo del problema espacial de explotación, se lleva a cabo un diseño y se genera una optimización dinámica, ahora dejando fuera el problema de determinar exactamente de qué forma (geométrica) se extraerán las reservas. Finalmente, se evalúa dicha secuencia con objeto de determinar el VAN de la operación. Puesto que en principio esta recursividad no garantiza optimalidad, generalmente se establecen varios diseños distintos con objeto de seleccionar en definitiva el de mayor VAN. El problema es que este proceso no solo no necesariamente garantiza convergencia al óptimo, sino que más importantemente es bastante costoso en términos de recursos humanos y computacionales. Esto, sumado a la necesidad de contar con

planes en ciertos periodos de tiempo, explica que en definitiva los planificadores mineros solo puedan realizar y revisar un conjunto acotado de alternativas.

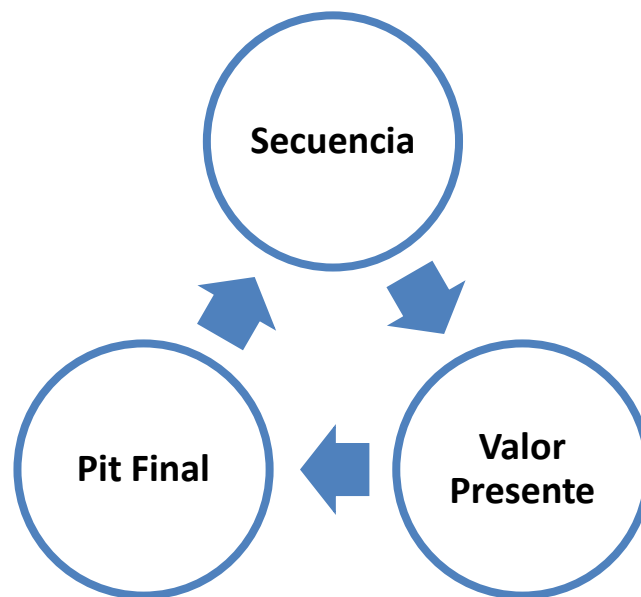


Figura 2.2 Concepto de recursividad

Finalmente, el determinismo se refiere a que en la práctica actual de la planificación minera se utiliza como supuesto que los parámetros del problema son ciertos o determinísticos. En la minería, la dificultad de utilizar un VAN determinístico se encuentra en asumir que el VAN evaluado por los precios esperados, los costos, las leyes de mineral y recuperación metalúrgica, entre otras cosas, es igual a al valor esperado del VAN, lo que – como se verá en detalle en el Capítulo 7 – es en general falso.

Cuando el problema es de carácter estocástico se debe derivar la distribución de probabilidad del VAN. Como se discutirá en detalle en el Capítulo 8 y Parte III del libro, en condiciones de incertidumbre las decisiones de las empresas siempre deben tratar de maximizar VAN esperado y no maximizar el VAN sobre la base de los valores esperados de los diversos parámetros de los cuales depende dicho indicador.

Para poder evaluar el impacto de cambios de variables de manera determinística en el VAN es común que se utilice en la industria minera un análisis de sensibilidad. Aunque esto sin duda permite entender de mejor manera el impacto que un cambio en el escenario de negocio puede conllevar al valor de la mina, existen una serie de deficiencias que hacen que sea preferible un análisis de simulación más completo como la Simulación de Monte Carlo.

2.5 Problemáticas no-económicas de la explotación de minas

Hasta el momento pudiera parecer que el problema de la empresa minera es puramente económico. Sin embargo, aunque este es la verdadera esencia de la existencia misma de la mina, la empresa minera enfrenta una serie de desafíos y problemáticas de índole diversa a la económica (pero que son necesarias resolver para permitir la existencia de la operación).

Un concepto que permite comprender lo anterior es el de “sustentabilidad empresarial”, el que está arraigado dentro de las buenas prácticas que deben seguir las compañías mineras y consiste en maximizar no tan solo el valor económico de la operación, sino que también en tener en cuenta el valor que la mina aporta en el contexto medioambiental y social.

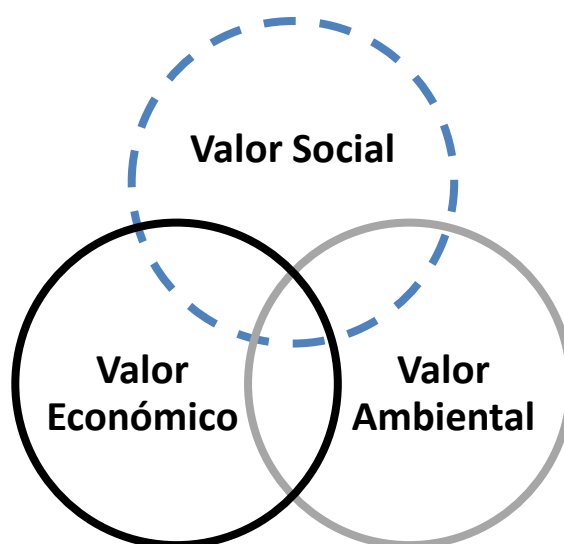


Figura 2.3 Principios que definen la sustentabilidad empresarial.

La sustentabilidad empresarial integra las tres dimensiones ilustradas en la Figura 2.3 en una visión estratégica más global, que considera a los *stakeholders* de la empresa. Los *stakeholders* o grupos de interés, son todos aquellos quienes afectan o pueden afectar el cumplimiento de los objetivos de una organización (Freeman y McVea, 2001). Con este enfoque se busca asegurar la permanencia de la empresa y sus operaciones en el largo plazo, al considerar no solo los organismos o particulares inmersos directamente en el negocio, sino que los intereses de todos aquellos involucrados en el proyecto. Por lo tanto, el principal objetivo para la empresa es gestionar los intereses y las relaciones de los accionistas, ejecutivos, trabajadores, comunidad, organizaciones medioambientales, etc.

Algunos de los retos y compromisos que adquieren las compañías mineras para lograr sustentabilidad empresarial son los siguientes:

- Creación de valor y rentabilidad.
- Eficiencia operacional y productiva.
- Buen gobierno y comportamiento ético.
- Salud, seguridad y desarrollo personal y profesional de empleados.
- Apoyo a la comunidad.
- Protección del entorno.
- Control de emisiones contaminantes.
- Desarrollo de las sociedades involucradas en la operación.

Cuando se analiza el problema de la explotación de una mina desde la perspectiva de la comunidad, la función objetivo ya no es la maximización del VAN a partir de la venta del mineral extraído, sino que más bien la diferencia entre beneficios y costos en que incurre la localidad cuando las autoridades permiten las operaciones mineras en esa zona.

Por ejemplo, podría darse el caso de que existe un conflicto entre las autoridades regionales en el que también participa la población local. Este conflicto se basa en la discrepancia entre si se permite entrar en operación a una gran empresa minera en una zona muy cercana a la ciudad en cuestión. La historia de la explotación minera está llena de ejemplos en los cuales la comunidad local ha impedido la materialización de proyectos mineros o incluso la continuidad de operaciones de este tipo.

Aunque escapa el alcance de este libro, la problemática de la explotación óptima de minas desde una perspectiva social puede ser igualmente modelada a partir de los elementos desarrollados en este libro. Para este fin será clave cuantificar tanto los beneficios como costos sociales de la explotación, para luego plantear el problema matemático identificando la función objetivo así como las restricciones propias del problema.

2.6 Problemas resueltos

Problema 2.1

- a) Una empresa minera desea determinar cuánto producir de un cierto mineral en cada periodo, de manera tal que maximice su ingreso. Sea f la función de ingreso, $f: U \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f \in C^2(U)$, U cerrado. ¿Cuáles son las condiciones de primer y segundo orden que debe cumplir los candidatos a solución del problema?
- b) Suponga que la empresa monopólica ha vendido 200 toneladas de mineral a la semana a 350 dólares por tonelada. Estudios han indicado que por cada 10 dólares de descuento que se ofrezca a los compradores, el número de toneladas vendidas se incrementará en 20 a la semana. Encuentre las funciones de demanda y de ingreso. ¿Qué tan grande debe ser el incentivo para maximizar su ingreso?

Solución

a) La condición de primer orden se refiere a aquellos valores dentro del dominio de la función $f'(x) = 0$. Como es un intervalo cerrado, los puntos extremos del intervalo no caen dentro del dominio donde $f'(x) = 0$, sin embargo, siguen siendo candidatos a solución del problema. Esta condición es necesaria pero no suficiente. Esto es porque podría existir un punto de inflexión el cual hace que cambie la concavidad de la curva.

La condición de segundo orden, para el caso de que se esté buscando el máximo, establece que los candidatos encontrados anteriormente deben cumplir que $f''(x) < 0$. Si estos cumplen dicha condición, entonces se tiene definido el conjunto de puntos que cumplen con ser máximos locales. El máximo global se obtiene evaluando los puntos que cumplen con la condición de primer orden y con la condición de segundo orden en la función objetivo como también evaluando los puntos extremos del intervalo. Así se comparan todos estos valores y se determina en definitiva el máximo global.

b) Sea q la cantidad de toneladas vendidas a la semana, entonces el incremento en las ventas es de $q - 200$. Por cada incremento de 20 toneladas vendidas, el precio disminuye 10 dólares. De modo que, por cada tonelada adicional vendida, la disminución en el precio es de $\frac{1}{20} \cdot 10$ y la función de demanda es:

$$p(q) = 350 - \frac{10}{20}(q - 200) = 450 - \frac{1}{2}q$$

La función de ingreso es:

$$I(q) = q \cdot p(q) = 450q - \frac{1}{2}q^2$$

Como $I'(q) = 450 - q$, se sabe que $I'(q) = 0$ cuando $q = 450$. Por la condición de primer orden, este valor de q da un máximo absoluto. Así el precio correspondiente es:

$$p(450) = 450 - \frac{1}{2}(450) = 225$$

, y el descuento es de $350 - 225 = 125$. Por lo tanto, para maximizar el ingreso la empresa debe ofrecer una rebaja de 125 dólares.

Problema 2.2

Suponga que una empresa minera de un cierto *commodity* mineral que opera a rajo abierto, está maximizando su utilidad a lo largo de la vida económica de la mina o LOM.

a) ¿Cómo plantearía el modelo en tiempo discreto, asumiendo que lo que se está maximizando es la utilidad en todo el periodo económico de la mina? (Plantee variables como precio, costo, cantidad producida, etc.).

b) Una condición comúnmente usada en la economía de recursos no renovables, es la condición de agotabilidad la que se expresa en tiempo discreto como:

$$S_t = S_{t-1} - q_{t-1} .$$

En minería se puede ver como el stock de reservas en es igual al *stock* de reservas menos cuanto se produjo en el periodo anterior ($t - 1$). Explique por qué es razonable introducir esta condición de agotabilidad en un modelo que maximiza la utilidad en todo el LOM de una mina a rajo abierto, plantee el modelo y responda en que se diferencia este problema del anterior planteado.

Solución

a) Sea:

c_t : Costo unitario en $t \forall t = 0 \dots T$

q_t : Producción en $t \forall t = 0 \dots T$

p_t : Precio del commodity en $t \forall t = 0 \dots T$

El modelo puede quedar planteado como:

$$\max_{0 \leq q_t} \sum_{t=0}^{LOM} (p_t - c_t) q_t$$

Es decir, se convierte en una serie de problemas estáticos para escoger la producción en cada periodo y así maximizar la utilidad, en donde lo que produzca hoy afecta solamente a la actual ganancia.

b) Sea:

$S_t \rightarrow$ Stock del recurso en el tiempo $i \quad \forall t = 0 \dots LOM$

$c_t \rightarrow$ Costo unitario de producción en $t \quad \forall t = 0 \dots LOM$

$q_t \rightarrow$ Producción en $t \quad \forall t = 0 \dots LOM$

$p_t \rightarrow$ Precio del commodity en $t \quad \forall t = 0 \dots LOM$

$$\max_{0 \leq q_t} \sum_{t=0}^{LOM} (p_t - c_t) q_t$$

s. a

$$S_t = S_{t-1} - q_{t-1}$$

Como se está explotando a rajo abierto a medida que se va profundizando en la explotación, las distancias que se deben recorrer para transportar el material tronado son mucho mayores, necesiándose más equipo, más trabajadores, más gastos en sueldos, mayores servicios de mantenimiento, etc. Es por esta razón que en general el costo no solo va a depender de la evolución en el tiempo de los insumos, sino que también de las reservas remanentes (*stock*).

Los costos también pueden tener dependencia en la producción, producto de que existen principalmente en la planta economías de escala ya que sus múltiples subprocesos poseen un número fijo asociado a la mano de obra. De hecho, si la planta por algún problema que se presente en la mina no está recibiendo mineral, debo seguir pagando los sueldos de los operarios. Por lo tanto, la estructura de costos de la mina asociado a planta es fija en el corto plazo pero en el largo plazo no.

En conclusión, el problema presentado es un problema intertemporal, en donde lo que se haga en el pasado determina el estado presente, y lo que se haga en el presente determinará el estado futuro.

Parte II

Base

Matemática

Capítulo 3: Principios de optimización dinámica

En este capítulo se describen los principales conceptos detrás de la modelación de problemas de optimización dinámica, presentando las variables y restricciones más comunes, así como también la función objetivo típica propia de esta clase de problemas. El estudio dentro de este capítulo contempla una mirada matemática que iniciará con una explicación de problemas en tiempo discreto para luego discutir el mismo en tiempo continuo. El objetivo de este capítulo es introducir al lector en los términos matemáticos que se utilizarán en el resto del libro, así como también presentar su significado en el contexto minero y mostrar más en detalle cómo esta teoría se aplica a los problemas asociados a la explotación óptima de minas.

3.1 Reseña histórica

La investigación matemática aplicada sufrió un fuerte impulso durante la Segunda Guerra Mundial. Importantes exponentes de diferentes ramas científicas realizaron variados aportes para el desarrollo de métodos matemáticos, en busca de soluciones militares. Dentro de las múltiples áreas desarrolladas en este contexto, una de las disciplinas que vieron la luz en este periodo fue precisamente la “Investigación de Operaciones” (OR por sus siglas en inglés, *Operations Research*).¹⁶ Esta rama de la matemática está enfocada principalmente en el

¹⁶ También se conoce esta disciplina con algunos de los siguientes nombres: Investigación Operativa, Investigación Operacional o Programación Matemática.

desarrollo de modelos, algoritmos y de estadística con el objetivo de contribuir al proceso de toma de decisiones óptimas.

Todas estas herramientas matemáticas que se estaban utilizando para la guerra, se volvieron rápidamente útiles en otras áreas civiles.¹⁷ Dentro de las aplicaciones que surgieron inmediatamente después de la Segunda Guerra Mundial se encuentra la teoría de los Procesos de Decisión en Múltiples Pasos, introducida en 1952 por el matemático norteamericano Richard Bellman (1920-1984) y que entrega soluciones a la programación dinámica (que se desarrollará en detalle en el Capítulo 5).

Fue precisamente Richard Bellman, junto a su equipo de investigación, quien planteó variados métodos para desarrollar y formular problemas de la naciente programación dinámica. Para esto desarrollaron el “principio de optimalidad” (ver Capítulo 5). El estudio realizado en esta materia permitió extender el alcance de la programación dinámica a diferentes problemas en varias ciencias (incluyendo la ingeniería, economía, biología, medicina, etc.), determinando limitaciones y soluciones particulares para cada uno de estas.

3.2 Definición de optimización intertemporal

Dentro de los problemas propios de la explotación óptima de minas se encuentra el problema de encontrar las cantidades a producir en cada instante de tiempo (Q_t), tal que el VAN o la suma de los flujos de caja descontados a una tasa de descuento r desde un tiempo inicial t_0 (típicamente referido como $t_0 = 0$) hasta un tiempo final T (LOM para efectos de una mina) sea máximo.

A continuación, se muestra el planteamiento matemático del problema anterior (ver Capítulo 2 para una derivación del problema):

$$\max_{Q_t} \sum_{t=0}^T \frac{\pi_t(Q_t)}{(1+r)^t} \quad (3.1)$$

s. a.

¹⁷ Este suele ser siempre el caso. Solo a modo de ejemplo la propia Ingeniería Civil nació de la Ingeniería Militar (de ahí que el término “Civil” se refiera a obras de origen público y no militar).

$$\sum_{t=0}^T Q_t \leq S_0 \quad (3.2)$$

$$Q_t \geq 0 \quad \forall t = \{0, 1, \dots, T\} \quad (3.3)$$

En este problema se ha asumido que el tiempo es discreto, y la variable Q_t , que corresponde precisamente a la cantidad a optimizar, se considera como “variable de control” del problema. Se puede considerar que $\mathbf{Q} = \{Q_0, Q_1, \dots, Q_T\}$ es el vector de cantidades en el tiempo.

La ecuación (3.2) representa la restricción de agotabilidad asociada a la explotación de un recurso no-renovable, lo que condiciona que, para cada instante de tiempo hasta el final de la vida de la mina, la suma de las cantidades explotadas no supere al *stock* inicial del recurso (S_0).

Por otra parte, la ecuación (3.3) indica que la variable Q_t (para todo valor del tiempo) no puede ser negativa, dado que se está frente a una explotación real de una mina y se asume que como parte de dicha explotación no se “inyecta” recurso en la tierra.

El problema anterior es una simplificación de lo que debe resolver en la práctica la empresa minera para asegurar una explotación óptima de su recurso.¹⁸ Sin embargo, es suficiente para demostrar la naturaleza “dinámica” del problema. De hecho, la ecuación (3.2) relaciona a las variables de control en el tiempo, de tal forma que la determinación de la cantidad a explotar en un tiempo cualquiera no puede ser independiente del pasado o futuro de esta variable. De aquí, los problemas de optimización dinámica comparten el que las decisiones del pasado condicionan el proceso de toma de decisiones del presente. Asimismo, las decisiones que se tomen en el presente condicionan las decisiones que se tomen en el futuro.

De esta manera, las decisiones en un problema de optimización dinámico se dice son “intertemporales”. Es decir, el valor que tome Q_t influirá en lo que ocurra con Q_s (con $s > t$). Esta es la principal característica de la optimización dinámica o intertemporal, que contrasta con la optimización estática precisamente en que las variables de control de un tiempo cualquiera no condicionan la selección de las variables de control en otros periodos de tiempo.

Con objeto de estudiar las propiedades básicas de los problemas de optimización dinámica en la sección siguiente se plantea un problema general en tiempo discreto,¹⁹ el que aunque no

¹⁸ Problemas más realistas (y complejos) se exponen en las Partes III y IV del libro.

¹⁹ En la Sección 3.5 se desarrolla el caso general en tiempo continuo.

posee una motivación minera propiamente tal servirá de igual forma para introducir más adelante el problema de la explotación óptima de minas.

3.3 Modelo general de optimización dinámica en tiempo discreto

3.3.1 Variables del problema

En un problema general de optimización dinámica las variables pueden dividirse, según su naturaleza, en los siguientes tres tipos:

- x_t : Estado del sistema en el instante t . El estado de un sistema se refiere a una o varias propiedades con la cual se caracteriza el sistema dinámico a estudiar. A modo de ejemplo, en una operación minera de rajo se podría pensar que el estado corresponde a la topografía al final de cada año.
- u_t : Variable de control en el instante t . Esta variable corresponde al conjunto de variables que controlan o modifican las variables de estado. Dentro de las variables de control típicas en el problema de explotación óptima de minas se encuentran el volumen a extraer y la ley de corte en cada periodo de tiempo. Continuando con el ejemplo anterior, si x_t es la topografía al final del periodo t , u_t podría corresponder al volumen total que se extrajo durante dicho periodo.
- w_t : Variable de error o incertidumbre en un instante t . En general, en los sistemas dinámicos existen variables exógenas que son inciertas (al menos a los ojos de quien debe resolver el problema), y que quedan fuera del rango de control del optimizador. Por ejemplo, una variable incierta típica en una gran cantidad de mercados de minerales corresponde al precio del *commodity* que extrae una mina. En la práctica, para formular y resolver su problema las minas realizan la optimización en base a un precio esperado para el futuro, pero la verdad es que esta simplificación genera distorsiones en la explotación óptima de la mina (lo que se discute en detalle en la Parte IV del libro).

Para entender el rol de cada uno de estos tipos de variables se plantea el siguiente problema cotidiano. Considérese un viaje en automóvil desde Santiago a Viña del Mar. En este caso se podría considerar como variable de control la velocidad del auto, que el automovilista

(optimizador en este caso) controla a través del uso del acelerador, freno y manubrio (luego, existen tres variables de control asociadas a este vector). A su vez, la variable de estado podría estar asociada a la posición geográfica del automóvil en cada instante de tiempo. Por su parte, la condición del tráfico en la carretera, así como imprevistos en la misma (accidentes o trabajos, por ejemplo), se podrían considerar como una variable de error o incertidumbre.

Una posible función objetivo del problema anterior, y que generalmente el automovilista enfrenta, corresponde a la conducción óptima en términos de minimizar el tiempo de transporte. Aunque en caso de existir una única ruta factible el problema de determinar la velocidad óptima para este objeto puede parecer simple, lo cierto es que las restricciones (como por ejemplo las limitantes legales asociadas a la rapidez) y variables de error (por ejemplo, obstáculos en la carretera) hacen que el problema sea uno no trivial.²⁰

Una vez se han definido las variables de control, de estado y de error, se hace necesario definir la “política admisible”. Esta viene dada por:

- $\pi = (u_0, \dots, u_t)$: Política admisible o acciones posibles en cada instante t .

La política admisible contiene la información completa de las variables de control durante todo el horizonte de tiempo del problema. Aunque en la práctica existen en general infinitas políticas a seguir, para efectos de la optimización dinámica solo interesan aquellas que pueden ser declaradas admisibles. Así, por ejemplo, en el caso del viaje en automóvil entre Santiago y Viña del Mar dos automovilistas distintos podrían haber realizado el camino siguiendo decisiones muy distintas en cada instante de tiempo. Incluso si el tiempo de viaje entre ambos fuese el mismo, posiblemente sus políticas (aunque admisibles) podrían perfectamente ser distintas.

En el ejemplo de la explotación de una mina por medio de un rajo, lo anterior es equivalente a pensar que se podría llegar al *pit* final al cabo de un tiempo T de varias formas distintas. Desde una perspectiva minera, sin embargo, la lógica operativa restringe una serie de desarrollos que por su naturaleza deben ser considerados no-admisibles.

²⁰ En el caso que se utilice como variable de control precisamente la ruta que optimiza el tiempo, un *software* que busca resolver este problema es Waze o Google Maps. Aunque el autor desconoce el algoritmo que utilizan estos programas, posiblemente estos contengan algunas consideraciones de optimización dinámica.

3.3.2 Formulación del problema en tiempo discreto

Introduciendo todas las variables descritas en la sub-sección anterior a un modelo de optimización mediante una función objetivo $g_t = g_t(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t(\mathbf{x}_t), \mathbf{w}_t)$, entonces un problema general de optimización dinámica quedaría representado por la ecuación (3.4):

$$\max_{\pi \in \Pi} J_\pi = E\{\sum_{k=0}^{T-1} g_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k(\mathbf{x}_k), \mathbf{w}_k) + g_T(\mathbf{x}_T)\} \quad (3.4)$$

, donde la función que se busca maximizar es la función de beneficio o costo, la que depende del estado inicial del sistema \mathbf{x}_0 (es decir, $J_\pi(\mathbf{x}_0)$), y el término $g_T(\mathbf{x}_T)$ es denominado valor residual. Se debe notar que, dada la presencia de una variable de incertidumbre en el problema, la resolución del mismo implica calcular un valor esperado de la función objetivo.²¹

Para entender el valor residual hay que entender que existen ciertos problemas en minería y economía en los cuales se busca la política admisible óptima, pero ésta no siempre se resuelve hasta un periodo suficientemente lejano (o infinito), sino que generalmente hasta un momento en el cual el valor residual del sistema es suficientemente bajo (potencialmente puede ser cero).

Como ejemplo de lo anterior considérese el caso de una explotación minera hasta la envolvente económica. Aunque es común considerar solo el VAN de las reservas (es decir, el mineral contenido en la envolvente económica) al momento de estimar el valor del yacimiento, lo cierto es que parte del recurso remanente podría convertirse en el futuro en reservas. Esto debido a que en el futuro pudiera mejorar la tecnología de explotación o procesamiento, o porque el precio del *commodity* mineral es mayor al esperado en la actualidad. Cualquiera sea el caso es razonable esperar que, aunque hoy se busque en una mina optimizar el VAN durante el LOM de la explotación, generalmente existirá un valor residual asociado (el que en general será una función de los recursos remanentes al final de la explotación).

El problema definido en (3.4) es equivalente entonces a encontrar una política admisible óptima π^* , tal que maximice la función de beneficio o costo total (incluyendo el valor residual). Matemáticamente:

$$J_{\pi^*}(\mathbf{x}_0) = \max_{\pi \in \Pi} J_\pi(\mathbf{x}_0) \quad (3.5)$$

²¹ En el Capítulo 7 y la Parte IV del libro se justifica esta elección.

Al modificar una o más variables de control del sistema, se cambia el estado del sistema en el periodo siguiente. A su vez, este cambio de estado podría generar un cambio en el valor de las variables de control. Por su parte, la existencia de una variable de incertidumbre podría introducir ruido, lo que en general alterará el estado del sistema. Una manera de representar esta relación es con la Figura 3.1, donde se aprecia como las relaciones entre las distintas variables produce la de intertemporalidad en el proceso de toma de decisiones.

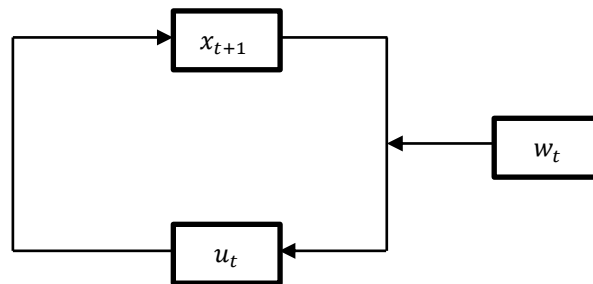


Figura 3.1: Representación gráfica de la relación entre las variables

Un ejemplo del sistema anterior puede encontrarse en Bertsekas (1995). En este problema se tiene una empresa que debe controlar de mejor forma su inventario en el tiempo. Para esto, la empresa debe ordenar una cierta cantidad de un artículo en cada periodo de tiempo. El artículo en cuestión satisface una demanda estocástica, y el objetivo de la empresa es minimizar el costo incurrido en ordenar una cantidad del producto antes de saber exactamente cuál será la demanda por el mismo.

Así, definiendo las variables:

- x_k : *Stock* del artículo disponible al principio del k -ésimo periodo.
- u_k : *Stock* del artículo ordenado (y entregado instantáneamente) al principio del k -ésimo periodo.
- w_k : Demanda durante el k -ésimo periodo con una distribución de probabilidades dada.

Se asume que w_0, w_1, \dots, w_{N-1} son variables aleatorias independientes, y que el exceso de demanda se satisface tan pronto se renueva el inventario disponible. Entonces el *stock* evoluciona de acuerdo a la ecuación en tiempo discreto, dada por:

$$x_{k+1} = x_k + u_k - w_k \quad (3.6)$$

La Figura 3.1 corresponde precisamente a una representación gráfica de una ecuación como la (3.6).

3.4 Tipos de Soluciones

En optimización dinámica existen dos tipos de soluciones posibles, a saber:

- **Open Loop (OL)**: Se define cuando la solución óptima solo depende del tiempo y no del estado del sistema, es decir, se tiene una solución del tipo $\pi^*(t)$.
- **Close Loop (CL)**: En este caso la solución óptima además depende del estado del sistema en el tiempo, junto con la incertidumbre presente. Esta solución es del tipo $\pi_t^*(x_t, w_t)$.

Llevando estas definiciones a un contexto de explotación minera si el problema a resolver es encontrar la producción óptima en el tiempo, con el propósito de plantear el plan minero óptimo para la operación, entonces esta solución será del tipo *Open Loop*. Cabe señalar que en la actualidad la “planificación minera” (ver Recuadro 3.1) desarrolla precisamente planes en los que en general las decisiones únicamente dependen del tiempo. De esta forma, en general los planes mineros no consideran el estado de la mina o la información asociada a las variables de incertidumbre de la misma, y por lo mismo pueden ser consideradas *Open Loop*.

RECUADRO 3.1

PLANIFICACIÓN MINERA

Una de las etapas fundamentales en el desarrollo de una explotación minera es su planificación (Hustrulid *et al.*, 2015). Es por esto que, luego del análisis geológico y el planteamiento del modelo de bloques, se realiza el plan minero. A grandes rasgos, este plan es una estructuración del material que se va a extraer de una mina periodo a periodo, con el fin de maximizar su valor (típicamente VAN).

La naturaleza *Open Loop* del plan minero, es decir, que sólo depende del tiempo, se puede apreciar en su representación gráfica mediante un ejemplo estándar (ver Figura 3.2).

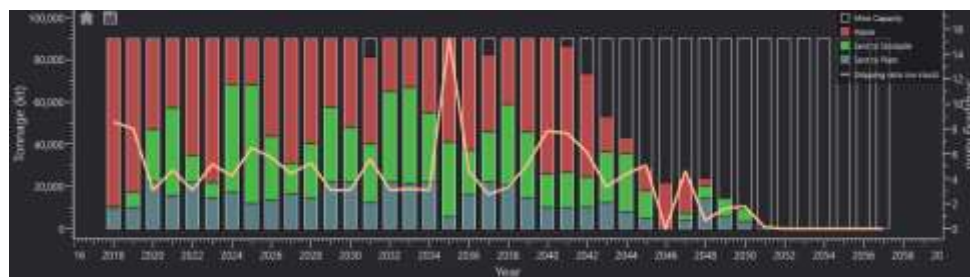


Figura 3.2. Ejemplo de un plan minero en DeepMine

Las restricciones de una evaluación *Open Loop* a un problema como el de la planificación minera incluyen una disminución de valor que según la experiencia del autor podría implicar una disminución en el VAN de la operación superior al 10%. Esto motiva la búsqueda de soluciones *Close Loop* al problema, lo que necesariamente exige el entendimiento del mismo como un problema de optimización dinámica.

El incluir o no el estado de la mina (o de cualquier sistema) como parte de la solución sin duda tiene la capacidad de generar cambios en el valor de la función de beneficio o costo. Para mostrar esto, basta considerar la desigualdad matemática (Bertsekas, 1995) que establece que la solución de un problema asumiendo mayores restricciones (*Open Loop*) generará un valor objetivo menor o igual a si estas se ignoraran (*Close Loop*), como se puede observar en la inecuación (3.7):

$$J_{\pi^*}(\mathbf{x}_0)_{OL} \leq J_{\pi^*}(\mathbf{x}_0)_{CL} \quad (3.7)$$

No es difícil demostrar que en un sistema estocástico (o no-determinístico), es decir, uno en el cual la variable \mathbf{w}_t toma un valor distinto de $\mathbf{0}$, entonces la desigualdad anterior será en general estricta, como se puede apreciar en la inecuación (3.8):

$$J_{\pi^*}(\mathbf{x}_0)_{OL} < J_{\pi^*}(\mathbf{x}_0)_{CL}; \mathbf{w}_t \neq \mathbf{0} \quad (3.8)$$

Un trabajo de interés donde se discuten las diferencias de las soluciones *Open Loop* y *Close Loop* en un contexto de teoría de juegos para la explotación de un recurso no-renovable es Del Sol (1987). En este se determina la cantidad óptima a producir por el cartel del cobre que funcionó entre 1967 y 1987 (CIPEC, por sus siglas en francés) para lo cual se utiliza en su formulación optimización dinámica.

3.5 Formulación en tiempo continuo

En los próximos tres capítulos se estudiará la resolución de problemas dinámicos en un ambiente determinístico (es decir, donde el vector \mathbf{w}_t es idénticamente nulo). De esta forma se establecerá una ecuación donde se relaciona únicamente la variable de estado con la variable de control. Esta relación representará la variación de las condiciones del sistema a estudiar en función del tiempo. La ecuación estará escrita en tiempo continuo en forma de ecuación diferencial (en el caso del tiempo discreto la ecuación es una en diferencias), para dar cuenta así del cambio en la variable de estado en el tiempo. Dado lo anterior, se define la ecuación de estado (o sistema, más bien) en la siguiente forma general:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \quad (3.9)$$

Luego, en un ambiente determinístico y en tiempo continuo el problema fundamental de la optimización dinámica se puede escribir como:

$$\max_{\mathbf{u}(t) \in U} \int_0^T g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) dt + h(\mathbf{x}(T)) \quad (3.10)$$

s. a.

$$\dot{x}_i(t) = f_i(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \quad \forall i = 1, \dots, N \quad (3.11)$$

, donde $x_i(t)$ es la componente i -ésima del vector $\mathbf{x}(t)$. En general, las funciones $g(\cdot)$ y $h(\cdot)$ deben ser bien comportadas para que las ecuaciones (3.10) y (3.11) sean matemáticamente consistentes. Para que esto ocurra, es necesario que $g(\cdot)$ sea continua (es decir, $g \in C^0$) y $h(\cdot)$ tenga derivada continua (es decir, $g \in C^1$). La resolución de este problema busca encontrar la variable de control $u^*(t)$, dentro del espacio de funciones admisibles U , tal que se maximice el valor de la función objetivo.

3.6 Métodos de optimización dinámica

En los capítulos siguientes se estudiarán diferentes técnicas de resolución de problemas dinámicos los cuales, como el lector apreciará en su momento, requieren una base matemática más compleja de lo que probablemente conoce debido a que precisamente la variable de control es una función y no un escalar (como suele ser el caso en los problemas de optimización

estática). A modo de adelanto, en este libro se estudiarán tres técnicas de resolución determinística para luego incorporar incertidumbre en los modelos ($w_t \neq \mathbf{0}$) y estudiar cálculo estocástico y optimización dinámica estocástica. Por ahora, los tres tópicos de interés y que el lector podrá aprender en los siguientes tres capítulos son:

- Cálculo de variaciones: Se basa en la resolución de una variación del funcional objetivo.
- Programación dinámica: Se basa en el Principio de Optimalidad de Bellman.
- Control óptimo: Se basa en el uso del llamado Principio del Máximo.

3.7 Aplicación en la industria minera

Tal como se mencionó anteriormente una de las características propias de la optimización dinámica es la intertemporalidad, es decir, el hecho que las decisiones pasadas afectan la toma de decisiones presentes y, por medio de estas, las futuras. En optimización estática la resolución de problemas es distinta, pues las variables de decisión se ven afectadas solamente por las condiciones actuales del sistema. Ejemplos de estos problemas son el problema de la mochila (*knapsack*), problemas de asignación, etc. Sin embargo, a lo largo de este libro el lector podrá comprobar que el efecto de las decisiones pasadas en minería en general es muy significativo, por lo que pretender resolver el problema de la extracción óptima sin considerar dicha intertemporalidad no es adecuado.

Ejemplos concretos de problemas de optimización dinámica existen en prácticamente todas las disciplinas donde las decisiones se desarrollan en el tiempo. Un ejemplo cotidiano puede corresponder a una persona que planifica sus ahorros para su jubilación o un empleador que debe decidir si contratar o no a una persona, considerando además los riesgos futuros y el historial de productividad de los demás empleados. Para distintas aplicaciones prácticas de la optimización dinámica en economía el lector puede consultar Chiang (1992).

Un ejemplo clásico de la economía de los recursos naturales es el problema que enfrenta una empresa forestal que debe decidir en qué momento explotar un bosque. Supóngase, por simplicidad, que no existen impuestos y no se considera depreciación de la maquinaria requerida. Asumiendo además que el bosque no crecerá en el tiempo, los costos anuales y el

precio unitario de vender la madera son constantes y se descuenta el dinero en el tiempo según una tasa constante $r > 0$. Siendo I la inversión requerida, Q la cantidad a explotar, C_t y P_t el costo y precio unitario de venta en el instante t , respectivamente, y considerando además que se debe explotar todo el bosque de una sola vez (sin dejar recursos remanentes), el problema a resolver queda de la siguiente manera:

$$\max_T VAN(T) = -I + \sum_{t=1}^T \frac{(P_t - C_t)Q}{(1+r)^t} \quad (3.12)$$

Este es un problema sencillo de optimización en una variable, donde basta derivar respecto a T e igualar a 0 (esto es, $VAN'(T) = 0$). Pero si se considerara ahora que el bosque crece en el tiempo, el precio deja de ser constante y se puede decidir no explotar todo el bosque de inmediato, sino más bien explotar a algún ritmo en función del tiempo, dejando madera remanente en el tiempo. Adicionalmente a lo anterior, existe la posibilidad de vida salvaje en el bosque, la cual debe preservarse, lo que podría generar restricciones respecto a la cantidad máxima a explotar en un instante cualquiera. Ciertamente la decisión de cortar un árbol antes o después dependerá de las ganancias que se esperan recibir en el futuro y un árbol que se corta, y pudiendo provocar un daño a vida animal que podría ser irreparable, acto que sin duda podría conllevar a consecuencias futuras con la comunidad. De aquí, el problema de la tala óptima de un bosque es un problema mucho más complejo que lo que sugiere la ecuación (3.12), pues se debe considerar cómo afectará el cortar un árbol o no en las decisiones futuras.

Considere ahora la industria pesquera. Así como en el caso forestal, existe ciertamente daño a la vida marítima que se debe tener presente a la hora de decidir la pesca óptima para la temporada. Asimismo, si se considera el caso extremo de pescar toda la fauna marina en un determinado periodo, esto eliminaría inmediatamente el negocio a futuro pues ya no quedarían especies que puedan reproducirse y generar pesca futura. Es necesario analizar entonces las cuotas máximas óptimas de pesca por temporada de modo que no afecte el crecimiento natural de una cierta especie y permita así mantener la sustentabilidad del negocio para la temporada futura.²²

²² La sustentabilidad es un concepto clave para la explotación de recursos naturales si es que se busca mantener el negocio en el largo plazo. En este sentido, generalmente la sustentabilidad trae consigo una problemática de optimización dinámica.

Los ejemplos antes expuestos tienen características similares que se repiten entre sí, tales como:

- Manejo de un *stock* y flujos en el tiempo.
- Decisiones pasadas afectan las decisiones futuras.
- Resultados son ritmos de explotación que podrían variar en el tiempo (funciones de t).

3.7.1 Optimización dinámica en la minería

Es fácil reconocer que las características presentes en los problemas de optimización dinámica antes expuestos se aplican a la explotación minera.

De hecho, es claro que la planificación minera es esencialmente dinámica debido al tipo de decisiones que se toman con esta. Aun así, en la actualidad la planificación minera se trabaja en la práctica asumiendo que las decisiones no necesariamente están interrelacionadas en el tiempo, y desde este punto de vista se pueden considerar las soluciones actuales como estáticas. El objetivo de este libro es relevar el contexto dinámico de las decisiones de explotación minera y avanzar en la búsqueda de soluciones que consideren precisamente la intertemporalidad de las decisiones.

Con objeto de resolver el problema de la explotación óptima de minas, los planificadores mineros consideran una serie de supuestos respecto a la evolución de las variables que actúan como insumos en su modelación. De esta forma, usualmente se consideran tecnologías y precios de largo plazo, ambos determinísticos (y generalmente además constantes), lo que genera que un cambio significativo en estas condiciones genere la necesidad de generar un nuevo plan. Además, los planes mineros son una simulación de la realidad y generalmente están pensados para el largo plazo, por lo que los acontecimientos del corto plazo generalmente no afectan el proceso de toma de decisiones en los planes mineros en la realidad.

La forma en la que el planificador corrige su planificación estática es mediante rehacer el plan minero con cierta frecuencia (típicamente anual), para ir así modificando los insumos y repensando mejores formas de realizar la explotación. Cada cierto tiempo es necesario evaluar el plan minero hecho anteriormente para evaluar su validez desde la nueva perspectiva de la empresa.

El problema del procedimiento de corrección anteriormente descrito se vuelve más crítico debido a la agotabilidad del recurso mineral. Debido a que una tonelada de mineral extraída es

una tonelada que no se podrá extraer de nuevo, se reducen automáticamente las reservas actuales del yacimiento (lo que genera precisamente el problema de intertemporalidad en la decisión). Esta característica convierte por sí sola el problema de la explotación óptima de minas en uno dinámico y en conjunto con los demás factores antes explicados se demuestra por qué la optimización dinámica y sus técnicas de resolución son competentes a esta industria.

En la optimización estática existen varios algoritmos que buscan determinar la explotación óptima de una mina que en la práctica son más tradicionales y tienen mayor uso en la industria minera. Uno de estos algoritmos es el de Lerchs y Grossman (1965) aplicado a minería a rajo abierto. Este algoritmo busca determinar la forma óptima del *pit* final, para lo cual le asigna un valor económico (atemporal) a cada bloque potencialmente explotable. Dado el amplio uso de este algoritmo en la construcción actual de planes mineros, en la siguiente sub-sección se desarrolla en mayor detalle, así como se explican sus problemáticas desde una perspectiva de optimización dinámica del problema real.

3.7.2 Lerchs y Grossman (L&G) v/s optimización dinámica

Antes de realizar esta comparación es necesario describir brevemente el algoritmo de L&G. L&G es un algoritmo matemático, basado en la teoría de grafos,²³ capaz de resolver el problema de determinar el *pit* final de una operación de minería a rajo abierto. Para esto, se modela de manera discreta el yacimiento mediante un modelo de bloques y se le asigna un valor económico único a cada bloque para realizar una evaluación económica.

Sea v_i el valor del bloque y x_i una variable binaria que toma el valor 1 cuando se mina el bloque i y 0 en otro caso. Se asume que el modelo de bloques está compuesto de un conjunto B y que \mathcal{M} es el conjunto de bloques (i, j) tales que el bloque j debe ser extraído antes de poder extraer el bloque i . De esta forma, L&G resuelve el siguiente problema de optimización estática:

$$\max_{x_i} \sum_{i \in B} v_i x_i \quad (3.13)$$

$$s. a \quad x_i \leq x_j \quad (i, j) \in \mathcal{M} \quad (3.14)$$

²³ Para mayores detalles con respecto a esta teoría se puede consultar Diestel (2010).

$$x_i \in \{0,1\} \quad i \in B \quad (3.15)$$

Nótese que la condición de que $(i, j) \in \mathcal{M}$ se refiere en general a una restricción geomecánica de estabilidad de las paredes de la mina, pero que también se pueden modelar por esta vía otras restricciones operativas (tales como restricciones ambientales o asociadas a la remoción de infraestructura para acceder al mineral).

El problema matemático anterior es sin duda una simplificación de la realidad,²⁴ dado que para que el bloque tenga un valor económico único se debe asumir un precio constante (lo que asume implícitamente un momento conocido a priori de explotación, contradiciendo en esencia la problemática fundamental de la explotación de minas). Además, L&G no considera restricciones operacionales que solo cobran sentido en un contexto temporal, como son las restricciones de capacidad de producción o de mezcla (la cual regula por ejemplo contenidos máximos de impurezas en el mineral a procesar).

Para resolver el problema (3.13)-(3.15), Lerchs y Grossman (1965) transforman este problema en uno de teoría de grafos, donde el problema es conceptualmente idéntico a uno de máximo flujo (Diestel, 2010).²⁵ En este caso cada bloque corresponde a un nodo del grafo y este se encuentra unido a los demás bloques de su vecindad (\mathcal{M}) por medio de una flecha que los conecta.

Debido a que el algoritmo de L&G solo resuelve el problema espacial de determinar la envolvente económica en minas a rajo abierto, durante muchos años su uso solo permitió a los planificadores mineros tener un marco de referencia dentro del cual debían desarrollar el diseño de explotación (fases), pero sin contar con una guía explícita para esto. Alford y Whittle (1986) desarrollaron un algoritmo que permitía utilizar de forma reiterada el algoritmo de L&G con objeto de apoyar el diseño de fases al interior del *pit* final.

La solución de Alford y Whittle (1986) consiste en utilizar lo que se conoce hoy como “*pits* anidados”. Esta se refiere a la aplicación sucesiva del algoritmo de L&G modificando el valor

²⁴ Para mayores antecedentes al respecto se puede consultar Guzmán (2008d).

²⁵ Un algoritmo más eficiente y moderno para resolver el mismo problema es el algoritmo de pseudo-flujo (Hochbaum, 2008). En la actualidad este algoritmo ya ha sido implementado en software especializado, como DeepMine.

de los bloques cada vez por medio de un parámetro predefinido. Así, por ejemplo, el parámetro más popular hoy en día es el llamado “*Revenue Factor*” (*RF*). Para entender este, considérese la siguiente exposición, basada en Castillo (2009), en donde se define el beneficio del bloque *i*-ésimo (B_i) según la ecuación:

$$B_i = (Fino_i) \cdot (RM_i) \cdot (P) \cdot (RF) - (Ton_i) \cdot (CM + CP) \quad (3.16)$$

, donde se define:

- *Fino*: Cantidad de fino (tonelaje por ley).
- *RM*: Recuperación metalúrgica.
- *P*: Precio del fino recuperado.
- *RF*: *Revenue Factor*.
- *Ton*: Tonelaje.
- *CM*: Costo unitario mina.
- *CP*: Costo unitario planta.

De la ecuación (3.16) se aprecia que el *RF* es un ponderador del precio que denota la variación del beneficio debido a la extracción de cada bloque (Castillo, 2009). En base a esto se definen los *pits* anidados para cada valor de *RF*. Una propiedad que se debe cumplir por la propia definición de L&G es que el volumen del *pit* obtenido a un *RF* dado deberá encontrarse estrictamente contenido en el volumen del *pit* obtenido a un *RF* mayor. Es esta propiedad la que genera la propia definición de “anidados”, pues en la medida que se construya una serie creciente de *RF* se obtendrán volúmenes de *pits* también crecientes y que van expandiendo la frontera de los *pits* obtenidos a *RF* más pequeños.

El problema de la aplicación del algoritmo de L&G – y que en ningún caso se resuelve en el contexto de *pits* anidados – es que la optimización es estática y solo se enfoca en la determinación del espacio óptimo sobre el cuál realizar la explotación. De esta forma, cualquier consideración temporal del problema se excluye de esta solución.

Muchas veces se corrige esta crítica omisión por medio de correr un algoritmo de optimización dinámica sobre el espacio óptimo derivado con el algoritmo de L&G, pero esto no corrige del todo la problemática de la intertemporalidad de las decisiones.²⁶

Cabe notar también que el algoritmo de L&G sí cumple con ciertos principios de la optimización dinámica que se desarrollarán en mayor detalle en el Capítulo 5. Esta se refiere a que el *pit* final derivado por este algoritmo debe ser independiente de cómo avance la explotación. Esto se aprecia en la Figura 3.3.

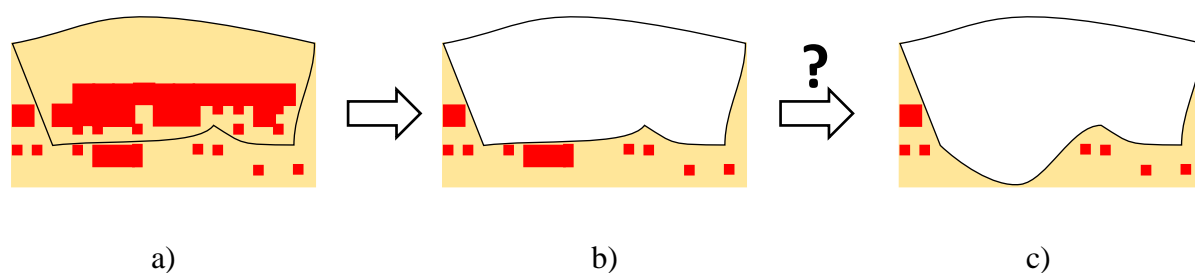


Figura 3.3. Cambios en la topografía inicial y su impacto en el *pit* final derivado por L&G

La Figura 3.3a presenta un modelo de un depósito mineral (en color rojo) sobre una topografía inicial de una mina no explotada. Al correr el algoritmo de L&G sobre este modelo la envolvente económica derivada es la demarcada con líneas continuas negras. En la Figura 3.3b se asume que el *pit* final se ha extraído del todo y se pregunta si el minero enfrentando la nueva topografía inicial, en la cual ya no requiere “levantar” tanto lastre, podría hacer crecer rentablemente el *pit* según se sugiere en la Figura 3.3c (o de cualquier otra forma). Aunque a priori puede parecer contra-intuitivo, lo cierto es que una vez alcanzada la topografía final del *pit* óptimo, cualquier expansión del *pit* será no-económica y solo disminuirá el valor del *pit* a extraer. De hecho, cualquiera sea el cambio en la topografía inicial que se considere – en la medida que solo signifique cambios dentro de lo que se definió como *pit* final – no habrán cambios en la envolvente económica final.

Aunque el autor desconoce si esta propiedad ha sido mencionada antes, lo cierto es que este “Principio de Optimalidad Espacial”²⁷ es muy interesante y potencialmente genera una forma

²⁶ Para una discusión del contexto espacio-temporal del problema en espacio y tiempo continuo el lector puede consultar el modelo evolutivo de Barnafi y Rivera (2015) y el modelo espacio-temporal de Guzmán (2015).

²⁷ En un contexto de un problema donde el tiempo, y no el espacio, es la fuente del problema este principio se conoce como “Principio de Optimalidad Dinámica” o de Bellman.

directa de estimar la envolvente económica en este problema estático y donde la incógnita se refiere precisamente a la forma del espacio asociado a la excavación.

Pese a las evidentes limitaciones del algoritmo de L&G, es clave mencionar que sigue siendo en la actualidad el algoritmo más utilizado para determinar la frontera óptima de explotación de un yacimiento a rajo abierto.

3.8 Problemas resueltos

Problema 3.1

Uno de los problemas clásicos de la minería y de cualquier industria en general es la maximización del VAN, es decir, maximizar el valor que el proyecto representa hoy para la empresa. Suponga una minera cualquiera que busca resolver el siguiente problema de optimización dinámica:

$$\max_{q(t)} VAN(q(t)) = \int_0^T e^{-rt} (p(t) - c_0 e^{-vt}) q(t) dt$$

s. a.

$$S(t) = -q(t)$$

$$S(0) = S_0, q(t) \geq 0$$

Dado el problema anterior, discuta su significado en la economía de minerales explicando qué interpretación le da a cada variable en la integral y en las restricciones.

Solución

En un contexto minero, se puede interpretar $p(t)$ como el precio spot del *commodity* en el instante t ; $c_0 e^{-vt}$ representa el costo unitario de extracción en un tiempo t ; e^{-rt} es un factor de descuento en donde r es la tasa de descuento anual compuesta continua; y $q(t)$ es el nivel de extracción de mineral en el instante t . Dado todo lo anterior, se observa que la función

objetivo es la suma (en este caso integral) de los flujos de caja descontados (en este caso el flujo instantáneo es igual a la utilidad instantánea) desde el tiempo 0 hasta el tiempo T , que podría representar el LOM de la mina. Además, se observa que la restricción podría representar la variación o disminución de las reservas en el instante t , por lo que $S(t)$ serían las reservas remanentes de la mina.

Por último, cabe destacar la particular forma en la que se expresan los costos unitarios en este enunciado. Se observa un costo inicial decreciente a una tasa v , la cual de ser positiva haría que los costos unitarios disminuyan, efecto similar al cambio tecnológico. Por otro lado, si $v < 0$ los costos aumentan, por lo que, en este escenario, el factor podría representar el efecto del agotamiento de las reservas, aumento de sueldo, huelgas, etc.

Problema 3.2

Una empresa tiene licencia de explotación de una mina de carbón a lo largo del horizonte temporal finito $[0, T]$, partiendo de una cantidad inicial de *stock* a . El *stock* y la cantidad extraída en el instante t se denotan por $S(t)$ y $q(t)$, respectivamente. La cantidad extraída se vende a un precio p , exógeno y constante en el tiempo. El costo de extracción aumenta con la cantidad extraída y disminuye con el *stock* existente. Concretamente, el costo de extraer q unidades cuando el *stock* es de S unidades es $\frac{q^2}{S}$. Dado todo lo anterior, se pide lo siguiente:

- a) Plantee un modelo de optimización dinámica que le permita a la empresa decidir la cantidad óptima a extraer en el tiempo. Defina claramente a función objetivo, variables y restricciones.
- b) Sea $q(t) = \frac{2p}{4+p(T-t)} S(t)$ y $S(t) = \frac{a}{(4+pT)^2} (4 + p(T-t))^2$ la solución al problema planteado en a), comente el comportamiento de la política de extracción y del porcentaje de reservas que se extraen para cada instante de tiempo t .²⁸

²⁸ El problema planteado se puede resolver mediante el método de control óptimo, el cual será estudiado en mayor profundidad en el Capítulo 6.

Solución

- a) Dado que no existe una tasa de descuento a aplicar en el problema, la función objetivo se expresa como la maximización de las utilidades totales durante el horizonte de tiempo especificado. Considerando las definiciones y variables dadas por enunciado, el modelo queda de la siguiente manera:

$$\max_{q(t)} \int_0^T \left(pq(t) - \frac{q(t)^2}{S(t)} \right) dt$$

s. a.

$$S'(t) = -q(t)$$

$$S(0) = a$$

$$q(t), S(t) \geq 0$$

La ecuación $S'(t) = -q(t)$ es la restricción de agotabilidad, la ecuación $S(0) = a$ la restricción del *stock* inicial de reservas y las condiciones $q(t), S(t) \geq 0$ permiten capturar la naturaleza de las variables que participan en el problema.

- b) Reemplazando $S(t)$ en $q(t)$ se tiene que:

$$q(t) = \frac{2ap(4 + p(T - t))}{(4 + pT)^2}$$

De aquí se observa que el nivel de extracción (y obviamente el de reservas) disminuye en el tiempo. Por otra parte, el porcentaje $w(t)$ de reservas restantes que se extrae viene dado por:

$$w(t) = \frac{q(t)}{S(t)} = \frac{2p}{4 + p(T - t)}$$

De aquí se desprende que $w(t)$ aumenta en el tiempo.

Problema 3.3

Considere el problema de una mina en tiempo discreto dado por:

$$\max_{\{q_t\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{2\sqrt{q_t}}{(1+r)^t}$$

s. a.

$$S_{t+1} = S_t - q_t$$

$$S_0 = 1$$

Interprete las variables del problema y plantee las ecuaciones que deben resolverse para determinar el vector de extracción óptima en cada tiempo t .

Solución

El problema planteado representa la maximización del VAN, que es lo que se busca resolver en un problema de una explotación minera (o algún otro). Ciertamente, en este último contexto es fácil darle una interpretación a las variables presentes, las cuales se pueden interpretar como:

- q_t = Tasa de extracción de las reservas de la mina en el periodo t .
- S_t = Porcentaje remanente de las reservas en la mina en el periodo t .
- r = Tasa de descuento de la empresa asociada a este depósito.

Dadas las condiciones del problema, se puede resolver mediante el método de Lagrange, quedando el siguiente problema de optimización sin restricciones:

$$\max_{\{q_t\}_{t=0}^{\infty}} L = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{2\sqrt{q_t}}{(1+r)^t} + \lambda * \sum_{t=0}^{\infty} (S_t - q_t - S_{t+1})$$

Por lo tanto, las condiciones de optimalidad que se deben cumplir, y que son por tanto las ecuaciones que deben resolverse, son:

$$\frac{\partial L}{\partial q_t} = \frac{2}{(1+r)^t} * \frac{1}{2 * \sqrt{q_t}} - \lambda = \frac{1}{\sqrt{q_t} * (1+r)^t} - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = S_t - q_t - S_{t+1} = 0$$

Capítulo 4: Cálculo de variaciones

El cálculo de variaciones es una rama clásica y fundamental de las matemáticas, con importantes aplicaciones en diferentes campos como los son la geometría, la física, la economía y la ingeniería, entre otras disciplinas. El cálculo de variaciones se refiere a la construcción de formas, estados o procesos óptimos, donde el criterio de optimalidad es dado en la forma de una integral que contiene una función desconocida. Así, la tarea del cálculo de variaciones es encontrar y/o demostrar la existencia de alguna función que cumple con el criterio del valor óptimo para dicha integral, junto con las diferentes propiedades que debe satisfacer la solución óptima. La integral variacional puede representar algún tipo de acción, energía o valor económico.

4.1 Reseña histórica

Uno de los problemas más antiguos del cálculo de variaciones es el problema isoperimétrico, que se extiende a tiempos anteriores a la Grecia clásica, y está directamente relacionado con la legendaria reina Dido, fundadora de la ciudad fenicia de Cartago. La leyenda cuenta que Dido llegó con su séquito a las costas de lo que ahora se conoce como Túnez y solicitó un pedazo de tierra a los habitantes locales. Dido solo pidió la tierra que pudiera ser encerrada por la piel de un toro, y dado que la petición no parecía ambiciosa, esta se le fue concedida. Así fue como Dido cortó la piel y la utilizó para crear una cuerda, con la que rodeó una extensión de tierra

en la costa que pasó a convertirse en la ciudad de Cartago. Independiente de la veracidad de la historia anterior, es cierto que el problema de abarcar la mayor cantidad de área con una cuerda de longitud fija está presente hace mucho tiempo en la historia. El filósofo Zenodoro (c.200 a.c.-c.140 a.c.), planteó este y otros problemas matemáticos relacionados con encontrar figuras óptimas, que hoy en día pueden ser considerados como problemas clásicos del cálculo de variaciones, así como otros problemas clásicos que fueron estudiados por Aristóteles y Pappus.

El siguiente registro importante para el cálculo de variaciones se produjo en el siglo XVII, cuando el matemático francés Pierre de Fermat (1601-1665) propuso el principio físico de tiempo mínimo, el cual establece que la trayectoria de la luz entre dos puntos es aquella en la cual el tiempo de viaje de la luz es mínimo. Este principio fue usado en 1662 por el mismo Fermat para deducir la ya entonces conocida ley de Snell que describe la refracción de la luz y es a partir de este momento en que se comienzan a ocupar métodos analíticos para la resolución de problemas de optimización, ya que anteriormente se resolvían de manera puramente geométrica, considerándose a este hecho, por varios historiadores, como el comienzo del cálculo de variaciones.

Luego, en 1685 Isaac Newton (1642-1727) resolvió problemas relacionados con la forma del contorno óptimo que debe tener un cuerpo moviéndose en un fluido para tener la menor resistencia. Resultados, que al igual que Fermat, fueron obtenidos de manera analítica.

En 1696 Johann Bernoulli (1667-1748) publicó un desafío para los matemáticos de la época: el llamado problema de la braquistocrona, donde destacan las respuestas de Jakob Bernoulli (1654-1705), que ocupó un método analítico similar al de Fermat, y las soluciones planteadas por Gottfried Leibniz (1646-1716) y Newton (publicada de manera anónima). El desarrollo y generalización de estos métodos por Leonhard Euler (1707-1783) y después por Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), lleva a lo que Euler denominó como cálculo de variaciones.

Finalmente, durante el siglo XIX son formalizados y generalizados los trabajos de Euler y Lagrange y ampliados de manera significativa por Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851) y Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897) para conformar la teoría base con la que hoy se asocia al cálculo de variaciones.

También otros reconocidos matemáticos generaron diversos aportes al cálculo de variaciones, ya sea describiendo fenómenos importantes o diferentes resultados. Entre estos matemáticos se

puede destacar a Adrien-Marie Legendre (1752-1833), Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859), Bernhard Riemann (1826-1866), David Hilbert (1862-1943) y Guillaume de l'Hôpital (1661-1704).

En español el primer tratado dedicado exclusivamente al cálculo de variaciones lo publicó en formato de monografía en 1858 el ingeniero español y premio nobel de literatura José Echegaray (Echegaray, 1858).

En el presente capítulo, gran parte de las soluciones se encontrarán mediante el planteamiento de ecuaciones diferenciales, por lo que se recomienda revisar el Anexo I para comprender los procedimientos principales de resolución de estas. Para una revisión más exhaustiva, el lector puede referirse a Edwards y Penney (2009).

El desarrollo del cálculo de variaciones ha sido ampliamente documentado en su contexto histórico, como queda en claro en Todhunter (1861), Goldstine (1981), Woodhouse (2004) y Freguglia y Giaquinta (2016).

4.2 Funcionales

Tal como explica Santander (1998), ejemplos como el principio de Fermat antes mencionado, y problemas como la determinación de la forma de equilibrio de un hilo flexible e inextensible o la determinación de la curva que encierra un área máxima con perímetro dado (problema de Dido), *“muestran la necesidad de considerar, junto con las funciones de varias variables, un tipo más general de aplicaciones, que a cada función de un determinado conjunto de funciones le asocian un número real. Desde un punto de vista formal, se trata simplemente de aplicaciones de ciertos conjuntos de funciones en la recta real \mathbb{R} , y por tanto encajan dentro de la definición general de función, como aplicación entre conjuntos. Pero es tradicional y resulta conveniente usar en estos casos el nombre de funcional, para enfatizar aquellos aspectos en los que el cálculo con funciones de varias variables difiera del cálculo con este nuevo tipo de “funciones” definidas en espacios de funciones cuya dimensión es infinita”* (Santander, 1998).

Es importante notar respecto al dominio de un *funcional*, que a diferencia del caso \mathbb{R}^n para las funciones típicamente usadas, no existe un espacio “universal” de funciones. De esta forma,

especificar el tipo de espacio del dominio del funcional es también parte de la formulación del problema (Liberzon, 2012). La clase de funciones $y(x)$ en la que está definido un funcional $J(y(x))$ se denomina *campo de definición del funcional* (Krasnov *et al.*, 1976).

Los espacios de funciones, o campo de definición del funcional, que se ven recurrentemente en el cálculo de variaciones incluyen los siguientes conjuntos (Kot, 2014):

- $C[a, b]$: el espacio de funciones reales que son continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$
- $C^1[a, b]$: el espacio de funciones reales que son continuas y que poseen primera derivada continua en el intervalo cerrado $[a, b]$
- $C^2[a, b]$: el espacio de funciones reales que son continuas y que poseen primera y segunda derivadas continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$
- $C[a, b]$: el espacio de funciones reales que son continuas por trozos en el intervalo cerrado $[a, b]$
- $C^1[a, b]$: el espacio de funciones reales que son continuas y que poseen primera derivada continua por trozos en el intervalo cerrado $[a, b]$

Kot (2014) observa además que los espacios de funciones reales continuas por trozos ($C[a, b]$ y $C^1[a, b]$) pueden tener un número finito de discontinuidades en el intervalo $[a, b]$. En este caso, sin embargo, los límites por la izquierda y por la derecha deben existir donde se encuentra cada discontinuidad.

Se define *extremal* (*extremun*) de un funcional a su máximo o mínimo. El término fue introducido en 1879 por Paul du Bois-Reymond (1831-1889), quien se habría cansado de decir siempre “máximo o mínimo” e inventó una palabra que incluyera ambos conceptos (Kot, 2014).

En base a lo anterior se define el siguiente funcional (o función de funciones):

$$J(y(x)) = \int_a^b F(x, y(x), y'(x)) dx \quad (4.1)$$

, donde:

$$y(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$J(y(x)): C^1 \rightarrow \mathbb{R}$$

Se observa que $y(x)$ corresponde a una función de \mathbb{R} en \mathbb{R} , mientras que $J(y(x))$, que va desde un espacio de funciones C^1 a \mathbb{R} , es un funcional.

En el cálculo de variaciones, y en general en los problemas de optimización dinámica, se van entonces a optimizar funcionales y no funciones. En particular notamos que el VAN, uno de los factores más importantes a maximizar en el problema minero, corresponde justamente a un funcional.

A continuación, para un mejor entendimiento del concepto de funcional se muestran ejemplos de alguno de ellos.

4.2.1 Ejemplos de funcionales

Se analizarán tres ejemplos particulares de funcionales.

1. Área bajo la curva $y = y(x)$

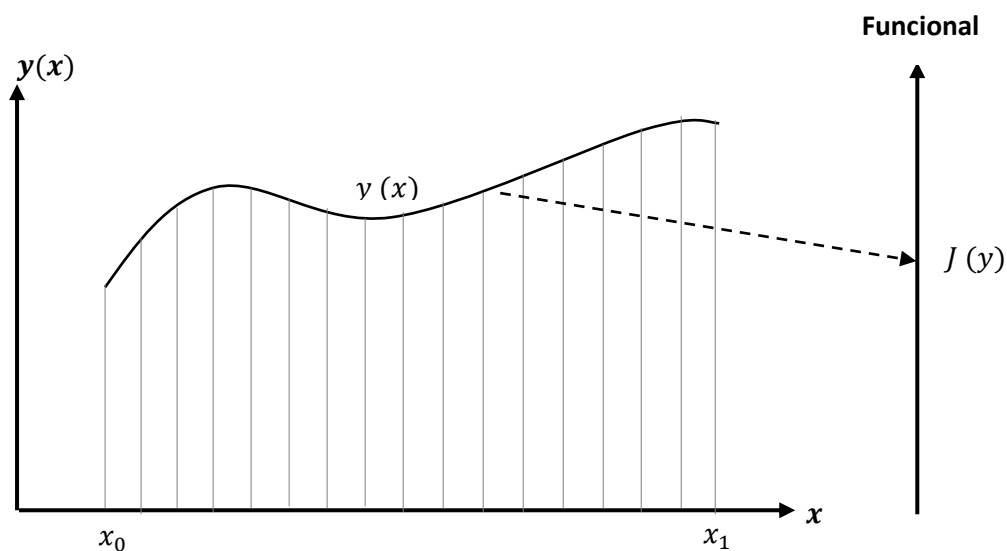


Figura 4.1. Funcional de área bajo la curva

Si la curva se define como en la Figura 4.1 se puede notar que se cumplirá que el área bajo la curva definida como el funcional $J(y(x))$ quedará expresado por:

$$J(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} y(x) dx \quad (4.2)$$

Notar que el área bajo una curva es un escalar. Ahora, si se quiere observar comparativamente tres curvas distintas y sus respectivos funcionales, se puede observar esto en la Figura 4.2.

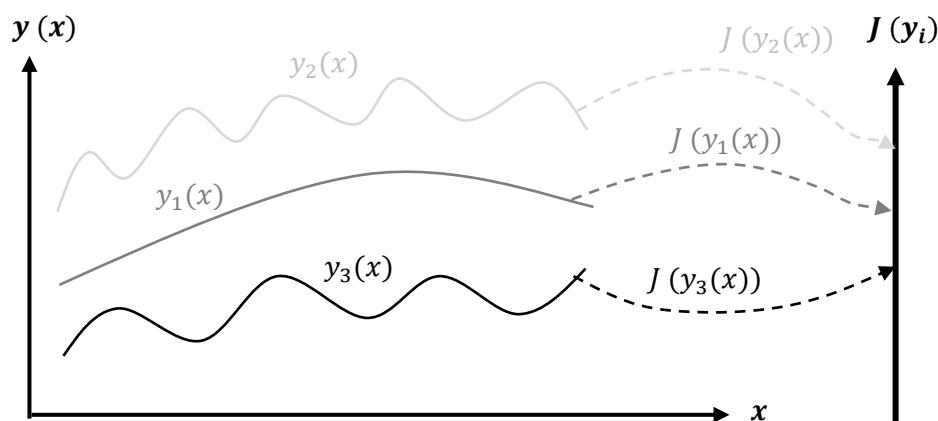


Figura 4.2. Conjunto de funcionales

Luego, si $y \in \mathbb{C}^1$ se cumple que:

$$J(y_2) > J(y_1) > J(y_3) \quad (4.3)$$

Se observa además que pueden existir infinitas funciones que tomen el mismo valor de $J(y_i)$.

2. Largo de una curva $y = y(x)$

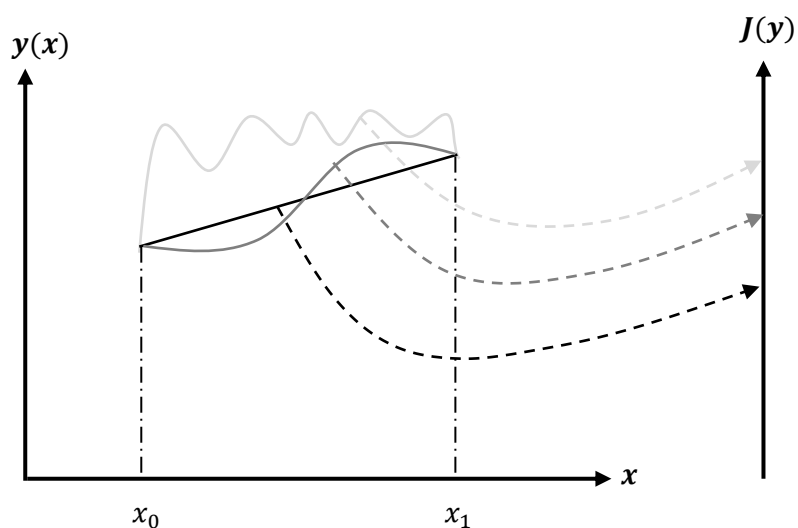


Figura 4.3. Funcional del largo de una curva

Un segundo funcional estará dado por el largo de una curva $y = y(x)$ entre x_0 y x_1 . La gráfica asociada estará dada por la Figura 4.3.

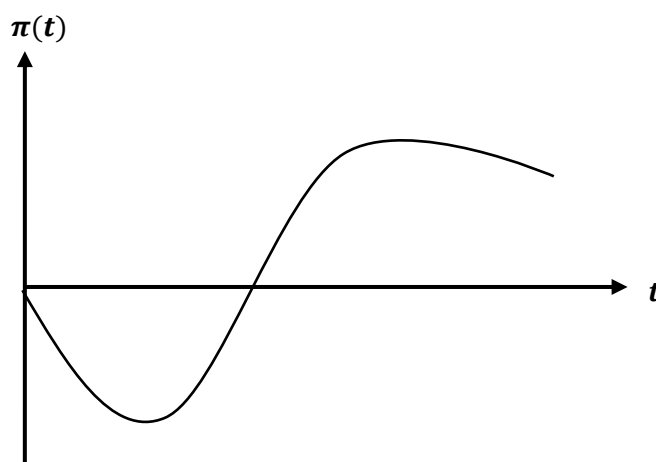
En este caso se tiene que:

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx \quad (4.4)$$

Se puede notar que el funcional de la curva negra (la recta) es el más pequeño. Más adelante se demostrará formalmente, utilizando cálculo de variaciones, que la recta es la curva que minimiza precisamente la distancia entre dos puntos.

3. VAN de los flujos de caja

Supóngase que una mina cuenta con flujos de caja dados por $\pi(t)$. Los flujos de caja corresponden al monto efectivo que está entrando y saliendo de la caja de la empresa, en este caso la mina, en cada instante de tiempo.

**Figura 4.4. Flujos de caja a través del tiempo**

Por otra parte, debido a que la evaluación es en tiempo continuo, se pueden descontar los flujos de caja por la tasa e^{-rt} en donde r corresponde a la tasa en tiempo continuo.²⁹

²⁹ Debido a que el valor del dinero cambia en el tiempo, es decir, un mismo dólar no tiene el mismo poder adquisitivo hoy que el que tenía en el pasado, es necesario descontar los flujos futuros trayéndolos al presente mediante una tasa de descuento.

Si se suman los flujos de caja descontados se obtendrá el VAN de un proyecto.

Sean:

- $\pi(t)$: Flujo de caja en un instante de tiempo.
- e^{-rt} : Tasa de descuento en tiempo continuo.
- $VAN(\pi(t))$: Funcional del VAN.

Luego, el funcional del VAN estará dado por:

$$VAN(\pi(t)) = \int_0^T e^{-rt} \pi(t) dt \quad (4.5)$$

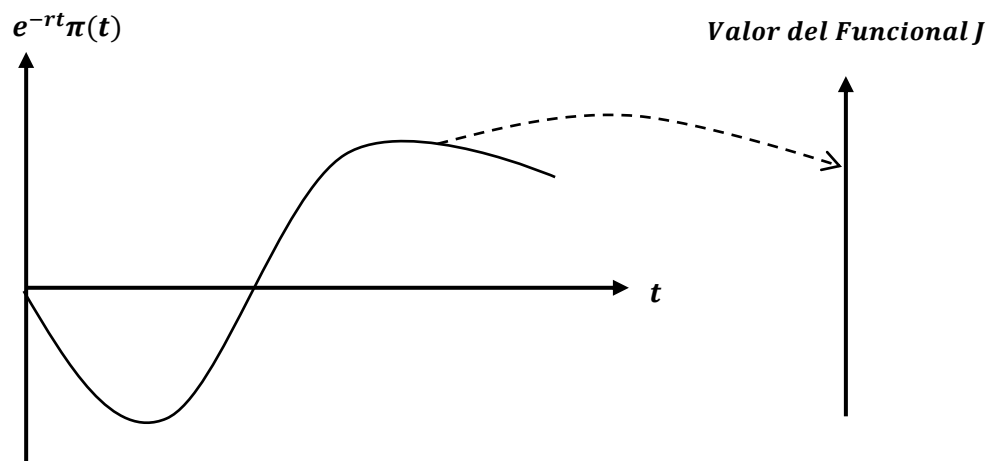


Figura 4.5. Funcional del VAN

Notar que el $VAN(\pi(t))$ es el área bajo la curva dada por $e^{-rt}\pi(t)$.

En cuanto a la tasa de descuento de la empresa (r), esta será generalmente positiva. Aunque una tasa negativa (de uso común en la *economía ecológica*) no es relevante cuando se resuelve el problema de la explotación óptima de minas, se debe notar que las tasas de descuento de las empresas mineras han ido disminuyendo en el tiempo (Auger y Guzmán, 2010).

Se debe notar además que el flujo de caja π puede depender a su vez de $y'(x)$, $y(x)$ y de x :

$$\pi = \pi(y'(x), y(x), x) \quad (4.6)$$

4.2.2 Planteamiento de problemas de cálculo de variaciones

A continuación, se plantearán dos problemas simples del cálculo de variaciones.

1. De todas las curvas que unen los puntos A y B en el plano, encontrar la que minimiza la distancia entre ellos.

El problema se puede expresar matemáticamente como:

$$\min_{y(x)} \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx \quad (4.7)$$

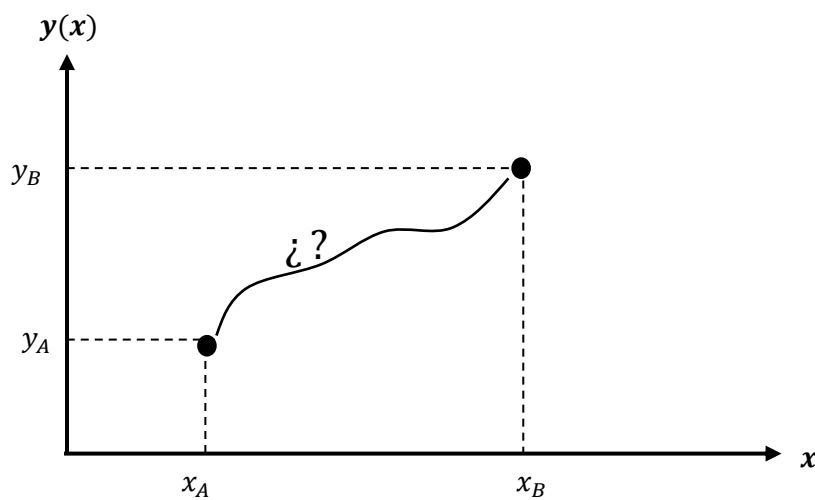


Figura 4.6. Curva que minimiza la distancia entre A y B

Si bien el problema planteado puede resolverse sin cálculo de variaciones, se observa que esta herramienta permitirá resolver de forma más generalizada el problema, por ejemplo, para encontrar la distancia mínima entre dos puntos no solo sobre un plano, sino que también sobre una superficie.

RECUADRO 4.1

¿CUÁL ES LA CURVA QUE MINIMIZA LA DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS SOBRE UNA SUPERFICIE?

Piense, por ejemplo, cuál es la trayectoria que toma un avión que va de Santiago a Sídney. ¿Con objeto de minimizar el tiempo de vuelo (y consumo de combustible) ¿El avión tomará acaso una trayectoria que vista en planta es una recta, o bien, una que parece más una curva? Se observará empíricamente que el recorrido propuesto pasa cercano al Polo Sur, lo cual a priori puede parecer extraño, sin embargo, la trayectoria que toma es de hecho la de mínima distancia y es una curva conocida como **geodésica**.

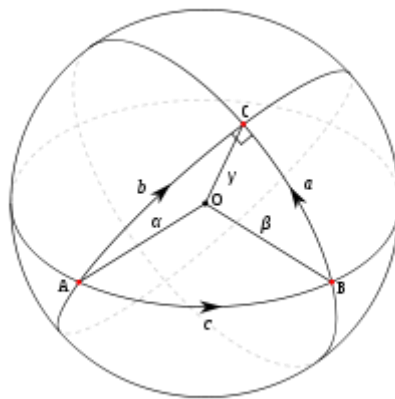


Figura 4.7 Curvas geodésicas sobre una esfera

La curva que une los puntos A y B de la Figura 4.7 es la representación gráfica de una curva geodésica (que en el caso de la esfera se sabe además corresponde a una curva cerrada). Aunque pudiera parecer innecesario recurrir al cálculo de variaciones para determinar la geodésica de una esfera, lo cierto es que uno de los grandes éxitos del cálculo de variaciones ha sido precisamente permitir derivar las curvas geodésicas de una superficie cualquiera.

2. Encontrar la curva que une dos puntos en la vertical y minimiza el tiempo de recorrido entre los puntos anteriormente mencionados bajo el efecto de la gravedad.

Para resolver este problema será necesario recurrir a las ecuaciones de conservación de la energía y al diferencial de arco que formará la partícula en movimiento cuando viaje a través de la curva que une dos puntos (A y B). Es común pensar que la curva que minimiza el tiempo es una línea recta descendente, o la sección de una parábola, pero luego de aplicar las ecuaciones que rigen este problema será posible descubrir que la curva no va a ser ninguna de estas dos.

El problema puede representarse gráficamente de la siguiente forma:

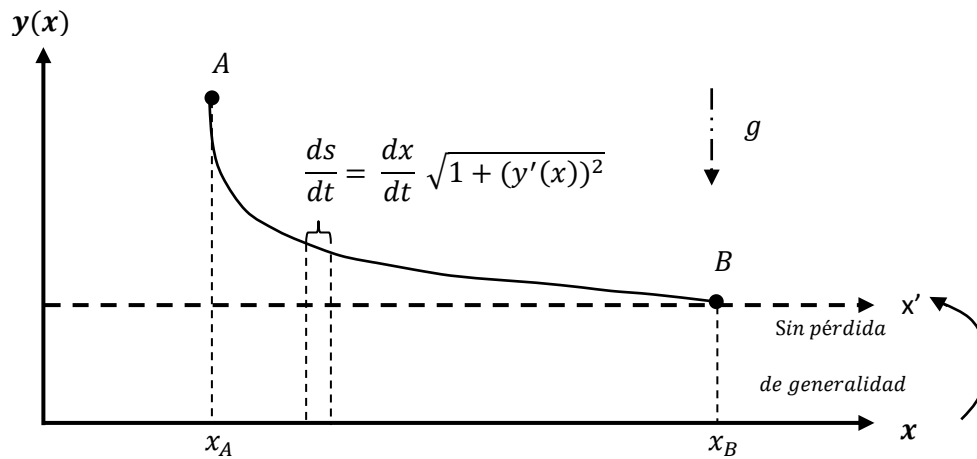


Figura 4.8. Curva que minimiza el tiempo entre el recorrido de A hasta B

(1) Principio de Conservación de la Energía:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh \quad (4.8)$$

$$v = \sqrt{2gh} \quad (4.9)$$

(2) Diferencial de arco:

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{1 + y'(x)^2} \frac{dx}{dt} \quad (4.10)$$

Usando (4.9) y (4.10) se tiene que:

$$\sqrt{2gy(x)} = \sqrt{1 + y'(x)^2} \frac{dx}{dt} \quad (4.11)$$

$$dt = \frac{\sqrt{1+y'(x)^2}}{\sqrt{2gy(x)}} dx \quad (4.12)$$

Integrando,

$$T(B) - T(A) = \int_{x_A}^{x_B} \frac{\sqrt{1+y'(x)^2}}{\sqrt{2gy(x)}} dx \quad (4.13)$$

Finalmente, el problema a resolver pasa por minimizar el siguiente funcional:

$$\min_{y(x)} \int_{X_A}^{X_B} \frac{\sqrt{1+y'(x)^2}}{\sqrt{2gy(x)}} dx \quad (4.14)$$

El planteamiento de este problema fue realizado por primera vez en 1696 y fue resuelto el mismo año. Aunque Galileo ya había pensado en este problema algún tiempo atrás, él pensaba que la solución se trataba de una parábola. No obstante, tal como se demostró en 1696, la solución no era una parábola, sino que era una curva que se llamó braquistocrona (gr. βραχίστος *brachistos* 'el más corto', χρόνος *chronos* 'intervalo de tiempo'). Más adelante se verá la forma que esta toma.

3. De entre todas las curvas cerradas que tienen un perímetro dado, ¿Cuál es la que encierra mayor área?

RECUADRO 4.2

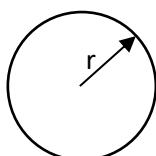
EL PROBLEMA DE DIDO: ISOPERIMETRÍA

“La *isoperimetría* empezó con el problema al que se vio enfrentada la reina Dido, que fue encontrar la forma de la frontera que se debía poner en el suelo (utilizando tiras hechas con la piel de un buey) con el objeto de encerrar una superficie de área máxima. Si uno supone que una línea de costa recta, entonces la respuesta, que manifiestamente ha sido encontrada por la Reina Dido, es disponer estas tiras en forma de un semicírculo.

En una exposición mucho más reciente, Hildebrandt y Tromba (1996) dan una cuenta mucho más detallada de problemas isoperimétricos y de su recurrencia a lo largo de la historia. En particular, es interesante comprobar cuantas ciudades amuralladas en la Edad Media fueron construidas de modo de tener un perímetro aproximadamente circular, o ver en general que el crecimiento de muchas ciudades se ha dado en una forma casi circular” (Ashbaugh y Benguria, 2010)

Una aproximación al problema se puede realizar comparando dos superficies simples:

- (1) Circunferencia



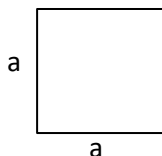
$$P = 2 \pi r$$

$$A = \pi r^2$$



$$A = \frac{P^2}{4 \pi} \quad (1)$$

(2) Cuadrado



$$P = 4a$$

$$A = a^2$$



$$A = \frac{P^2}{16} \quad (2)$$

De esta forma, es posible notar que el área más grande es la de la circunferencia. Ahora, ¿Cómo plantear el problema de forma más generalizada?

$$\max_{y(x)} \int_a^b y(x) dx \quad (4.15)$$

$$s. a. \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx = \frac{P}{2} \quad (4.16)$$

El planteamiento mostrado corresponde a un problema conocido como *isoperimétrico*, el cual se ha mencionado varias veces a lo largo del capítulo. La característica principal de este tipo de problema es que se maximiza un funcional sujeto a una restricción que también es un funcional integrado en los mismos límites de integración.

Cabe destacar que para el problema planteado la restricción se iguala al semi-perímetro. Lo anterior se debe a que se asume una simetría con respecto al eje x de tal forma que el planteo quede respecto a una función; recordar que para que una curva sea una función es necesario que solo haya una imagen para cada x .

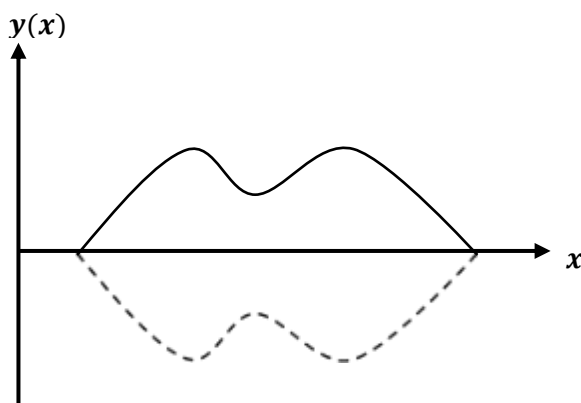


Figura 4.9. Perímetro de la figura con simetría en el eje x

4.3 Condición de primer orden para el cálculo de variaciones

Con algunos problemas ya expuestos, ahora será necesario plantear la base matemática que permitirá determinar las soluciones a estos mediante el cálculo de variaciones. Para derivar la forma general de resolver estos problemas se utilizarán una serie de lemas, ecuaciones y teoremas que serán la base para comprender el comportamiento de los funcionales y las condiciones que estos deberán cumplir para determinar las soluciones de los problemas.

4.3.1 Lema fundamental del cálculo de variaciones

La primera herramienta que se utilizará es el lema fundamental del cálculo de variaciones, que fue expuesto por du Bois-Raymond en el año 1879, el que será clave para poder demostrar la condición de primer orden, derivada para un caso particular por Euler y para el caso general por Lagrange.

RECUADRO 4.3

LEMA FUNDAMENTAL DEL CALCULO DE VARIACIONES

Si $\alpha(x) \in C^0[a, b]$ y si

$$\int_a^b \alpha(x)h(x) = 0$$

Para todo $h(x) \in C^0[a, b]$ tal que

$$h(a) = h(b) = 0$$

Entonces $\alpha(x) = 0$ para todo $x \in [a, b]$.

Este lema establece que si se tiene una función $\alpha(x)$ que es continua en el intervalo $[a, b]$ y que además la integral entre $\alpha(x)h(x)$ en $[a, b]$ es cero para cualquier función $h(x)$ continua en dicho intervalo tal que pasa por los puntos a y b pertenecientes al eje x , por ejemplo:

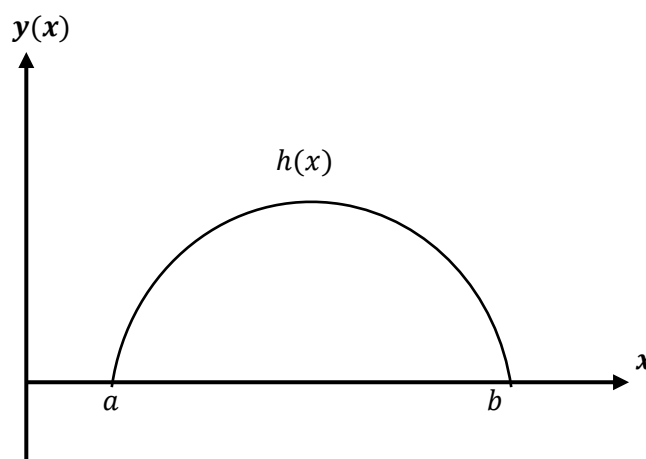


Figura 4.10. Función $h(x)$

Entonces, para que la integral de la multiplicación entre $\alpha(x)h(x)$ sea cero, necesariamente $\alpha(x)$ debe ser cero para todo x perteneciente al intervalo $[a, b]$.

La demostración clásica (Kamien y Schwartz, 1991) supone que la conclusión no es verdadera (demostración por contradicción), es decir, $\alpha(x)$ es no-negativo para algún subintervalo (sin pérdida de generalidad se puede tomar $[a, b]$, y que $0 < a < b$). Entonces, puesto que $\alpha(x)$ es continua, $\alpha(x) > 0$ en el intervalo $[a, b]$. Si se construye una función $h(x)$ que satisfaga las condiciones del lema, por ejemplo, la planteada en la Figura 4.10.

$$h(x) = \begin{cases} (x-a)(b-x) & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{e. o. c} \end{cases} \quad (4.17)$$

Calculando, se obtendrá que:

$$\int_a^b \alpha(x)(x-a)(b-x)dx > 0 \quad (4.18)$$

Nótese que la integral en (4.18) es positiva dado que el integrando es mayor a cero. Esto contradice la hipótesis que sostiene el lema fundamental del cálculo de variaciones para las funciones $h(x)$ en el intervalo $[a, b]$. Un argumento similar muestra que considerando una función $\alpha(x) < 0$ en el intervalo $[a, b]$ lleva a la misma contradicción. Suponer que la conclusión del lema es falsa mientras que la hipótesis es cierta lleva a una inconsistencia, verificando con ello el lema. ■

4.3.2 Derivación de la condición de primer orden para el cálculo de variaciones

Una vez planteado el lema fundamental del cálculo de variaciones es necesario definir una terminología que sirva para derivar la condición de primer orden que permitirá encontrar la solución a los problemas antes expuestos.

Las primeras aproximaciones respecto a esto las dieron Leonhard Euler (1744) y Joseph Lagrange (1762). Euler fue la primera persona en sistematizar el estudio de problemas variacionales y derivó un método general para resolver estos problemas, el que luego fue desechado por él mismo para pasar a utilizar el “método de variaciones” de Lagrange, un método más “elegante”, por lo que posteriormente pasó a llamar a su método “cálculo de variaciones” en honor a Lagrange. El aporte de ambos matemáticos en conjunto generó las condiciones necesarias para encontrar las soluciones de los problemas de cálculo de variaciones, en donde finalmente se encontrará la conocida ecuación de Euler-Lagrange, que indicará las condiciones en donde se alcanzarán los extremos (máximo o mínimo) de un problema variacional.

Siguiendo a Lagrange se definirá de esta forma:

$$\Delta J(h) = J(y + h) - J(y) \quad (4.19)$$

, donde ΔJ es la *diferencia* del funcional J , y $h(x)$ es una función cualquiera. Gráficamente, lo anterior se puede representar según aparece en la Figura 4.11.

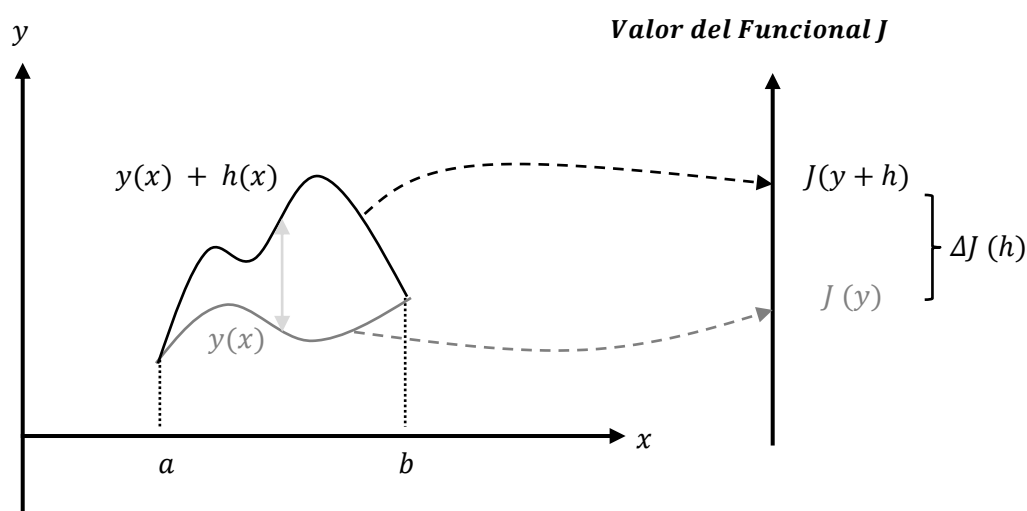


Figura 4.11. Representación de la variación en el valor del funcional J

Se definirá una curva $y(x)$ entre los puntos a y b del eje x . Esta curva puede ser desplazada en $h(x)$, generando la curva $y(x) + h(x)$, la que estará sobre la curva $y(x)$ si es que $h(x) > 0$ y bajo la curva $y(x)$ en el caso contrario. Cada una de estas dos curvas se podrá ingresar a un funcional, donde al evaluarlas generarán distintos valores, lo que se puede representar en la recta vertical a la derecha de la Figura 4.11. Si, por ejemplo, el funcional fuera el área bajo la curva, cada curva evaluada en el funcional entregará cierta área, siendo mayor en el caso de la curva $y(x) + h(x)$ ya que esta se encuentra más arriba que la curva $y(x)$. Los valores de ambas curvas evaluadas en el funcional serán representados por $J(y)$ para la curva $y(x)$ y $J(y + h)$ para la curva $y(x) + h(x)$, lo que generará una diferencia que será llamada $\Delta J(h)$.

En particular, si h (nótese que se omite el argumento para simplificar la exposición) es lo suficientemente pequeño, es decir, si se realiza una leve perturbación sobre y (recordar que $h(x)$ ya no es un escalar, sino que es una función), la variación $\Delta J(h)$ debiese depender de $h(x)$, lo que permite reescribir la expresión (4.19) de la siguiente manera:

$$\Delta J(h) = \varphi(h) + \varepsilon ||h|| \quad (4.20)$$

Esto quiere decir que se tendrá una componente que es un funcional de h , $\varphi(h)$, más un error ε multiplicado por el tamaño de h , $||h||$. Si se considera que $||h|| \rightarrow 0$, el error ε va a tender a cero, es decir, si h es una pequeña perturbación, el valor de $\Delta J(h)$ va a depender solo de h y no de y .

Con esto ya planteado, será posible definir un nuevo operador que será bastante útil de aquí en adelante, el que se conoce como “*variación de $J(h)$* ”, y se define de la siguiente manera:

$$\varphi(h) = \delta J(h) \quad (4.21)$$

Entonces, si h es suficientemente pequeño y se perturba la curva en un cierto valor de h , el funcional variará en un valor $\delta J(h)$.

En cálculo de funciones, dy representa el diferencial de y , lo que no es otra cosa que una diferencia infinitesimal en el eje y . En cálculo de funcionales, δJ es una variación en el valor del funcional.

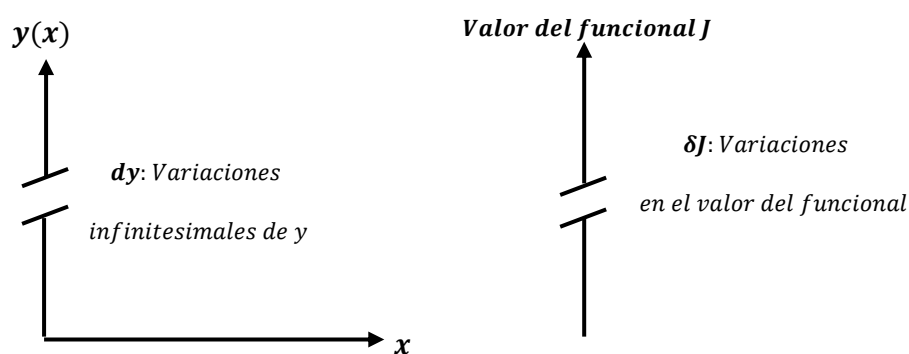


Figura 4.12. Representación del lugar donde viven las variaciones en cálculo funcional y variacional.

Para derivar las condiciones de primer orden será necesario exponer el siguiente teorema:

RECUADRO 4.4

TEOREMA

Una condición necesaria para que $y(x) \in C^1$ sea un extremo del funcional $J(h)$ es que $\forall h(x)$ la $\delta J(h)$ evaluada en el óptimo sea igual a cero.

Matemáticamente se escribe de la siguiente manera:

$$\boxed{\delta J(h)_{y=y^*} = 0} \quad (4.22)$$

La ecuación (4.22) corresponde a una *condición de primer orden*.

Se espera que si y^* es un máximo (sin pérdida de generalidad, se puede reconstruir el argumento para un mínimo), se cumpla que:

$$J(y^* + h) - J(y^*) < 0 \quad \forall h \quad (4.23)$$

O bien:

$$J(y^* + h) < J(y^*) \quad \forall h \quad (4.24)$$

Pues si y^* es un óptimo, debe ser un extremal de $J(y)$. Debido a lo anterior se deduce que cualquier perturbación debería dar un número menor a $J(y^*)$ independiente del valor que tome dicha perturbación, en este caso, h .

En particular, si h es pequeño:

$$J(y^* + h) - J(y^*) \approx \delta J(h) < 0 \quad (4.25)$$

Si:

$$\delta J(h) < 0 \quad (4.26)$$

Entonces se sabría que $J(y^*)$ no puede ser máximo. Análogamente, si:

$$\delta J(h) > 0 \quad (4.27)$$

Entonces, se sabría que $J(y^*)$ no puede ser un mínimo.

De esta forma, la única posibilidad de que y sea un extremal, es decir, que y^* sea un óptimo, es que:

$$\delta J(h) = 0 \quad (4.28)$$

Este teorema es de vital importancia porque permite establecer la condición que se debe cumplir para calcular la ecuación que deja resolver el problema de encontrar el máximo o el mínimo de un funcional. Entonces, lo que falta para llegar a esta condición es encontrar la variación del funcional $J(y)$. Para esto se define lo siguiente:

$$\Delta J = \int_a^b F(x, y, y') dx \quad (4.29)$$

Donde tanto y como y' están en función de x , pero para efectos de simplicidad de notación se escribirá únicamente y' en lugar de $y'(x)$. Para este funcional, la variación de $J(y)$, para una perturbación $h(x)$ pequeña se puede escribir como $\Delta J(y) \approx \delta J(y)$, lo que se puede expresar de la siguiente forma:

$$\Delta J = J(y + h) - J(y) = \int_a^b F(x, y + h, y' + h') dx - \int_a^b F(x, y, y') dx \quad (4.30)$$

Como se asume que $h(x)$ es pequeño, entonces el error es cercano a cero. Luego, el primer término se obtiene de reemplazar en la expresión de ΔJ todo lo que tenga la variable y por $y +$

h . Por tanto, donde se tiene y' se debe reemplazar $(y + h)'$, pero se debe recordar que la derivada de la suma es la suma de las derivadas (dado que la derivada es un operador lineal), por lo que se obtiene la expresión antes escrita. Ahora, dado que los límites de las integrales de ambas expresiones son iguales, es posible sumarlas y obtener lo siguiente:

$$\Delta J = \int_a^b [F(x, y + h, y' + h') - F(x, y, y')] dx \quad (4.31)$$

Lo anterior se puede aproximar haciendo uso de la Expansión de Taylor (ver Recuadro 4.5). Para esto, se debe recordar que $F(x, y, y')$ depende, precisamente, de tres términos: x , y e y' , por lo que si se tiene una variación $h(x)$ lo suficientemente pequeña, se puede reescribir lo anterior como: $F(x, y + h, y' + h')$ evaluada en $h(x) = 0$, más la derivada parcial con respecto a y , que es el primer término que tiene $h(x)$, por $h(x)$; más la derivada parcial con respecto a y' , que es el segundo término que se varía en $h(x)$, por $h'(x)$. De esta manera se puede obtener lo siguiente:

$$\delta J \approx \Delta J = \int_a^b [F(x, y, y') + \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y} * h + \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} * h' - F(x, y, y')] dx \quad (4.32)$$

Lo interesante y conveniente de escribir ΔJ de esta manera es que es posible eliminar los términos iguales de la ecuación (4.32) y, por tanto, la variación de J viene dada únicamente por dos términos:

$$\Delta J = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} * h + \frac{\partial F}{\partial y'} * h' \right] dx \quad (4.33)$$

$$\Delta J = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y} h dx + \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y'} h' dx \quad (4.34)$$

Al separar la expresión (4.34), se tendrán dos integrales distintas, por tanto, para continuar derivando la condición de primer orden lo que se hará es reescribir la segunda integral utilizando la integración por partes.

RECUADRO 4.5

EXPANSIÓN DE TAYLOR EN VARIAS VARIABLES

Para una función de una variable f , el polinomio de Taylor de orden n , en torno al punto a , viene dado por:

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Ahora, para el caso de varias variables se tiene algo similar, con la salvedad de que se debe acompañar cada variable con su derivada parcial. A modo de ejemplo, para el caso de dos variables, el polinomio de Taylor de orden 1 en el punto $\vec{a} = (a_1, a_2)$ será:

$$f(\vec{a}) + \frac{1}{1!} \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{a})(x - a_1) + \frac{1}{1!} \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{a})(y - a_2)$$

Esto quiere decir que, de manera general, para m variables en torno al punto $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ el polinomio de orden 1 es:

$$f(\vec{a}) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a})(x_1 - a_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{a})(x_2 - a_2) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(\vec{a})(x_m - a_m)$$

Lo anterior, debido a que $1! = 1$. Además, es posible abreviar esta expresión como:

$$f(\vec{a}) + \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a})(x_i - a_i) = f(\vec{a}) + \nabla f(\vec{a})(\vec{x} - \vec{a})$$

Donde ∇ es el operador gradiente, definido como:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m} \right)$$

Considerando esto, se define la siguiente integración por partes:

$$u = \frac{\partial F}{\partial y'} \rightarrow u' = \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial F}{\partial y'} \right] \quad (4.35)$$

$$v' = h' \rightarrow v = h \quad (4.36)$$

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial y'} h' dx = \frac{\partial F}{\partial y'} h \Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial F}{\partial y'} \right] h dx \quad (4.37)$$

Entonces, retomando la expresión (4.34) para ΔJ y reemplazando por (4.37) tiene:

$$\Delta J = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y} h \, dx + \left. \frac{\partial F}{\partial y'} h \right|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial F}{\partial y'} \right] h \, dx \quad (4.38)$$

$$\Delta J = \left. \frac{\partial F}{\partial y'} h \right|_a^b + \int_a^b \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial F}{\partial y'} \right] \right\} h \, dx \quad (4.39)$$

En este punto, es necesario recordar que se tratan de encontrar las condiciones de primer orden para un funcional cualquiera $J(y)$, y lo que se tiene hasta ahora es que en esta condición de primer orden se debe tener $\delta J(y) = 0$. Para estas definiciones se tiene que $h(x)$ es cualquier función, pero en particular se va a exigir que si $h(x)$ parte desde los bordes de $y(x)$, entonces se debe cumplir que $h(a) = h(b) = 0$, dado que la perturbación no ocurre en los bordes de $y(x)$, si no que al medio del intervalo donde existe. Luego, recordando que $h(x)$ es genérica, las condiciones de primer orden se pueden resolver cuando existen límites $[a, b]$ fijos y conocidos para la integral del funcional $J(y)$. Esto indica que busca aquella curva que pase por los puntos a y b y que perturbe la función $y(x)$. Dicho lo anterior y considerando que si $h(a) = h(b) = 0$, entonces $\left. \frac{\partial F}{\partial y'} h \right|_a^b = 0$, ΔJ será lo que sigue:

$$\delta J(y) = \int_a^b \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial F}{\partial y'} \right] \right\} h \, dx = 0 \quad (4.40)$$

$$\forall h(x) \in C^1[a, b], \text{ tal que } h(a) = h(b) = 0$$

Ahora, por el lema fundamental del cálculo de variaciones, mencionado anteriormente, se tiene que:

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0 \quad (4.41)$$

Donde $F_y = \frac{\partial F}{\partial y}$ y $\frac{d}{dx} F_{y'} = \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial F}{\partial y'} \right]$. La ecuación (4.41) es la famosa ecuación de Euler-Lagrange, y en el presente libro se hará uso extensivo de la misma. Debido a la importancia que tiene esta ecuación en el cálculo de variaciones, en el Anexo II se pueden consultar casos especiales de la misma.

RECUADRO 4.6

ECUACIÓN DE EULER-LAGRANGE

Desde fines del siglo XVII se buscaba resolver problemas donde era necesario caracterizar curvas que minimizaran o maximizaran alguna cantidad. En este contexto, Euler con su obra *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minime Propietate Gaudendis* (1744) expuso el nacimiento de un método general que abordaba estos problemas de una misma naturaleza, procedimiento que no existía hasta el momento de manera general. Si bien este método era poco preciso, Euler utilizaba variados problemas concretos a modo de ejemplo. De esta manera, el método de máximos y mínimos aplicado a líneas curvas buscaba las curvas para las que una cierta magnitud alcanza su valor máximo o mínimo.

En 1736 Euler publicó la ecuación base del cálculo de variaciones, sin embargo, no era adecuada cuando los integrandos eran complicados. Es por esto que siguió desarrollando y aplicando su método a diversos problemas hasta que, en 1755, recibió una carta de Lagrange en la que este se mostraba interesado por su trabajo y le exponía cómo recuperar con un método analítico una condición necesaria para lo que el mismo llamaría variaciones. Lagrange introdujo ciertas modificaciones e innovaciones al método desarrollado por Euler e incorporó una notación especial para caracterizar una variación completa de una curva. De esta manera, al considerar sus nuevos argumentos, pudo obtener como conclusión la misma ecuación que Euler.

Este enfoque utilizado por Lagrange permitió aplicar algoritmos semejantes a los usados en el cálculo diferencial, lo que entusiasmó a Euler. Así, en 1762 Lagrange publicó sus resultados y, posteriormente, Euler expuso de manera detallada, perfeccionada y con muchos ejemplos una serie de trabajos de esta nueva área de las matemáticas: “El cálculo de variaciones”, en honor al término introducido por Lagrange de *variaciones* (De Teresa, 2007).

Lo derivado anteriormente se conoce como primera variación del cálculo de funcionales. Aunque es posible derivar de forma equivalente condiciones de segundo orden (para determinar si el extremal es mínimo o máximo) o incluso de tercer orden (requerida para casos especiales), estas derivaciones escapan el alcance de este libro. Aun así, dichas condiciones son de gran interés, por lo que se presentan a modo de resumen y de manera comparativa entre el cálculo de variaciones y el cálculo de funciones en la siguiente tabla:

Tabla 4.1. Condiciones de primer, segundo y tercer orden para funciones y funcionales. Fuente: Elaboración propia

	CÁLCULO DE FUNCIONES	CÁLCULO DE VARIACIONES
Condición	$\min_x f(x)$	$\min_{y(x)} \int_a^b F(x, y, y') dx$
Primer orden	$f'(x) = 0$	$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$
Segundo orden	$f''(x) < 0 \rightarrow \text{Máximo}$ $f''(x) > 0 \rightarrow \text{Mínimo}$	$F_{y'y'} = \frac{\partial^2 F}{\partial (y')^2} < 0 \rightarrow \text{Máximo}$ $F_{y'y'} = \frac{\partial^2 F}{\partial (y')^2} > 0 \rightarrow \text{Mínimo}$
Tercer orden	No existe (satisfecha la condición de segundo orden)	$F \in C^3$ (condición suficiente, no necesaria)

A continuación, se muestran las resoluciones de algunos ejercicios que quedaron planteados anteriormente en la Sección 4.2.

4.3.3 Ejercicios de aplicación

En esa sección se mostrarán dos ejercicios de los planteados previamente en los que se aplicarán todas las condiciones y teoremas expuestos hasta el momento.

1. Curva de longitud mínima entre dos puntos.

Sea el conjunto $S = \{f \in C^1[A, B] / y(A) = y_0, y(B) = y_1\}$. Se desea encontrar una curva que una los puntos (A, y_0) y (B, y_1) y que su longitud sea mínima. Además, se define la función $s(y(x))$ como la función para la longitud de la curva.

Gráficamente, el problema quedaría representado por:

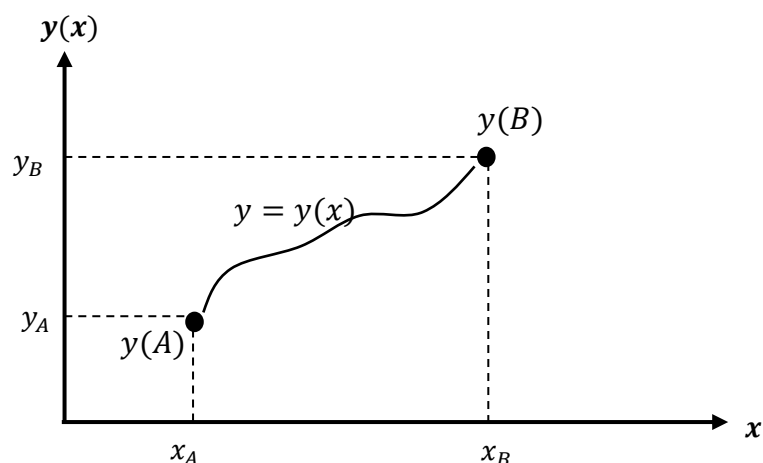


Figura 4.13. Curva mínima entre los puntos A y B

Primero se debe plantear un diferencial de longitud de curva en términos de diferenciales de x e y . Para una pequeña distancia se tiene que por el teorema de Pitágoras: $ds^2 = dx^2 + dy^2$. Luego, dividiendo por dx^2 , resulta:

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \quad (4.42)$$

$$ds = \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx \quad (4.43)$$

Análogamente el problema determinado por minimizar el funcional $F(x, y, y') = \sqrt{1 + y'(x)^2}$, que representa el diferencial de largo para la curva, quedaría de la siguiente manera:

$$\min_{y(x)} J(y) = \int_A^B \sqrt{1 + y'(x)^2} dx \quad (4.44)$$

, donde el funcional es $F(x, y, y') = \sqrt{1 + y'(x)^2}$. Usando la condición de primer orden:

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0 \quad (4.45)$$

$$F_y - \frac{d}{dx} \left[\frac{y'}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} \right] = 0 \quad (4.46)$$

Es posible notar que el funcional F depende solamente de y' , por lo tanto $F = F(y')$. Entonces:

$$0 - \frac{d}{dx} \left[\frac{y'(x)}{\sqrt{1+y'(x)^2}} \right] = 0 \quad (4.47)$$

Integrando la función con respecto a x se obtiene:

$$\frac{y'(x)}{\sqrt{1+y'(x)^2}} = c \quad (4.48)$$

$$y' = c\sqrt{1+y'(x)^2} \quad (4.49)$$

$$y'^2 = c^2(1+y'(x)^2) \quad (4.50)$$

Despejando y' :

$$y' = \sqrt{\frac{c^2}{1-c^2}} = m \quad (4.51)$$

Con m una constante cualquiera (a ser determinada por las condiciones de borde del problema). Integrando con respecto a x se tiene:

$$y^*(x) = mx + n \rightarrow y' = m \quad (4.52)$$

Con lo cual se deduce que el óptimo es una línea recta que pasa por los puntos (A, y_0) y (B, y_1) .

Para demostrar que este es mínimo, se debe utilizar la condición de segundo orden, expuesta en la Tabla 4.1: $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} > 0$. Es decir:

$$\frac{d}{dy'} \left[\frac{\partial F}{\partial y'} \right] = \frac{d}{dy'} \left[\frac{y'}{\sqrt{1+y'(x)^2}} \right] = \frac{1}{(1+y'(x)^2)^{\frac{3}{2}}} \Big|_{y^*} \quad (4.53)$$

Considerando que $y' = m$, entonces:

$$\frac{1}{(1+m^2)^{\frac{3}{2}}} > 0 \rightarrow \text{Corresponde a un Mínimo} \quad (4.54)$$

2. Problema de la curva que minimiza el tiempo de recorrido (braquistocrona)

En este problema se pedía encontrar la curva que une dos puntos en la vertical y minimiza el tiempo de recorrido entre los puntos anteriormente mencionados bajo el efecto de la gravedad.

El problema de la braquistocrona, enunciado primeramente por Bernoulli, fue uno de los problemas que originaron el estudio del cálculo de variaciones a finales del siglo XVII. El problema consiste en determinar la curva a través de la que el tiempo que tarde un objeto puntual en caer de un punto a otro sea mínimo.

Matemáticamente el problema se presentó en la Sección 4.2. Gráficamente puede representarse como:

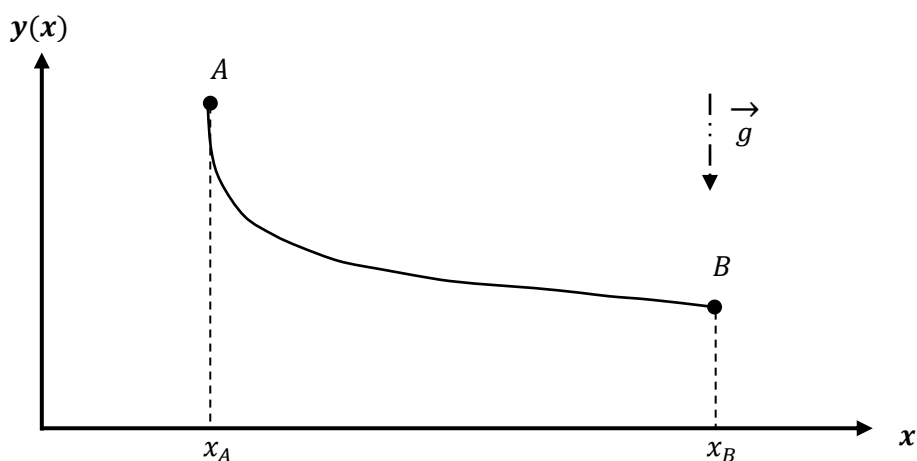


Figura 4.14. Curva que busca minimizar el tiempo recorrido entre los puntos A y B

Como se demostró en la Sección 4.2 el problema puede escribirse matemáticamente de la siguiente forma:

$$\min_{y(x)} \int_A^B \frac{\sqrt{1+(y'(x))^2}}{\sqrt{2gy}} dx \quad (4.55)$$

De aquí: $F(x, y, y') = \frac{\sqrt{1+y'(x)^2}}{\sqrt{2gy}}$.

El primer paso del cálculo de variaciones consistente entonces en resolver la condición de primer orden (ecuación de Euler-Lagrange):

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0 \quad (4.56)$$

Como $F(x, y, y')$ no depende de x , la condición de primer orden es equivalente a resolver:

$$F - y'F_{y'} = k \quad (4.57)$$

, de donde:

$$F_{y'} = \frac{y'}{\sqrt{2gy}\sqrt{1+y'(x)^2}} \quad (4.58)$$

De aquí:

$$F - y'F_{y'} = \frac{\sqrt{1+y'(x)^2}}{\sqrt{2gy(x)}} - \frac{y'^2}{\sqrt{2gy(x)}\sqrt{1+y'(x)^2}} = C \quad (4.59)$$

Multiplicando la expresión anterior por $\sqrt{2g}$:

$$y[1 + y'^2] = K \quad (4.60)$$

, donde $K = \sqrt{2g}C$. Luego, despejando y' :

$$y' = \sqrt{\frac{K}{y(x)} - 1} \quad (4.61)$$

Lo que corresponde a una ecuación diferencial de variables separables, por lo que separando ambos términos:

$$\frac{dy}{\sqrt{\frac{K}{y(x)} - 1}} = dx \quad (4.62)$$

Integrando a ambos lados:

$$\int_{y(a)}^{y(b)} \frac{dy}{\sqrt{\frac{K}{y(x)} - 1}} = b - a \quad (4.63)$$

, de donde se puede reescribir el resultado en coordenadas polares como:

$$x(\theta) = r(\theta - \sin \theta) + K \quad (4.64)$$

$$y(\theta) = r(1 - \cos \theta) \quad (4.65)$$

La curva anterior corresponde a una cicloide, tal como se puede apreciar en la Figura 4.15, y corresponde al lugar geométrico originado por un punto de una circunferencia al rodar por una superficie lisa sin deslizar.

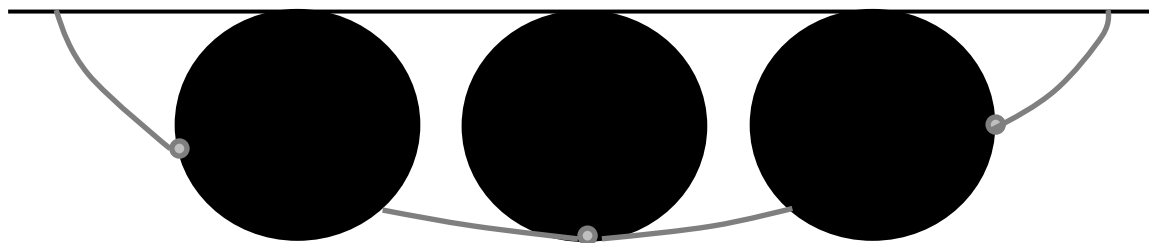


Figura 4.15. Cicloide

Finalmente, la representación gráfica de dicha curva se verá de la siguiente forma:

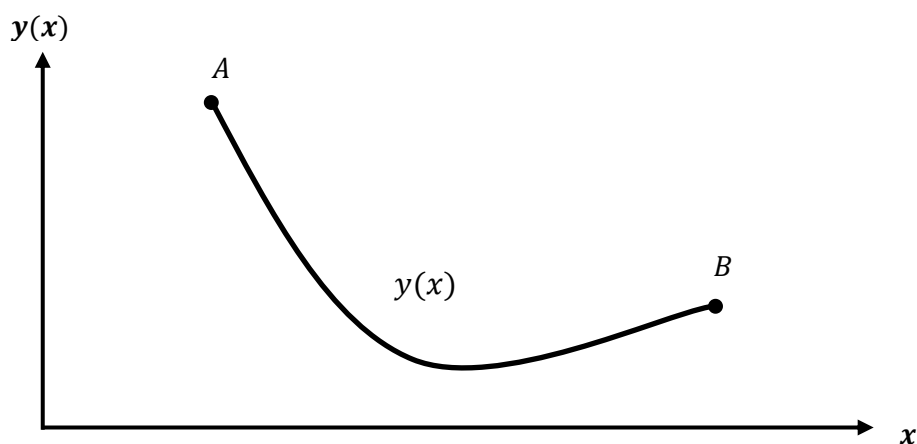


Figura 4.16. Solución del problema del tiempo mínimo de trayecto entre A y B

Se debe notar que, a diferencia de lo que se podría pensar intuitivamente, la solución óptima corresponde a una curva que desciende más allá del punto más bajo y luego vuelve a subir.

4.4 Cálculo de variaciones en múltiples variables

Hasta ahora solo se ha trabajado con problemas de optimización en donde la incógnita correspondía a una única variable, sin embargo, en la vida cotidiana es común que se presenten situaciones donde la respuesta óptima está asociada a encontrar el valor de más de una incógnita (en este caso más de una función incógnita).

Se analizará el caso de dos variables por simplicidad en la exposición, sin embargo, es posible extrapolar estos resultados a un caso de un número arbitrario de dimensiones. Para esto, en una primera instancia se planteará un cierto problema matemático que puede ser resuelto mediante

el uso de cálculo variacional de dos variables, luego se planteará la fórmula general de Euler-Lagrange en dos dimensiones y finalmente se obtendrá la solución óptima del problema para este caso.

El problema que se presenta a continuación consiste en hallar, de entre todas las superficies en el espacio \mathbb{R}^3 con un borde determinado, aquella con área mínima. A continuación, se presenta gráficamente un ejemplo de una superficie cualquiera y su proyección en el plano xy .

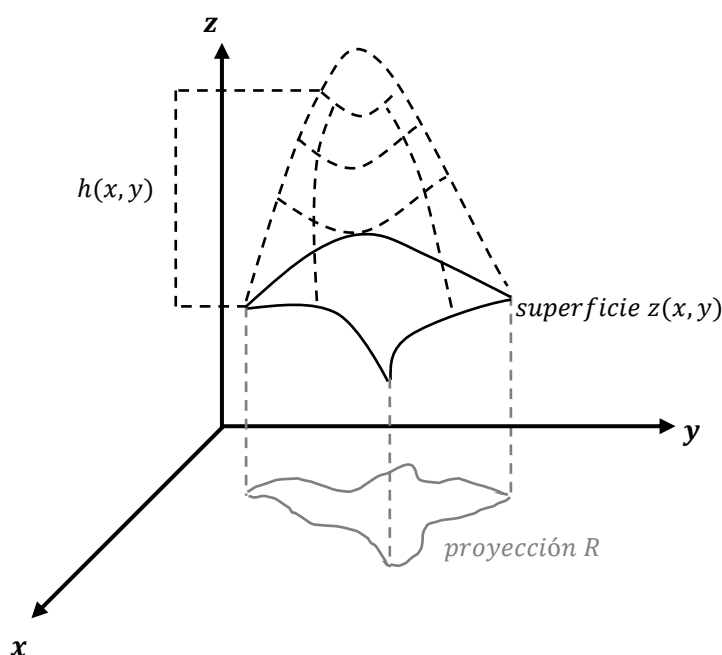


Figura 4.17. Superficie cualquier en el espacio con su respectiva proyección en el plano xy

Para poder determinar la forma de resolver estos problemas será necesario plantear los nuevos teoremas que regirán el comportamiento de estos funcionales.

4.4.1 Lema fundamental del cálculo de variaciones en dos dimensiones

Para resolver este ejercicio primero se planteará el problema general en dos dimensiones. Al igual que en el caso de una dimensión, se debe utilizar el hecho de que si $a(x, y)$ es una función continua en los reales tal que:

$$\iint_R a(x, y)h(x, y)dxdy = 0 \quad \text{para todo } h(x, y) \in C^2(R) \quad (4.66)$$

tal que:

$$\forall h(x, y) \in C^2(R) \mid h(x, y) = 0 \mid_{(x, y) \in \partial R} \quad (4.67)$$

entonces:

$$\alpha(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in R$$

Se deja al lector el demostrar este lema, aunque se recomienda elaborar una prueba similar a la desarrollada para el caso de una dimensión.

Ahora, de forma similar al caso derivado para una variable, se construye la diferencia de J :

$$\Delta J = J(z + h) - J(z) = \delta J(z) + \varepsilon \|h\| \quad (4.68)$$

$$\Delta J = \iint_R F(x, y, z + h, z_x + h_x, z_y + h_y) dx dy - \iint_R F(x, y, z, z_x, z_y) dx dy \quad (4.69)$$

Para un h infinitesimal se tendrá que $\Delta J \approx \delta J$:

$$= \iint_R [F_z h + F_{z_x} h_x + F_{z_y} h_y] dx dy \quad (4.70)$$

$$= \iint_R [F_z h] dx dy + \iint_R [F_{z_x} h_x + F_{z_y} h_y] dx dy \quad (4.71)$$

$$= \iint_R [F_z h] dx dy + \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x} F_{z_x} h + \frac{\partial}{\partial y} F_{z_y} h - \frac{\partial}{\partial x} F_{z_x} h - \frac{\partial}{\partial y} F_{z_y} h \right] dx dy \quad (4.72)$$

Luego, considerando el teorema de Green:

$$\iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\partial R} L dx + M dy \quad (4.73)$$

Usando esto en (4.72), se tendrá:

$$\iint_R \left(\frac{\partial}{\partial x} F_{z_x} h + \frac{\partial}{\partial y} (-F_{z_y} h) \right) dx dy = \oint_{\partial R} (-F_{z_y} h) dx + (F_{z_x} h) dy \quad (4.74)$$

Se debe observar que debido a que en la frontera precisamente se cumple que $h = 0$, la integral de línea en (4.74) debe ser también nulo. De esta forma se obtiene la variación de J :

$$\delta J = \iint_R \left[F_z - \frac{\partial}{\partial x} F_{z_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{z_y} \right] h dx dy \quad (4.75)$$

Si $\delta J = 0$, por el lema fundamental del cálculo de variaciones, entonces necesariamente se debe cumplir que:

$$F_z - \frac{\partial}{\partial x} F_{z_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{z_y} = 0 \quad (4.76)$$

La que corresponde a la ecuación de Euler-Lagrange para dos variables. Nótese la similitud que tiene esta ecuación con la derivada para el caso de una dimensión.

4.4.2 Cálculo de la superficie mínima

Uno de los problemas de mayor interés en el cálculo de variaciones de dos dimensiones es la búsqueda de las superficies de área mínima dado un contorno. Matemáticamente se puede escribir este problema como:

$$\min_z J(z(x, y)) = \iint_R dA = \iint_R \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy \quad (4.77)$$

, donde dA es el diferencial de área que se obtiene de acuerdo a lo mostrado en la Figura 4.18.

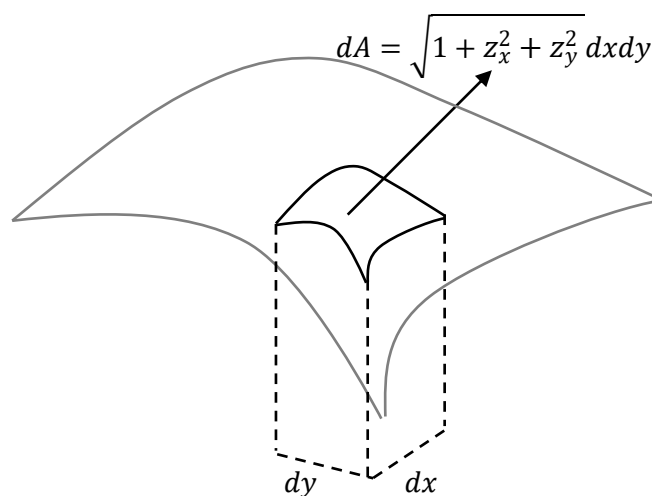


Figura 4.18. Diferencial de área en una superficie perteneciente a \mathbb{R}^3

La ecuación de Euler-Lagrange en dos dimensiones establece que $z(x, y)$ debe cumplir:

$$F_z - \frac{\partial}{\partial x} F_{z_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{z_y} = 0 \quad (4.78)$$

Reemplazando en esta expresión el problema dado en (4.77) se obtiene:

$$0 - \frac{\partial}{\partial x} \frac{z_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{z_y}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} = 0 \quad (4.79)$$

Desarrollando, la ecuación anterior es equivalente a:

$$(1 + z_x^2)z_{yy} - 2z_xz_yz_{xy} + (1 + z_y^2)z_{xx} = 0 \quad (4.80)$$

La ecuación (4.80) corresponde a una ecuación diferencial parcial de segundo orden no lineal. Este tipo de ecuaciones son en general de una alta complejidad y dificultad de resolución, y aunque más adelante en el libro se expondrán los principales métodos de resolución de las ecuaciones diferenciales parciales, lo cierto es que esta ecuación excede en dificultad lo posible a estudiar en este libro. Para una exposición más completa y en detalle de esta ecuación el lector puede consultar Osserman (1986), referencia de mediana dificultad considerada hoy como clásica.

Afortunadamente, existen soluciones “simples” a la ecuación (4.80), la que de hecho posee infinitas soluciones.

Una solución posible, considerada trivial, corresponde al plano (se deja al lector demostrar que esta ecuación satisface la ecuación (4.80)):

$$z(x, y) = ax + by + c \quad (4.81)$$

A continuación, se revisarán algunos ejemplos menos triviales que el plano.

4.4.3 Ejemplos de superficies mínimas

La ecuación de Euler-Lagrange para superficies mínimas es una ecuación bastante compleja por lo cual se le conocen muy pocas soluciones explícitas. En general se requiere de técnicas más avanzadas para encontrar de forma efectiva las superficies mínimas en casos distintos al plano, el cual resulta ser bastante trivial.

En el transcurso del siglo XVIII se descubrieron otras dos superficies mínimas relativamente sencillas, además del plano. Una de estas es la catenoide (Euler, 1744) la cual es, junto al plano, la única superficie mínima de revolución. Consiste en la superficie que se obtiene al rotar una catenaria alrededor de un eje co-planar, perpendicular a su eje de simetría y que no la corte. En la Figura 4.19 se presenta un ejemplo de la catenoide.

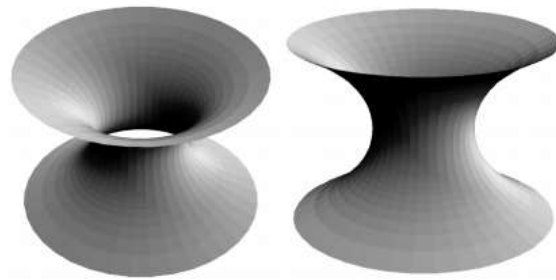


Figura 4.19. Catenoide

Para hallar la ecuación que define la catenoide no es conveniente utilizar la ecuación de Euler-Lagrange para superficies mínimas debido su complejidad. Usualmente se resuelve el problema mediante la minimización del área de una superficie de revolución a partir de la ecuación de Euler-Lagrange de una variable. El procedimiento se presenta a continuación:

$$\min_y 2\pi \int_{x_1}^{x_2} x \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} \right) dx \quad (4.82)$$

En este caso se tiene entonces que:

$$F\left(y, \frac{\partial y}{\partial x}, x\right) = x \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} \right) \quad (4.83)$$

Luego, utilizando la ecuación de Euler-Lagrange de una variable, visto anteriormente, se obtiene que:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad (4.84)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{x \frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} \quad (4.85)$$

Luego, de (4.84) se obtiene que (4.85) debe ser igual a una constante. De esta forma:

$$\frac{x \frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = cte = a \quad (4.86)$$

Despejando $y(x)$ de la ecuación diferencial ordinaria anterior:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{\sqrt{x^2+a^2}} \quad (4.87)$$

$$y = \int \frac{adx}{\sqrt{x^2+a^2}} \quad (4.88)$$

$$y(x) = a \cdot \arccos\left(\frac{x}{a}\right) + b \quad (4.89)$$

Obteniendo así la ecuación de la *catenoide*.

Otro ejemplo clásico de superficies mínimas es la del **helicoides recto**, la cual se define como la superficie engendrada por una recta horizontal que se desliza a velocidad constante a lo largo de un eje vertical al tiempo que gira alrededor de dicho eje, en un plano horizontal y a velocidad angular constante. A continuación, se presenta gráficamente un ejemplo de un helicoides recto.

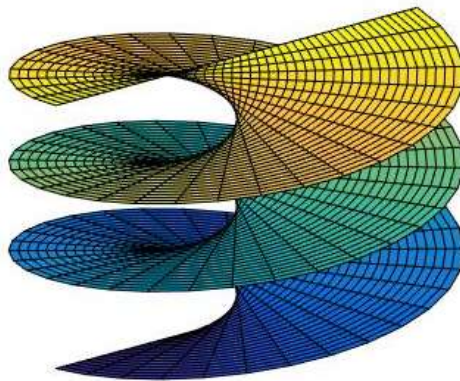


Figura 4.20. Ejemplo de un helicoides recto

A pesar de que se hallaron otras superficies mínimas a parte de las expuestas anteriormente, no fue hasta 1982 que el matemático brasileño Celso José da Costa (1949-) descubrió una nueva superficie mínima, que al igual que la catenoide y el helicoides recto, correspondía a una superficie mínima que estando inmersa en el espacio \mathbb{R}^3 no se auto-intersecta. Las técnicas utilizadas para el descubrimiento de esta superficie han sido de gran utilidad para el hallazgo de una variada gama de nuevas superficies mínimas.

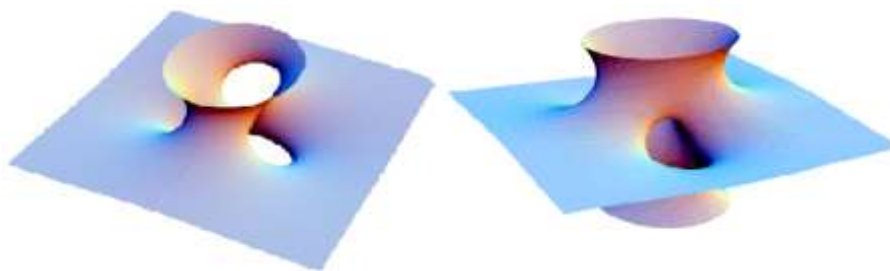


Figura 4.21. Superficie mínima de Costa

El lector interesado en el estudio de las superficies mínimas puede consultar Dierkes et al. (2010).

4.4.4 Cálculo de variaciones con múltiples incógnitas

Hasta ahora, en la extensión de funcionales a varias variables se ha considerado el caso en el cual el funcional contiene más de una variable independiente. En esta sub-sección, se estudiarán funcionales que dependen de más de una variable, pero donde no existe una función que pueda agrupar el efecto que tiene cada una de estas sobre el funcional.

Para resolver el problema anterior, se restringirá al caso de dos variables:

$$J(u, v) = \int_{x_0}^{x_1} L(x, u, v, u', v') dx \quad (4.90)$$

Con $u(x_0) = u_0, u(x_1) = u_1, v(x_0) = v_0, v(x_1) = v_1$

Análogamente al caso unidireccional, se define:

$$F(t, \tau) = J(u + t\varphi, v + \tau\psi) \quad (4.91)$$

Suponiendo que existe efectivamente un extremo local para J en (u^*, v^*) , se tiene que F tendrá un extremo local en $(t = 0, \tau = 0)$. De este modo, para que efectivamente exista un extremo local en $(0,0)$ para F , debe satisfacerse que:

$$\nabla F(0,0) = (0,0) \quad (4.92)$$

Lo que se traduce directamente en las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 0 = \int_{x_0}^{x_1} (L_u(x, u, v, u', v') \varphi + L_{u'}(x, u, v, u', v') \varphi') dx \quad (4.93)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} = 0 = \int_{x_0}^{x_1} (L_v(x, u, v, u', v') \psi + L_{v'}(x, u, v, u', v') \psi') dx \quad (4.94)$$

Se debe notar que las ecuaciones anteriores son análogas para el caso unidimensional, sólo que ahora en vez de tener solo una ecuación, existirán dos.

Análogamente al caso unidimensional, se pueden deducir las ecuaciones de Euler–Lagrange siguientes:

$$L_u(x, u, v, u', v') - \frac{d}{dx} L_{u'}(x, u, v, u', v') = 0 \quad (4.95)$$

$$L_v(x, u, v, u', v') - \frac{d}{dx} L_{v'}(x, u, v, u', v') = 0 \quad (4.96)$$

Nuevamente, es posible determinar que en el caso multivariado no se resuelve una ecuación única de Euler-Lagrange, sino que un conjunto de estas (tantas como variables independientes se tengan). De hecho, si se extiende el problema anterior para un caso con n incógnitas se obtiene:

$$J(u_1, u_2, \dots, u_n) = \int_{x_0}^{x_1} L(x, u_1, u_2, \dots, u_n, u_1', u_2', \dots, u_n') dx \quad (4.97)$$

Realizando un cálculo similar al realizado previamente se obtiene:

$$L_{u_i}(x, u_1, \dots, u_n, u_1', \dots, u_n') - \frac{d}{dx} L_{u_i'}(x, u_1, \dots, u_n, u_1', \dots, u_n') = 0, \quad \forall i \quad (4.98)$$

Por ejemplo, si se considera una superficie regular dada por la siguiente parametrización:

$$x(u, v) = (f(v) \cos(u), f(v) \operatorname{sen}(u), g(v)) \quad (4.99)$$

Cualquier curva regular contenida en la superficie se puede escribir mediante la siguiente parametrización:

$$(u, v) = (u(t), v(t)), \quad \text{con } t \in [0, T] \quad (4.100)$$

Si se busca la curva más corta que conecta dos puntos de la forma $(u(0), v(0))$ y $(u(T), v(T))$, esto se puede realizar minimizando el siguiente funcional:

$$J(u, v) = \int_0^T L(t, u, v, u', v') dt = \int_0^T I(t, u, v, u', v') dt \quad (4.101)$$

Donde I corresponde a la longitud de arco de la curva parametrizada, que en este caso corresponde a:

$$I = \sqrt{x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2} = \sqrt{f(v)^2 u'^2 + (f'(v)^2 + g'(v)^2) v'^2} \quad (4.102)$$

Reemplazando (4.102) en (4.101), las ecuaciones de Euler–Lagrange vendrán dadas por:

$$\frac{d}{dt} \frac{f(v)^2 u'}{I(u,v)} = 0 \quad (4.103)$$

$$\frac{f'(v)^2 u'^2 + (f'(v)f''(v) + g'(v)g''(v))}{I(u,v)} - \frac{d}{dt} \frac{(f'(v)^2 + g'(v))v'}{I(u,v)} = 0 \quad (4.104)$$

Para la resolución de las ecuaciones anteriores, se tomará el caso de un cilindro, cuyas ecuaciones vienen dadas por $f(v) = 1$ y $g(v) = v$. Considerando este caso, las ecuaciones de Euler Lagrange serán:

$$\frac{d}{dt} \frac{u'}{I(u,v)} = 0 \quad (4.105)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{v'}{I(u,v)} = 0 \quad (4.106)$$

Lo que implica que:

$$u' = C_1 \sqrt{u'^2 + v'^2} \quad (4.107)$$

$$v' = C_2 \sqrt{u'^2 + v'^2} \quad (4.108)$$

Con C_1 y C_2 constantes. Si se dividen ahora las dos ecuaciones anteriores, se obtiene:

$$u' = K v' \quad (4.109)$$

Con K una constante que da cuenta de la razón de C_1 y C_2 . De aquí, integrando a ambos lados se llega finalmente a la solución dada por:

$$u(t) = K v(t) + K' \quad (4.110)$$

Con K y K' constantes.

Luego, la solución a la curva más corta contenida en un cilindro está dada por una familia de curvas helicoidales contenidas en la superficie. La Figura 4.22 muestra precisamente la

solución obtenida. Esta representa la distancia mínima entre dos puntos contenidos en un cilindro. Así, la curva derivada recibe el nombre de *geodésica* de un cilindro.

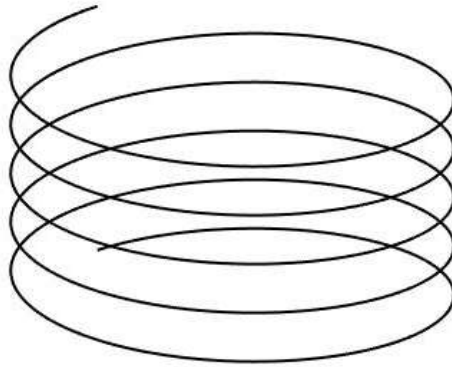


Figura 4.22. Curva helicoidal sobre un cilindro

4.5 Tres casos adicionales al cálculo de variaciones

A continuación se presentan tres casos que extienden el rango de aplicaciones del cálculo de variaciones respecto a lo estudiado hasta ahora.

4.5.1 Caso 1: F posee derivadas superiores a la primera

El problema a resolver en este caso corresponde a:

$$\min_y J(y) = \int_a^b F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) dx \quad (4.111)$$

La resolución de esta integral es análoga a los casos presentados anteriormente (se incentiva al lector a hacer la prueba), con la diferencia que aquí se deberá integrar por partes n veces, de lo cual se desprende que:

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} - \frac{d^3}{dx^3} F_{y'''} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} = 0 \quad (4.112)$$

En el problema 4.10 se desarrolla la prueba de esta ecuación.

4.5.2 Caso 2: Límites de la integral variable

Anteriormente se trabajó con una curva $y(x)$ entre dos puntos, la cual se variaba manteniendo los extremos fijos, de lo cual surge la pregunta ¿Qué pasa si los extremos también son variables? Es decir, además de tener que determinar la curva óptima entre los dos puntos, se debe determinar cuáles son esos puntos.

La interrogante anterior es de particular importancia en la determinación del plan óptimo de explotación de una mina hasta un periodo T . Así por ejemplo, la incógnita podría corresponder en este caso a la producción en cada instante de tiempo, $q(t)$, la que en sí misma puede ser vista como una curva en el plano (t, q) . El LOM de la mina T podría ser exógeno al problema, pero en general será endógeno. En este caso entonces la curva a encontrar $q(t)$ posee un extremo variable asociado al LOM de la mina, T .

Para introducir el caso en que los límites de la integral son variables, se presenta a continuación un ejemplo clásico, cuya primera exposición se debe al matemático griego Carathéodory (1873-1950).

Considérese un bote a remos que se dispone a cruzar un río según lo expone la Figura 4.23. El bote se encuentra en un instante inicial en la posición $(0,0)$ y la corriente del río fluye de abajo hacia arriba en dirección del eje de las ordenadas, con una velocidad $v(x)$. La pregunta que debe responderse es ¿cuál debe ser la dirección del remo en cada instante de tiempo de tal forma de llegar del punto $(0,0)$ a un punto cualquiera en la otra orilla, en la menor cantidad de tiempo posible?. Puesto en otras palabras ¿cuál es la curva que se debe seguir el bote para minimizar el tiempo de llegada a dicho punto?

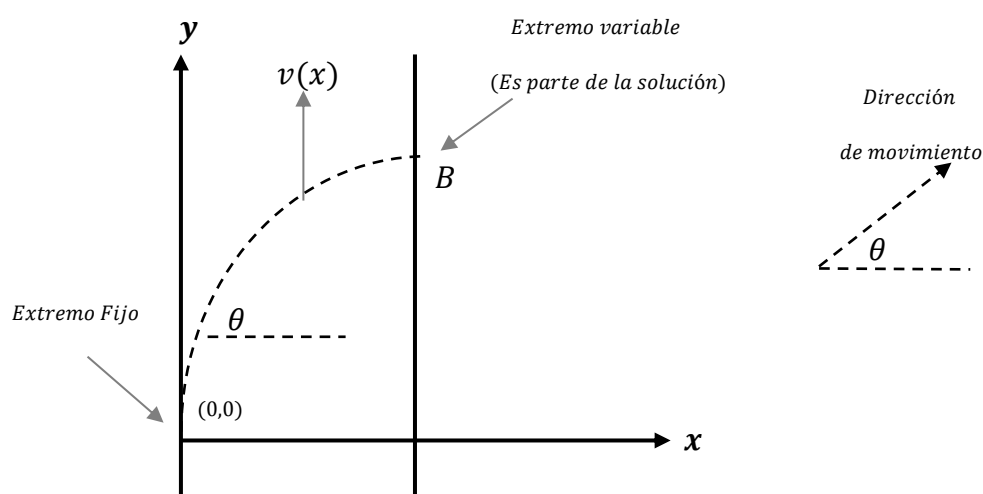


Figura 4.23. Representación del problema del cruce de un río con extremo inicial fijo

El punto $(0,0)$ se considera como extremo fijo, es decir, cuando se haga una variación $h(x)$ de la curva óptima $y(x)$ se va a partir de ese punto, por lo que $h(0) = 0$, es más, cualquiera sea la curva que se elija esta debe contener este punto.

Por otro lado, no es claro cuál debe ser el extremo al que debe arribar el bote con objeto de minimizar su tiempo de recorrido, por lo que el punto B al cual debe llegar es parte de la solución del problema, es decir, es endógeno. Dado que B es variable, $h(B)$ no necesariamente va a ser igual a cero. Dicho de otra forma, la función de variación h no necesariamente va a ser cero en ese punto.

Volviendo al problema, se debe mencionar que la dirección está determinada por el ángulo θ (ver Figura 4.23) y ese ángulo va a depender de la posición en el eje de las abscisas del bote (x). Dado que el río no aporta velocidad al bote en dirección de x y siendo c (constante) la velocidad del bote (asumida constante durante todo el viaje), se tiene que:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = c \cos(\theta(x)) \quad (4.113)$$

Por el contrario, como el río sí aporta velocidad al bote en el eje y :

$$v_y = \frac{dy}{dt} = c \sin(\theta(x)) + v(x) \quad (4.114)$$

Por lo que el tiempo que toma cruzar el río, viene dado por:

$$T = \int_0^b \left(\frac{dt}{dx} \right) dx = \int_0^b \frac{1}{c \cos(\theta(x))} dx \quad (4.115)$$

Para ser más específicos, se busca la función $\theta(x)$ que minimiza la siguiente expresión:

$$\text{Min} \int_0^b \frac{dx}{c \cos(\theta(x))} \quad (4.116)$$

Para facilitar la resolución del problema se trabajará en términos de x e y en lugar de $\theta(x)$, para lo cual se utilizará el hecho que:

$$y' = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{c \sin(\theta(x)) + v}{c \cos(\theta(x))} \quad (4.117)$$

Despejando de la expresión anterior $\theta(x)$:

$$\frac{1}{\cos \theta(x)} = \left(\frac{\sqrt{c^2(1+(y')^2)-v(x)^2}-v(x)y'}{c^2-v(x)^2} \right) c \quad (4.118)$$

De esta forma es posible reescribir (4.116) como:

$$\min_{y(x)} \int_0^b \frac{\sqrt{c^2(1+(y')^2)-v(x)^2}-v(x)y'}{c^2-v(x)^2} \quad (4.119)$$

El ejercicio anterior corresponde a un caso particular en donde uno de los extremos es fijo y el otro (el de la derecha del río) variable. A continuación, se presenta el caso más general en donde ambos extremos son desconocidos.

$$\min_y \int_a^b f(x, y, y') dx \quad \text{con } a \text{ y } b \text{ desconocidos} \quad (4.120)$$

Como se demostró en puntos anteriores, al hacer la variación del funcional anterior, el δJ obtenido es equivalente a:

$$\delta J = F_y h \Big|_a^b + \int_a^b \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) h dx = 0 \quad (4.121)$$

Para encontrar una extremal del problema (4.120) se varía la curva $y(x)$ manteniendo los límites de la misma, de forma tal que a $y(x)$ se le suma una función $h(x)$ tal que $h(a) = h(b) = 0$. Ahora, esta condición de tomar un h que pase por $y(a)$ e $y(b)$ era porque se asumían dichos puntos conocidos. Cuando ese era el caso solo se variaba la curva, pero no los puntos, lo que se representa gráficamente en la Figura 4.24:

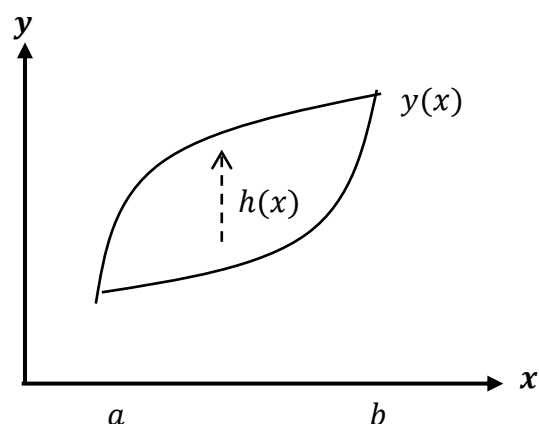


Figura 4.24. Curvas $y(x)$ cuando se conoce el extremo inicial y final

Ahora, para analizar el caso en que los extremos no son fijos, se ejemplificará el caso particular cuando $y(b)$ no es fijo, donde se tendrá que $h(a) = 0$ y $h(b) \neq 0$.

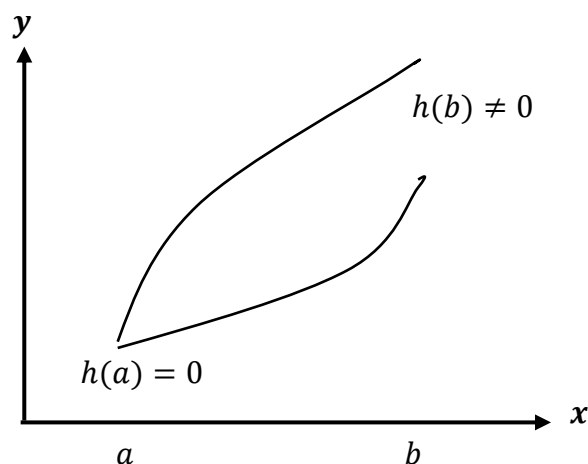


Figura 4.25. Curvas $y(x)$ cuando se desconoce el extremo final

A continuación, se exponen las condiciones para el caso más general, esto es, cuando $y(x)$, a y b son todos desconocidos (Gelfand y Fomin, 1963):

$$1) \quad F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0 \quad \text{Ecuación de Euler-Lagrange} \quad (4.122)$$

$$2) \quad F_{y'} \Big|_{x=a} = 0 \quad \left. \vphantom{F_{y'} \Big|_{x=a} = 0} \right\} \text{Condiciones naturales} \quad (4.123)$$

$$3) \quad F_{y'} \Big|_{x=b} = 0 \quad \left. \vphantom{F_{y'} \Big|_{x=b} = 0} \right\} \text{del límite} \quad (4.124)$$

Estas condiciones naturales del límite se van a requerir cuando no se conozcan los límites de la integral. Cuando los límites sean conocidos estas condiciones no serán necesarias dado que $h(a) = h(b) = 0$ necesitando únicamente la condición de Euler-Lagrange.

Mediante la utilización de las ecuaciones anteriores, es posible derivar las condiciones de primer orden para la Figura 4.25 siguientes:

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0 \quad (4.125)$$

$$F_{y'}(b) = 0 \quad (4.126)$$

Retomando el problema del río, se utilizará un ejemplo para explicar la metodología de resolución del problema. Considérese $x = 0$ y que se desea llegar a la orilla ubicada en $x = 1$. Además, se trabajará con una función de velocidad $v(x)$ dada por:

$$v(x) = x(1 - x) \quad (4.127)$$

Se debe notar que la función de velocidad es factible físicamente dado que en los bordes $x = 0$ y $x = 1$ la velocidad es cero. Por su parte, hacia $x = 1/2$ el flujo del río alcanza su velocidad máxima.

Para este ejemplo, el problema se puede reescribir como:

$$\min_{y(x)} \int_0^1 \frac{\sqrt{c^2(1+(y')^2) - x^2(1-x)^2} - x(1-x)y'}{c^2 - x^2(1-x)^2} \quad (4.128)$$

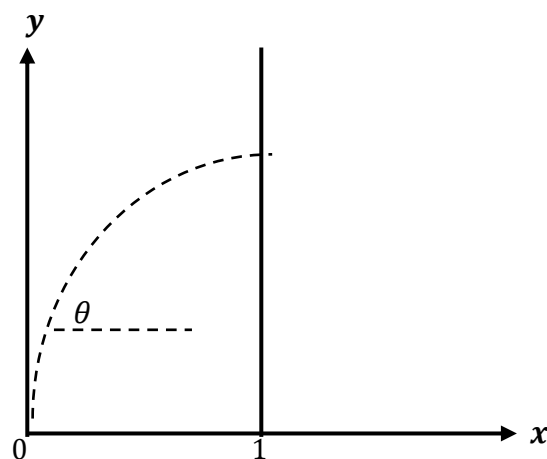


Figura 4.26. Representación del problema del río con extremos conocidos

Utilizando la condición de primer orden de Euler-Lagrange:

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0 \quad (\text{nótese que } F_y = 0) \quad (4.129)$$

Se tiene además la condición natural del límite:

$$F_{y'} \Big|_{x=1} = 0 \quad (4.130)$$

De la ecuación de Euler-Lagrange se obtiene que:

$$F_{y''} = Cte \quad (4.131)$$

$$F_{y'} = \frac{1}{c^2 - x^2(1-x)^2} \left[\frac{c^2 y'}{\sqrt{c^2(1+y'^2) - x^2(1-x)^2}} - x(1-x) \right] = \alpha \quad (4.132)$$

Mientras tanto, la segunda condición es equivalente a:

$$F_{y'} \Big|_{x=1} = \frac{1}{c^2} \left[\frac{c^2 y'}{\sqrt{c^2(1+y'^2)}} \right] = 0 \quad (4.133)$$

Para que el problema tenga sentido físico se asume que c es una constante positiva, por lo que debe cumplirse que:

$$y'(x = 1) = 0 \quad (4.134)$$

La condición natural del límite del punto de vista geométrico indica que la pendiente de la curva en $x = 1$ es cero, lo que se traduce en que el bote debe arribar a la orilla de forma perpendicular a esta.

La solución de la ecuación diferencial ordinaria de primer orden (4.133) viene dada por (se deja al lector la demostración de esto):

$$y(x) = \frac{1}{c} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) + \beta \quad (4.135)$$

, con β una constante de integración.

Debe notarse que la solución cumple con la condición natural del límite, debido a que:

$$y'(x) = \frac{1}{c} (x - x^2)_{x=1} = 0 \quad (4.136)$$

De aquí, $\beta = 0$, de donde:

$$y^*(x) = \frac{1}{c} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \quad (4.137)$$

La anterior corresponde a la curva seguida por el bote que minimiza el tiempo de traslado de una orilla otra, sujeto a la función de velocidad planteada.

Por completo que pudiera parecer el problema anterior, la verdad es que en la vida real la complejidad es aún mayor. Esto pues en el mundo real comúnmente las orillas de los ríos no son paralelas entre ellas. De hecho, en general presentan una forma más bien irregular, tal como

se muestra en la Figura 4.27 (donde $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ representan las orillas izquierda y derecha del río, respectivamente).

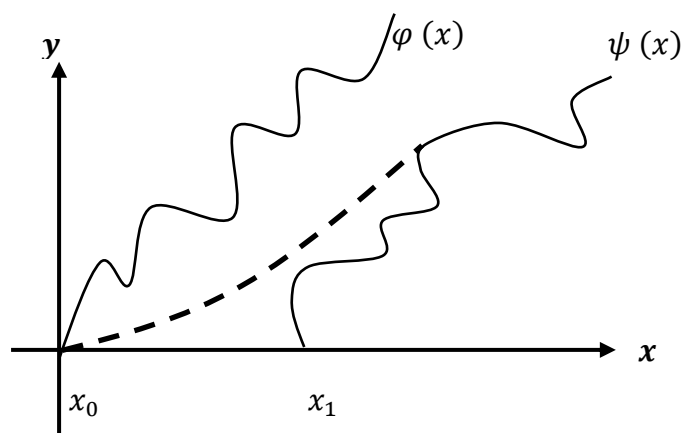


Figura 4.27. Representación del problema del río con extremos desconocidos

Como se demuestra en Gelfand y Fomin (1963), si el punto inicial y final no son conocidos, las condiciones de primer orden más generales vienen dadas por:

$$1) \quad F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0 \quad (4.138)$$

$$2) \quad F + [\varphi'(x) - y'] F_{y'} \Big|_{x=x_0} = 0 \quad \text{Condiciones de} \quad (4.139)$$

$$3) \quad F + [\psi'(x) - y'] F_{y'} \Big|_{x=x_1} = 0 \quad \text{transversalidad} \quad (4.140)$$

Las condiciones de transversalidad 2) y 3) se utilizarán cada vez que los extremos sean desconocidos, pero se sepa que deben estar contenidos en las curvas $\varphi(x)$ y $\psi(x)$.

Resulta interesante ver como se relaciona la problemática anterior con la explotación óptima de minas. Para esto, se planteará el siguiente funcional, correspondiente al VAN de una mina donde T es el LOM de la mina, y $F(t)$ es una función de flujos de caja en cada instante de tiempo t . Un funcional de interés será así:

$$VAN = \int_{t_0}^T e^{-rt} F(t) dt \quad (4.141)$$

Este funcional se puede maximizar utilizando cálculo de variaciones con las condiciones de Euler-Lagrange cuando los límites de la integral son conocidos. En la práctica, sin embargo, se puede conocer el tiempo inicial pero no necesariamente el tiempo final, por lo que normalmente

el LOM es desconocido y endógeno al problema, es decir, debe ser determinado como parte de la solución.

En cuanto al tiempo de inicio de una nueva mina, este es en general también endógeno, como se discutirá en detalle en el Capítulo 16.

4.5.3 Caso 3: Problemas isoperimétricos o restringidos

En este caso, se trabajan problemas del tipo:

$$\min_y J(y) = \int_a^b F(x, y, y') dx \quad (4.142)$$

$$s. a. \int_a^b G(x, y, y') dx = l \quad (4.143)$$

, donde l es una constante.

Un ejemplo de este problema corresponde al caso de maximizar el área para un perímetro dado (problema de Dido). Este corresponde precisamente a un problema *isoperimétrico*, es decir, se busca encontrar la curva cerrada que maximiza el área para un perímetro dado.

Este tipo de problemas se resuelve construyendo un funcional del tipo Lagrangeano:

$$L(y) = \int_a^b [F(x, y, y') + \lambda G(x, y, y')] dx \quad (4.144)$$

Es posible demostrar que encontrar la función que minimiza un funcional, sujeto a otro funcional, es equivalente a encontrar la función que minimiza el Lagrangeano. Entonces, para encontrar la solución a estos problemas, se transforma el problema isoperimétrico en uno sin restricciones, mediante la construcción del Lagrangeano.

Si a y b son conocidos, para la solución del Lagrangeano se encuentra la condición de primer orden simplemente mediante la ecuación de Euler-Lagrange.

Debe notarse que si a y b son desconocidos entonces se deben aplicar además las condiciones de transversalidad, pero sobre la nueva función $L(y)$.

Ahora, a modo de ejemplo se resuelve el problema isoperimétrico planteado anteriormente (problema de Dido):

$$\max_{y(x)} \int_{-a}^a y dx \quad (4.145)$$

s. a.

$$\int_{-a}^a \sqrt{1 + y'^2} dx = \frac{l}{2} \quad (4.146)$$

Entonces, este problema es equivalente a encontrar el $y(x)$ que maximiza el Lagrangeano:

$$\max_y L(y) = \int_{-a}^a \left(y(x) + \lambda \sqrt{1 + y'^2} \right) dx \quad (4.147)$$

Además, se asumen a y b conocidos. Entonces, dado que:

$$F_y = 1 \quad (4.148)$$

$$F_{y'} = \frac{\lambda y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \quad (4.149)$$

Se obtiene la ecuación de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{\lambda y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right] = 1 \quad (4.150)$$

Integrando (4.150) y reordenando:

$$x - c = \frac{\lambda y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \quad (4.151)$$

Esta ecuación corresponde a una ecuación diferencial ordinaria de primer orden para y . Así:

$$(x - c)^2 = \frac{\lambda^2 y'^2}{1 + y'^2} \rightarrow y' = \frac{x - c}{\sqrt{\lambda^2 - (x - c)^2}} \quad (4.152)$$

Integrando a ambos lados respecto a y , y reconociendo que la integral corresponde a una función trigonométrica, es posible obtener que:

$$(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = \lambda^2 \quad (4.153)$$

La que corresponde a la ecuación del círculo de radio λ centrada en (c_1, c_2) . Nótese que en este caso tanto c_1 como c_2 corresponden a constantes de integración del problema.

Para comprobar que la solución (4.153) es correcta, se despeja y de (4.153):

$$y = c_2 - \sqrt{2c_1x - c_1^2 + \lambda^2 - x^2} \quad (4.154)$$

Derivando la expresión anterior con respecto a x :

$$y' = \frac{x-c_1}{\sqrt{2c_1x - c_1^2 + \lambda^2 - x^2}} = \frac{x-c_1}{\sqrt{\lambda^2 - (x-c_1)^2}} = \frac{x-c}{\sqrt{\lambda^2 - (x-c)^2}} \quad (4.155)$$

Con lo que queda comprobada la validez de la solución (4.153).

Ahora, para determinar las constantes c_1 y c_2 se puede usar:

$$y(-a) = y(a) = 0 \quad (4.156)$$

Por otra parte, se sabe que el perímetro del círculo es $P = 2\pi r$, y también que $r = \lambda$. Además, por enunciado, se tiene que el $P = l$. La situación anterior se muestra en la Figura 4.28.

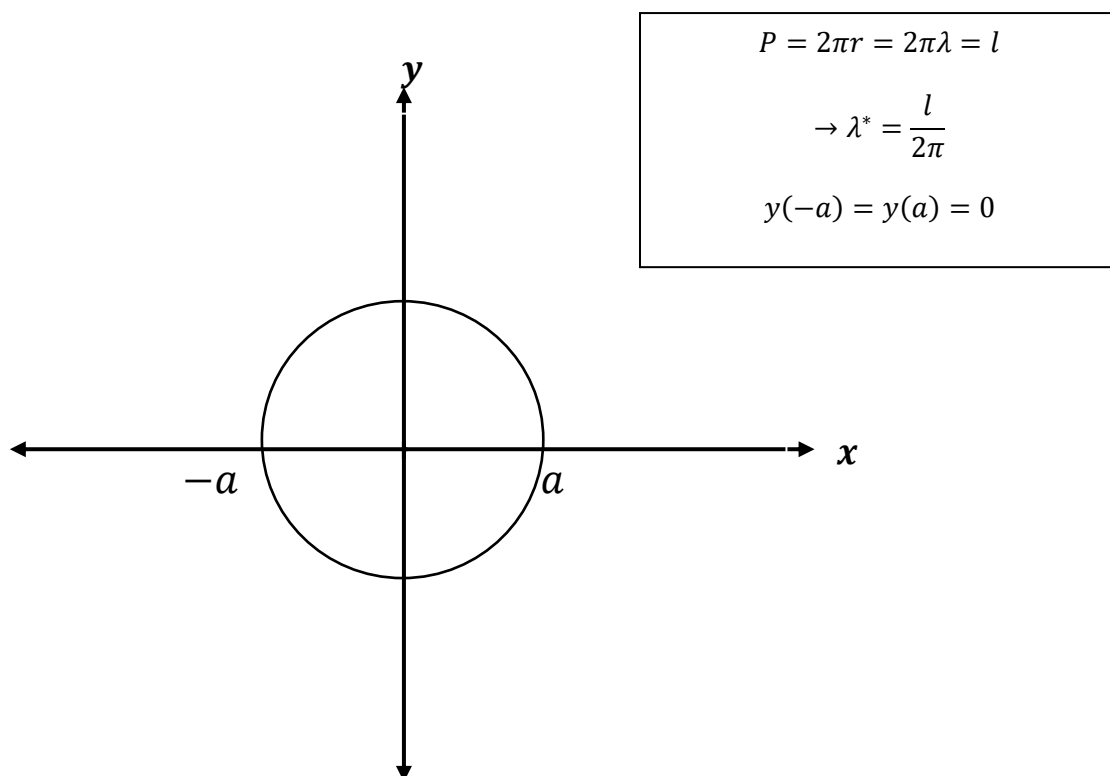


Figura 4.28. Solución del problema isoperimétrico

Así se puede determinar que el parámetro λ de Lagrange tiene un significado intrínseco. En este caso corresponde al radio de la circunferencia. Lo importante es reconocer que para cada problema en particular λ tendrá un distinto significado y no será una constante independiente. Al introducir el Lagrangeano, se incluye este nuevo parámetro λ el cual debe ser encontrado. En este caso, al imponer la restricción del perímetro, se obtuvo rápidamente el valor. En otros casos, esto podría no ser tan sencillo.

Un ejemplo práctico del problema isoperimétrico recién discutido se presenta en minería en la explotación de algunas minas subterráneas.

En minería subterránea existen principalmente tres métodos de explotación sin soporte o de “hundimiento”: *longwall mining*, *sublevel caving* y *block caving*. El método *longwall mining* se utiliza principalmente en la minería del carbón, ya que necesita que la roca sea blanda. Los métodos de *caving* se refieren a aquellas operaciones mineras en las que el cuerpo mineralizado se hunde naturalmente después de realizado un corte bajo el mismo, y el material hundido se recupera en puntos de extracción. Los métodos de hundimiento son los de menores costos ya que el tamaño de los puntos de extracción y de las instalaciones para manejo de mineral se hacen a medida para ajustarse al material hundido y, además, que el horizonte de extracción se puede mantener durante toda la vida de los puntos de extracción (Laubscher, 1994). Un factor clave para determinar si la unidad de extracción va a hundir o no, es el *radio hidráulico*. Este se define como:

$$RH = \text{Radio Hidráulico} = \frac{\text{Área basal}}{\text{Perímetro basal}} \quad (4.157)$$

En el siguiente gráfico, extraído del paper de Laubscher de 1994 “*Cave mining – the state of the art*”, se muestra cómo el radio hidráulico puede afectar la hundibilidad para una misma calidad de roca. En el eje y se ve el MRMR (*mining rock mass rating*) el que mide la competencia de la roca en base a la resistencia de la roca intacta (IRS), la calidad de la roca (RQD), la distancia entre discontinuidades y presencia, presión y caudal de agua (Jakubec y Laubscher, 2000). En el eje x está el radio hidráulico en metros y más abajo en pies.

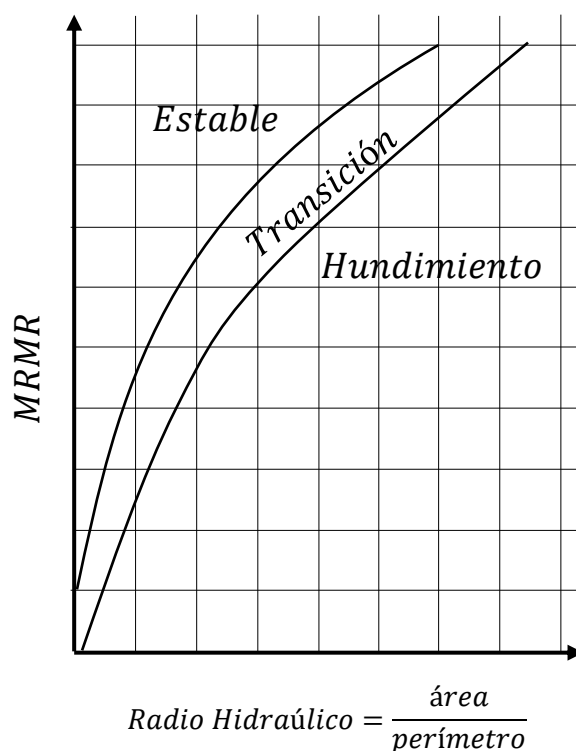


Figura 4.29. Ábaco de Laubscher.

En la Figura 4.29 se identifican tres zonas: la primera se define como estable, y es la que está sobre ambas curvas. Laubscher plantea que, si se está en esa zona, sólo se necesita soporte local, es decir, no hay hundimiento natural. Luego, se encuentra la zona de transición, entre las dos curvas. Laubscher se plantea que estando en la parte superior entre ambas curvas, la zona es soportable. En la parte media, se podría apreciar un arqueamiento de la roca, y en la parte baja, es posible encontrar hundimiento/arqueamiento intermitente, dependiendo de influencias externas como por ejemplo presión de agua. Finalmente, en la última zona, la de hundimiento, precisamente la roca comienza a hundir una vez hecho el corte.

Entonces, de todo lo anterior se desprende que, para una misma calidad de roca, basta con aumentar lo suficiente el radio hidráulico para generar hundimiento. Ahora, evidentemente mientras mayor sea el radio hidráulico, mayor será el hundimiento. Así, un ejercicio interesante que se puede realizar con el radio hidráulico, es buscar la curva cerrada que maximiza su valor, ya que de esta manera se tendrá el máximo nivel de *caving*.

El problema, bajo los mismos supuestos del problema original presentado en capítulos anteriores (eje de simetría) sería:

$$\max_{y(x)} \frac{\int_{-a}^a \text{Área}}{\int_{-a}^a \text{Perímetro}} \quad (4.158)$$

Se puede apreciar que el problema anterior no corresponde a un problema del cálculo de variaciones ya que la división de un funcional en otro no corresponde a un funcional. En capítulos futuros, se verán problemas de este tipo, por ejemplo, utilizando el valor esperado y la varianza. Así, se buscará maximizar el VAN esperado dividido por la varianza, para tener una medida del riesgo del proyecto. Se puede replantear el problema como:

$$\max_{y(x)} \int_{-a}^a y(x) dx \rightarrow \text{Área} \quad (4.159)$$

s. a.

$$\int_{-a}^a \text{Perímetro} = \pi a \quad (4.160)$$

$$y(a) = y(-a) = 0 \quad (4.161)$$

Ahora, como se demostró anteriormente la solución al problema (4.159-4.161) es el círculo, sin embargo, en los métodos de *caving* jamás se usa esta forma para las unidades a hundir. Esto se debe a que producir una figura circular como base para la zona de *caving* sería muy costoso en tiempo y en inversión, por lo que operacionalmente se prefieren otras geometrías (más similares a rectángulos). Además, si se analiza a continuación el radio hidráulico de un círculo de radio a y de un cuadrado de lado $\pi a/2$, en donde ambos tienen el mismo perímetro:

$$RH_{\text{círculo}} = \frac{\pi a^2}{2\pi a} = \frac{a}{2} = 0.5a \quad (4.162)$$

$$RH_{\text{cuadrado}} = \frac{\left(\frac{\pi a}{2}\right)^2}{\frac{4\pi a}{2}} = \frac{\pi a}{8} \approx 0.39a \quad (4.163)$$

Se puede apreciar que la diferencia no es tan significativa como lo puede llegar a ser una inversión tanto en tiempo como en dinero. Por lo tanto, se opta por curvas cerradas de forma cuadrada o rectangular.

4.6 Problemas resueltos

Problema 4.1

El propietario de una porción de tierra sabe que tiene $S_0 > 0$ unidades de algún recurso no renovable. El propietario desea determinar la tasa de extracción $q(t)$ sobre un periodo fijo de planificación $[0, T]$, con T conocido, a fin de maximizar el valor presente descontado del beneficio asociado con la extracción y venta del activo. Considere $\pi(q(t))$ como el beneficio instantáneo de extraer y vender el recurso no renovable a una tasa $q(t)$, que es descontado a una tasa $r > 0$. Asuma que $\pi \in C^2$ en su dominio tal que $\pi'(q) > 0$ y $\pi''(q) < 0$. Además, el propietario ha decidido que todos los recursos serán extraídos al final del periodo de planificación.

- Plantee el problema de optimización dinámica a la que se enfrenta el propietario del terreno asumiendo que la variable de control corresponde a la producción del activo en cada instante de tiempo.
- Resuelva el problema anterior y obtenga la regla de Hotelling:

$$\frac{d[\pi'(q)]}{\pi'(q)} = r$$

- Muestre que la tasa de extracción óptima del recurso declina en el horizonte de planificación. Analice cualitativamente la geometría de dicha tasa.

Solución

a. El problema que enfrenta el propietario corresponde a un problema isoperimétrico en donde se busca maximizar el beneficio instantáneo de extraer y vender el recurso no renovable a una tasa $q(t)$ descontado a una tasa r . Por esta razón, el funcional a maximizar será el VAN del proyecto, que corresponde a la suma de los flujos de caja descontados (al ser continuos la suma corresponde a una integral). Se debe notar que la variable de decisión será la cantidad óptima a extraer en cada periodo de tiempo $q(t)$.

De esta forma:

$$J(q, s) = \max_{q(t)} \int_0^T e^{-rt} (\pi(q(t))) dt$$

s. a.

$$\int_0^T q(t)dt = S_0$$

$$q(t), S_0 \geq 0$$

b. Para utilizar la ecuación de Euler – Lagrange, primero se deben incorporar las restricciones al problema. Para esto, se define la siguiente función:

$$F = e^{-rt}(\pi(q)) - \lambda q, \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

Donde λ puede ser interpretado como el valor presente del precio sombra del *stock* inicial del recurso. Es decir, como la cantidad por la cual el valor presente descontado de la firma incrementa cuando el tamaño inicial del depósito aumenta:

$$\frac{\partial J(r, x_0, T)}{\partial S_0} = \lambda(r, x_0, T)$$

En otras palabras, para un λ^* se tiene que este representa la cantidad máxima que el propietario de la firma pagaría por un pequeño incremento del recurso no renovable, dado que λ^* es precisamente la cantidad por la cual el valor presente descontado del beneficio aumentaría a causa de un incremento de la cantidad inicial del recurso. Luego, desarrollando la ecuación de Euler-Lagrange:

$$F_q - \frac{d}{dt}F_{q'} = 0$$

Para este problema en específico:

$$F_q = e^{-rt}\pi'(q) - \lambda$$

$$F_{q'} = 0$$

Luego, reemplazando estos valores en la ecuación de Euler-Lagrange:

$$e^{-rt}\pi'(q) - \lambda = 0$$

De la ecuación anterior se desprende que la tasa de extracción óptima es tal que el valor óptimo del beneficio marginal descontando es constante sobre el horizonte de planificación e igual al

multiplicador λ , correspondiente al precio sombra del recurso sin extraer. Además, se obtiene que el beneficio marginal crece a la tasa de descuento $r > 0$. Despejando:

$$\pi'(q) = \lambda e^{rt}$$

Luego, dado que la ecuación es válida $\forall t \in [0, T]$, es posible diferenciarla con respecto a t .

$$\pi''(q)q'e^{-rt} - r\pi'(q)e^{-rt} = 0$$

Dividiendo por e^{-rt} .

$$\pi''(q)q' - r\pi'(q) = 0$$

Reagrupando los términos y notando que $\pi''(q)q' = \frac{d[\pi'(q)]}{dt}$ se obtiene la regla de Hotelling:

$$\frac{\pi''(q)q'}{\pi'(q)} = \frac{\frac{d[\pi'(q)]}{dt}}{\pi'(q)} = r$$

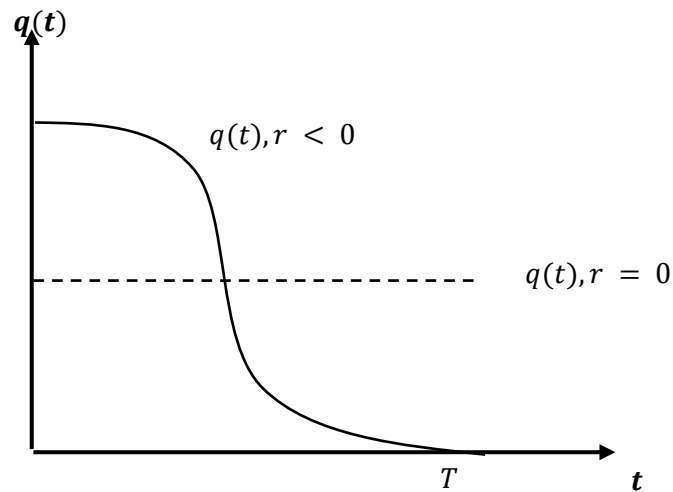
Esta regla afirma que la tasa relativa de cambio del beneficio marginal de extraer y vender una unidad de recurso no renovable se equipara con la tasa a la cual un activo podría crecer si fuese colocado en una cuenta que crece a una tasa $r > 0$.

c. De la última ecuación se puede obtener la siguiente relación. Si además consideramos que $\pi'(q) > 0$ y $\pi''(q) < 0$ (por enunciado) se tiene que:

$$q' = \frac{\pi'(q)r}{\pi''(q)} < 0$$

Es decir, la tasa de extracción óptima del recurso no renovable declina en el horizonte de planificación entre $[0, T]$. De esto se concluye que la tasa de extracción es más grande al inicio que al final del horizonte de planificación, y que si $r = 0$, entonces $q' = 0$. Por lo tanto, se puede concluir de estas dos observaciones sumado al hecho de que el horizonte de planificación es fijo y que el productor desea extraer todo el recurso mineral, que cuando $r > 0$ la tasa inicial de extracción del recurso debe exceder a la tasa de extracción cuando $r = 0$, puesto que sino nunca se extraería todo el activo cuando $r > 0$. Mientras que cuando la fecha de planificación se aproxima a T , la tasa de extracción cuando $r > 0$ debe ser menor a cuando $r = 0$, a fin de que el área bajo la curva de extracción cuando $r > 0$ sea idéntica cuando $r = 0$. Es decir, que

se cumpla la restricción $\int_0^T q(t)dt = x_0$. Los resultados gráficos de este análisis cualitativo se pueden observar en la siguiente figura:



Nota: En el Capítulo 9 se ahondará más en la regla de Hotelling y sus implicancias en el negocio minero.

Problema 4.2

En cualquier método de explotación subterráneo por hundimiento (por ejemplo, *block caving*) se ha demostrado empíricamente que mientras mayor sea el radio hidráulico de la superficie que se pretende hundir mayor será la hundibilidad de la roca, y por lo tanto será más económica la operación. Si el radio hidráulico se define como la razón entre el área y el perímetro del sector a hundir, encuentre la curva cerrada que encierra el área de explotación de máxima hundibilidad. Discuta cuán práctica es la explotación de reservas mineras respetando la forma de dicha curva. Si por razones operacionales dicha curva no fuese posible de alcanzar, ¿Qué curva cerrada cree usted que se utilizará en la práctica y por qué?

Solución

En este capítulo se comentó sobre el “problema de Dido” para hacer referencia a los problemas isoperimétricos. La historia relata el siguiente episodio sobre la fundación de Cartago por la reina Dido:

“Dido llegó a las cosas de África donde vivían los gétulos, una tribu de libios cuyo Rey era Jarbas. Pidió hospitalidad y un trozo de tierra para instalarse con su séquito. Jarbas le expuso que le daría tanta tierra como ella pudiera abarcar con una piel de buey. Elisa, a fin de que la piel abarcara la máxima tierra posible, la hizo cortar en finas tiras y así consiguió circunscribir un extenso perímetro.”

Dido dedujo correctamente que, entre todas las figuras con un perímetro dado, el círculo encerraba la mayor área. De esta forma nace el primer problema isoperimétrico conocido. A continuación, se presentará la demostración de esta deducción a través del uso del cálculo variacional.

El problema isoperimétrico de la Reina Dido queda planteado de la siguiente manera:

$$\max_{y(x)} \frac{\int_{-a}^a y(x) dx}{\int_{-a}^a \sqrt{1 + y'^2} dx} = \frac{\text{Área}}{\text{Perímetro}}$$

Se debe notar que el problema anterior es equivalente al siguiente:

$$\begin{aligned} & \max_{y(x)} \int_{-a}^a y(x) dx \\ \text{s. a. } & \int_{-a}^a \sqrt{1 + y'(x)^2} dx = l \\ & y(-a) = y(a) = 0 \end{aligned}$$

Esto es debido a que estamos manteniendo el denominador constante.

Para incluir la restricción dentro del problema, formamos la siguiente función auxiliar:

$$H = F + \lambda G = y(x) + \lambda \sqrt{1 + y'(x)^2}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Con esto, se podrá generar el funcional auxiliar:

$$L = \int_{-a}^a [y(x) + \lambda \sqrt{1 + y'(x)^2}] dx$$

Luego, aplicando la ecuación de Euler-Lagrange en (4.185).

$$H_y - \frac{d}{dx} H_{y'} = 0$$

Para este problema en particular se tienen los siguientes valores:

$$H_y = 1$$

$$H_{y'} = \lambda \frac{y'(x)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}}$$

Reemplazando estos valores en la ecuación de Euler-Lagrange:

$$1 - \frac{d}{dx} \left(\lambda \frac{y'(x)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} \right) = 0$$

Que es equivalente a:

$$\frac{d}{dx} \left(\lambda \frac{y'(x)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} \right) = 1$$

Se debe notar que el lado derecho de la ecuación no depende de x . Por lo que integrando a ambos lados se tiene:

$$\lambda \frac{y'(x)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} = x + C_1, C_1 \in \mathbb{R}$$

Utilizando algebra simple se puede despejar y' de la ecuación anterior, para llegar a:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + C_1}{\sqrt{\lambda^2 - (x + C_1)^2}}$$

Se debe notar que el lado derecho de la ecuación anterior no depende de y , por lo que se puede utilizar el método de separación de variables para resolver la ecuación anterior:

$$\int dy = \int \frac{x + C_1}{\sqrt{\lambda^2 - (x + C_1)^2}} dx$$

Para poder determinar la expresión de la derecha será necesario hacer la siguiente sustitución:

$$x + C_1 = u$$

$$dx = du$$

$$\rightarrow y = \int \frac{u}{\sqrt{\lambda^2 - u^2}} du$$

A continuación, habrá que realizar una nueva sustitución:

$$s = \lambda^2 - u^2$$

$$ds = -2u du$$

$$\rightarrow y = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{s}} ds$$

$$\rightarrow y = \sqrt{s} + C = \sqrt{\lambda^2 - u^2} + C = \sqrt{\lambda^2 - (x + C_1)^2} + C$$

Así:

$$(x + C_1)^2 + (y + C_2)^2 = \lambda^2$$

O sea, se obtiene que la curva que satisface el problema corresponde a una circunferencia de radio λ (en este caso, de radio a) y de centro $(-C_1, -C_2)$. De donde C_1 y C_2 pueden obtenerse de las condiciones $y(a) = y(-a) = 0$. Así, se tiene que si:

$$C_2^2 = \lambda^2 - (C_1 - a)^2$$

$$C_2^2 = \lambda^2 - (C_1 + a)^2$$

Entonces:

$$C_1 = 0$$

$$C_2 = \sqrt{\lambda^2 - a^2}$$

Pero, como se consideró $\lambda = a$.

$$C_2 = 0$$

De modo que finalmente se obtiene que la curva de igual perímetro que encierra la mayor área, y que por lo tanto significa la mayor hundibilidad, es la curva:

$$x^2 + y^2 = a^2$$

$$y(x) = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$$

Es decir, una circunferencia de radio a y centro $(0,0)$.

Respecto a la relación de este resultado con el método de explotación por block caving, tal como su nombre lo indica, el método consiste en una secuencia de bloques de mineral que se hacen hundir, y que para el diseño de la malla de extracción esta configuración geométrica es la que permite minimizar la pérdida de mineral en los pilares de seguridad.

Por otra parte, como la extracción en cada punto debe ser controlada con sumo cuidado, de manera de evitar contaminaciones de mineral y estéril, el contacto entre estos debe mantenerse en un plano bien definido que puede ser horizontal o inclinado, y que no necesariamente se aproximará a una circunferencia, pero que intentará asemejarse a esta. Es decir, si bien en teoría superficies circulares son aquellas que tienen la mayor hundibilidad, estas no son realizadas en la práctica debido a las condiciones técnicas de los yacimientos. En general, en las minas se utilizan superficies regulares de formas rectangulares.

Problema 4.3

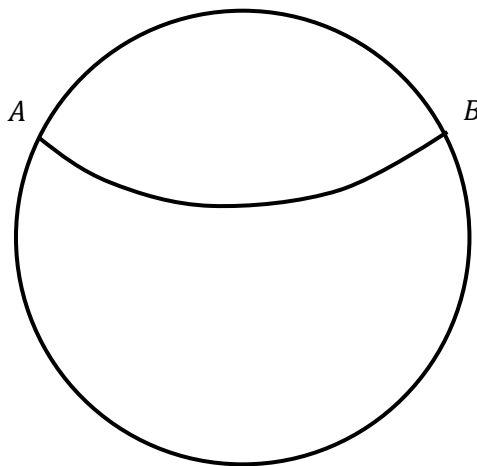
Se analizará un caso general del problema de la braquistocrona, en el que se busca construir un túnel a través de la tierra con el fin de conectar dos ciudades y hacer el traslado lo más rápido posible. Lo que evita que esto se convierta en realidad es la falta de materiales resistentes a las altas temperaturas y presiones que se encuentran al interior de la tierra y también a la dificultad que implica crear un túnel con condiciones óptimas, sin fricción y además de los altos costos que implica su elaboración. Por esta razón, la formulación y solución de este problema será estrictamente teórica y no necesariamente involucra el diseño real óptimo de los túneles hoy.

Suponga que en la actualidad se logra crear un material capaz de resistir a las temperaturas del núcleo de la Tierra, de forma teórica y que consiste en una aleación de hafnio, nitrógeno y carbono, que permitirá elaborar desde revestimientos de turbinas a gas a escudos térmicos para la aeronáutica. Además, se disponen de distintos avances tecnológicos aplicados a la tunelería, como lo serían las máquinas TBM, que permitirían la creación y revestimiento de un túnel con fricción mínima.

Las condiciones del problema son las siguientes:

- Dentro del túnel no existirá fricción (se cumple el principio de conservación de la energía).
- El túnel será construido dentro del plano formado entre las dos ciudades destinadas para el viaje y el centro del planeta.
- Se parte desde la ciudad A con velocidad igual a cero, la cual aumentará hasta llegar al centro y luego volverá a disminuir al viajar desde el centro hasta la ciudad B, llegando nuevamente a cero.

Una forma de representar el traslado a través de un túnel entre ambas ciudades viene dada por la siguiente figura:



La diferencia específica en comparación al problema de la braquistocrona revisado anteriormente en este capítulo es que la función de gravedad existente varía en función de la posición en que se encuentre dentro del túnel, es decir, $g = g(x, y)$.

Para resolver el problema, definiremos las siguientes variables:

$$v = \text{velocidad en } (x, y(x))$$

$$ds = \text{parte infinitesimal de la trayectoria} = \sqrt{1 + y'^2} dx$$

Para calcular la fuerza que actúa sobre el cuerpo en cada punto, se debe recordar la ley de gravitación universal de Isaac Newton, que nos dice lo siguiente:

$$F = \text{Fuerza de gravedad} = \frac{GMm}{R^3} r$$

La función objetivo corresponde a minimizar el tiempo que demora en todas las curvas, por lo tanto, el funcional estará dado por:

$$F.O. Min = \int \frac{ds}{v} : \text{Tiempo de viaje}$$

Solución

Se resolverá el problema en coordenadas polares. Para esto, utilizamos la transformación característica del nuevo sistema de coordenadas:

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$

Luego, el diferencial del largo de curva (recuerde que debe realizar la transformación a coordenadas polares) corresponde a:

$$ds = \sqrt{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2} d\theta$$

$$r'(\theta) = \frac{dr(\theta)}{d\theta}$$

Para calcular la velocidad en todo punto recordemos la relación entre la fuerza y la energía potencial:

$$F = -\nabla E_p$$

Por lo tanto:

$$E_p = - \int_A^0 F \cdot dr = - \int_A^0 \frac{GMmr}{R^3} \cdot dr = \frac{GMr^2}{2R^3}$$

En el punto inicial (denotado por A en la figura) se tiene que $r = R$ y $v = 0$, por lo tanto:

$$E_{p_A} = \frac{GMmR^2}{2R^3} = \frac{GMm}{2R}$$

Para un punto intermedio cualquiera, se tiene que la energía potencial ya no es solo gravitatoria, sino que también incluye la cinética. Por esta razón, la energía potencial total estará dada por:

$$E_{p_C} = \frac{mv^2}{2} + \frac{GMmr^2}{2R^3}$$

Dado que no existe fricción en el túnel, la energía potencial se debe conservar a lo largo de la trayectoria, por esta razón:

$$E_{p_A} = E_{p_C}$$

De donde se obtiene la siguiente relación:

$$\frac{GMm}{2R} = \frac{mv^2}{2} + \frac{GMmr^2}{2R^3}$$

De la ecuación anterior, utilizando algebra se puede despejar la velocidad, que nos queda de la siguiente forma:

$$v = \sqrt{\frac{GM(R^2 - r^2)}{R^3}} = \sqrt{\frac{g}{R}} \sqrt{R^2 - r^2}, \quad \text{con } g = \frac{GM}{R^2} \in \mathbb{R}$$

De esta forma, ahora que encontramos la velocidad, se puede reescribir el funcional de la siguiente forma:

$$\min T = \int_0^{\theta_1} \sqrt{\frac{R \sqrt{r^2 + r'^2}}{g \sqrt{R^2 - r^2}}} d\theta$$

$$s. a. \quad r(0) = R, r(\theta_1) = R$$

El funcional será de la forma $F(r(\theta), r'(\theta))$. Ya que no depende de θ , quedará de la forma:

$$F - r'F_{r'} = C$$

$$\frac{\sqrt{r^2 + r'^2}}{\sqrt{R^2 - r^2}} - \frac{r'^2}{\sqrt{(r^2 + r'^2)(R^2 - r^2)}} = \sqrt{\frac{g}{R}} C$$

Simplificando y despejando r' se obtiene:

$$r'^2 = \frac{R^2 r^2 - C_1^2}{C_1^2 R^2 - r^2} r^2$$

, donde $C_1 = \frac{R}{\sqrt{1+[R/C^2g]}}$.

Resolviendo para r' se obtienen 2 ecuaciones (una para cuando se desciende y otra para ascender en el túnel).

$$r'^2 = \begin{cases} +\frac{R}{C_1} r \sqrt{\frac{r^2 - C_1^2}{R^2 - r^2}} & \text{para } 0 < \theta < \frac{\theta_1}{2} \\ -\frac{R}{C_1} r \sqrt{\frac{r^2 - C_1^2}{R^2 - r^2}} & \text{para } \frac{\theta_1}{2} < \theta < \theta_1 \end{cases}$$

Para poder resolver esto será necesario introducir una nueva función de la forma $\varphi(\theta)$ con la siguiente relación:

$$r^2 = \frac{R^2 + C_1^2}{2} + \frac{R^2 - C_1^2}{2} \cos \frac{2R\varphi(\theta)}{R - C_1}$$

Reemplazando y despejando $\frac{d\varphi}{d\theta}$

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{(R^2 + C_1^2) + (R^2 - C_1^2) \cos \left[\frac{2R\varphi(\theta)}{R - C_1} \right]}{C_1(R + C_1)(1 - \cos \left[\frac{2R\varphi(\theta)}{R - C_1} \right])}$$

Lo que es equivalente a:

$$\left[-1 + \frac{2R^2}{(R^2 + C_1^2) + (R^2 - C_1^2) \cos \left(\frac{2R\varphi(\theta)}{R - C_1} \right)} \right] \frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{R - C_1}{C_1}$$

Para poder obtener las constantes de esta función se deben utilizar las condiciones de borde correspondientes a $r(\theta)$, entonces:

$$r(0) = R \rightarrow \varphi(0) = 0$$

$$r(\theta_1) = R \rightarrow \varphi(\theta_1) = \frac{R - C_1}{R} \pi$$

La ecuación anterior corresponde a una ecuación diferencial ordinaria. Reordenando e integrando a ambos lados:

$$\int_0^{\varphi} \frac{2R^2}{(R^2 + C_1^2) + (R^2 - C_1^2) \cos\left(\frac{2R\varphi(\theta)}{R - C_1}\right)} d\varphi = \varphi + \frac{R - C_1}{C_1} \theta$$

Para resolver esta integral se utiliza la siguiente fórmula:

$$\int \frac{d\varphi}{a + b \cos \varphi} = \frac{2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tan^{-1} \frac{\sqrt{a^2 - b^2} \tan \frac{\varphi}{2}}{a + b}$$

De donde se obtiene:

$$\frac{C_1}{R} \tan \frac{R\varphi}{R - C_1} = \tan \left(\theta + \frac{C_1\theta}{R - C_1} \right)$$

Finalmente, con las condiciones de borde anteriores se obtiene que:

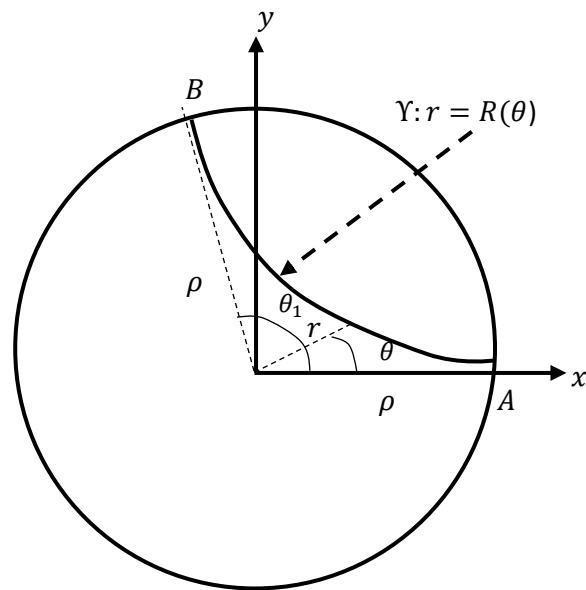
$$C_1 = R \left(1 - \frac{\theta_1}{\pi} \right)$$

La curva anterior puede ser representada de forma paramétrica de la siguiente forma:

$$x = \frac{R + C_1}{2} \cos \varphi + \frac{R - C_1}{2} \cos \frac{R + C_1}{R - C_1} \varphi$$

$$y = \frac{R + C_1}{2} \sin \varphi - \frac{R - C_1}{2} \sin \frac{R + C_1}{R - C_1} \varphi$$

De las relaciones anteriores, se puede obtener una idea gráfica de la curva que se está representado. Para esto, se entrega la siguiente imagen que representa la braquistocrona calculada:



Problema 4.4

Encuentre los extremales del siguiente funcional:

$$J(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} y(2x - y) dx$$

Sujeto a:

$$y(0) = 0$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Solución

Dado que ya se planteó el funcional, la solución se basa simplemente en la utilización de la ecuación de Euler-Lagrange. Dado que tampoco se tienen restricciones en el problema, la utilización es directa:

$$F(x, y(x), \dot{y}(x)) = y(2x - y)$$

Luego, por Euler-Lagrange:

$$F_y - \frac{d}{x} F_{y'} = 0$$

Para este problema en particular:

$$F_y = 2x - 2y$$

$$F_{y'} = 0$$

Por lo tanto, la condición de primer orden nos queda de la forma:

$$2x - 2y = 0$$

$$y(x) = x$$

Nótese que la ecuación anterior no es una ecuación diferencial, sino que más bien una algebraica simple, así que no se tienen constantes de integración. Por esta razón, se debe revisar si las condiciones de borde se satisfacen:

$$y(0) = 0$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Que justamente están contenidos en la recta $y(x) = x$.

Para otras condiciones de borde que no estén contenidas en la curva calculada, el funcional anterior no tendrá extremales y por lo tanto no existe solución al problema.

Problema 4.5

Determinar, entre todas las curvas posibles que unen dos puntos extremos fijos a y b , cuál es la que minimiza el tiempo de recorrido de un haz de luz, donde su velocidad solo depende del eje y , además se puede expresar como $v(y) = \frac{c}{n}$ donde n es el índice de refracción que se puede expresar como una función: $n = f(y) = n_0(1 + \alpha y)$.

Solución

El principio de Fermat establece que el trayecto de un haz de luz al propagarse de un punto a otro será aquel que necesite el mínimo tiempo para recorrerlo, es por esto que la curva que calcularemos será efectivamente la trayectoria realizada por un haz de luz.

Frente a índices de refracción homogéneos la velocidad será constante y en consecuencia su trayectoria será una recta. En cambio, frente a índices de refracción variable, la luz se propagará por el medio sobre el cual tenga una mayor velocidad. Así la trayectoria tiempo total estará dado por:

$$Tiempo = \int_a^b dt = \int_a^b \frac{dl}{v} = \frac{1}{c} \int_a^b n dl = \frac{1}{c} \int_a^b n_0(1 + \alpha y) dl$$

Con $n = f(y)$, es decir el índice de refracción depende del eje y .

El diferencial dl representa una pequeña porción de la curva descrita, por lo que está dado por:

$$dl = \sqrt{1 + (\dot{y}(x))^2} dx = \sqrt{1 + (\dot{x}(y))^2} dy$$

Por lo tanto, el tiempo total estará dado por:

$$Tiempo = \frac{1}{c} \int_a^b f(y) \sqrt{1 + (\dot{y}(x))^2} dx = \frac{1}{c} \int_a^b f(y) \sqrt{1 + (\dot{x}(y))^2} dy$$

Se podrá usar cualquiera mientras se mantenga la consistencia con las variables dependientes y de integración. Por simplicidad utilizaremos:

$$Tiempo = \int_a^b f(y) \sqrt{1 + (\dot{x}(y))^2} dy$$

Debido a que $f(y)$ depende exclusivamente de y , por lo que se ahorrará así un término en la ecuación de Euler – Lagrange.

Dado que este problema no posee restricciones, la condición necesaria que debe cumplir la curva óptima está dada por la ecuación:

$$F_x - \frac{d}{dy}(F_{\dot{x}}) = 0$$

Con $F(x, \dot{x}, y) = f(y) \sqrt{1 + (\dot{x}(y))^2}$.

Para este problema en particular se tiene que:

$$F_x = 0$$

$$F_{\dot{x}} = \frac{f(y)\dot{x}(y)}{\sqrt{1 + (\dot{x}(y))^2}}$$

Y, por lo tanto, reemplazando en la ecuación de Euler – Lagrange llegamos a lo siguiente:

$$F_{\dot{x}} = \frac{f(y)\dot{x}(y)}{\sqrt{1 + (\dot{x}(y))^2}} = C$$

Utilizando álgebra simple se puede despejar $\dot{x}(y)$ como sigue:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{C}{\sqrt{f(y)^2 - C^2}}$$

Se debe notar que la ecuación anterior se puede resolver utilizando el método de variables separables, de donde se obtiene:

$$x(y) = \int \frac{C}{\sqrt{f(y)^2 - C^2}} dy = \int \frac{C}{\sqrt{n_0^2(1 + \alpha y)^2 - C^2}} dy$$

$$\int \frac{C}{\sqrt{n_0^2(1 + \alpha y)^2 - C^2}} dy = \frac{C}{\alpha n_0} \int \frac{1}{\sqrt{\left(y + \frac{1}{\alpha}\right)^2 - \frac{C^2}{\alpha^2 n_0^2}}} dy$$

Para resolver la integral anterior, realizamos los siguientes cambios de variables:

$$u = y + \frac{1}{\alpha}, du = dy$$

$$D = \frac{C}{\alpha n_0}, D \in \mathbb{R}$$

De aquí:

$$\frac{C}{\alpha n_0} \int \frac{1}{\sqrt{\left(y + \frac{1}{\alpha}\right)^2 - \frac{C^2}{\alpha^2 n_0^2}}} dy = D \int \frac{1}{\sqrt{u^2 - D^2}} du$$

Para resolver la integral anterior, nuevamente se requiere realizar un cambio de variable de la siguiente forma:

$$u = D \sec(\theta), du = D \sec(\theta) \tan(\theta) d\theta$$

De aquí:

$$D \int \frac{1}{\sqrt{u^2 - D^2}} du = D \int \frac{D \sec \theta \tan \theta d\theta}{D \sqrt{\sec^2 \theta - 1^2}}$$

Utilizando las identidades trigonométricas se obtiene la siguiente relación:

$$\sec^2 \theta - 1^2 = \tan^2 \theta$$

De donde finalmente:

$$D \int \frac{D \sec \theta \tan \theta d\theta}{D \sqrt{\sec^2 \theta - 1^2}} = D \int \sec \theta d\theta$$

Para resolver la integral de la secante (Si usted conoce el resultado anterior puede omitir este paso):

$$D \int \sec \theta \frac{\sec \theta + \tan \theta}{\sec \theta + \tan \theta} d\theta = D \int \frac{\sec^2 \theta + \sec \theta \tan \theta}{\sec \theta + \tan \theta} d\theta$$

Realizado nuevamente un cambio de variable:

$$v = \sec \theta + \tan \theta, dv = (\sec \theta \tan \theta + \sec^2 \theta) d\theta$$

Utilizando el cambio de variables en la relación anterior se tiene que:

$$D \int \frac{\sec^2 \theta + \sec \theta \tan \theta}{\sec \theta + \tan \theta} d\theta = \int \frac{1}{v} dv$$

Obteniendo finalmente:

$$x(y) = D \ln|v| + A, \quad \text{con } A \in \mathbb{R}$$

Ahora hay que devolverse desde v a la variable inicial y . Para esto, se sustituyen de vuelta todos los cambios de variables realizados, de donde finalmente se obtiene:

$$x(y) = \frac{D}{c} \ln \left| \frac{y + \frac{1}{a}}{D} + \frac{\operatorname{sencos}^{-1} \left(\frac{D}{y + \frac{1}{a}} \right) \left(y + \frac{1}{a} \right)}{D} \right| + A, \quad \text{con } A \in \mathbb{R}$$

Problema 4.6

Determine el plan de consumo $C(t)$, sobre un periodo, $0 \leq t \leq T$ que maximice la utilidad descontada en el tiempo, donde $C(t)$ y las utilidades se relacionan mediante el siguiente funcional:

$$\operatorname{Max} \int_0^T e^{-rt} C(t)^a dt$$

Con $0 < a < 1$, $a \in \mathbb{R}$. Esto sujeto a la siguiente restricción de flujo de caja: Existen ingresos hacia la persona asociados los intereses ganados, iK , por la tenencia de activos de capital $K(t)$. Es decir, el individuo puede obtener préstamos de capital ($K < 0$) y/o invertir capital a una tasa de interés i . De esta manera, se obtiene una ecuación de equilibrio entre los ingresos (sueldo e intereses) y los gastos (consumo e inversiones) como la siguiente:

$$C(t) = iK(t) - \dot{K}(t)$$

Por último, la cantidad de capital inicial y final es conocida (condiciones de borde):

$$K(0) = K_0 \text{ y } K(T) = K_T$$

Solución

El problema se puede escribir como:

$$\max_{K(t)} \int_0^T e^{-rt} (iK(t) - \dot{K}(t))^a dt$$

Tomando $F = e^{-rt}(iK(t) - \dot{K}(t))^a$ se procede a utilizar la ecuación de Euler – Lagrange:

$$F_k - \frac{d}{dt} F_{\dot{k}} = 0$$

Para este problema en particular:

$$F_k = e^{-rt} a C(t)^{a-1} \frac{dC}{dk}$$

$$F_{\dot{k}} = e^{-rt} a C(t)^{a-1} \frac{dC}{d\dot{k}}$$

Por otro lado:

$$\frac{dC}{dk} = i$$

$$\frac{dC}{d\dot{k}} = -1$$

Finalmente, reemplazando se llega a la siguiente ecuación de Euler – Lagrange:

$$e^{-rt} a C(t)^{a-1} i + \frac{d(e^{-rt} a C(t)^{a-1})}{dt} = 0$$

Desarrollando la derivada con respecto al tiempo del segundo término:

$$e^{-rt} a C(t)^{a-1} i + (-r e^{-rt} a C(t)^{a-1} + e^{-rt} a(a-1) C(t)^{a-2} \frac{dC}{dt}) = 0$$

De la ecuación anterior, utilizando álgebra simple se obtiene la siguiente relación:

$$i - r + \frac{(a-1)dC}{C dt} = 0$$

Nótese que la ecuación anterior puede ser resuelta por el método de separación de variables, por lo que su solución está dada por:

$$C(t) = Ae^{\frac{i-r}{1-a}t}$$

Se puede comprobar si corresponde a un máximo con las condiciones de segundo orden:

$$F_k = -e^{-rt}aC(t)^{a-1}$$

$$F_{kk} = -e^{-rt}a(a-1)C(t)^{a-2}\frac{dC}{dk}$$

$$F_{kk} = e^{-rt}a(a-1)C(t)^{a-2}$$

Como $a \in (0,1)$, entonces $F_{kk} < 0$, lo que corrobora que es un máximo a través de las condiciones de segundo orden.

Ahora si la tasa de interés es mayor que r , el consumo crecerá. En cambio, si es menor el consumo ira decayendo a medida que transcurre el tiempo.

De aquí:

$$iK(t) - \dot{K}(t) = C(t) = Ae^{\frac{i-r}{1-a}t}$$

La ecuación anterior corresponde a una ecuación lineal de primer orden, Y su solución se encuentra dada por:

$$K(t) = e^{it}K_0 \left[1 - \frac{1 - e^{-rt}}{1 - e^{-rT}} \right]$$

Se debe notar que ya hemos utilizado las condiciones de borde. Finalmente, de esta última ecuación se puede obtener:

$$C(t) = \frac{(rK_0 e^{(i-r)t})}{(1 - e^{-rT})}$$

Que corresponde el plan de consumo óptimo que maximiza las utilidades descontadas para este determinado problema.

Problema 4.7

Considere el siguiente funcional:

$$\text{Max} \int_0^{2\pi} [x^2 - \dot{x}^2] dt$$

s. a.

$$x(0) = 0$$

$$x(2\pi) = 0$$

- Demuestre que los extremos del funcional son de la forma $x(t) = C \text{sen}(t)$ y que se obtiene un valor de cero al evaluar la integral. ¿Se satisface la condición de segundo orden o de Legendre? ¿Es el integrando cóncavo?
- Demostrar que $y(t) = t - \frac{t^2}{2\pi}$ es una solución factible y que se obtiene un valor positivo al evaluarla en la integral. ¿Qué conclusiones se pueden obtener de la suficiencia de la condición de segundo orden (Legendre)?

Solución

a. Sea $F(t, x, \dot{x}) = [x^2 - \dot{x}^2]$. Es posible apreciar que la función no varía con respecto a t , por lo tanto, se debe simplificar la ecuación de Euler-Lagrange tomando en consideración el caso en que F no depende de t (ver Anexo II). Luego, se tiene:

$$F - \dot{x}F_{\dot{x}} = cte$$

$$[x^2 - \dot{x}^2] - \dot{x}(-2\dot{x}) = C$$

$$x^2 - \dot{x}^2 + 2\dot{x}^2 = C$$

$$x^2 + \dot{x}^2 = C$$

Resolviendo esta ecuación diferencial (ver Anexo I) queda:

$$x^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = C$$

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{C - x^2}$$

$$\frac{dx}{\sqrt{C - x^2}} = dt$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{C - x^2}} = \int dt$$

Para el lado izquierdo de esta expresión se realiza el siguiente cambio de variables:

$$x = \sqrt{C} \operatorname{sen} \theta \rightarrow dx = \sqrt{C} \cos \theta d\theta$$

Además, se considera la identidad trigonométrica que relaciona $\operatorname{sen} \theta$ con $\cos \theta$, es decir:

$$\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \rightarrow \cos \theta = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \theta}$$

Por tanto, se llega a:

$$\int \frac{\sqrt{C} \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \theta}}{\sqrt{C} \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \theta}} d\theta = t - C_2$$

$$\int d\theta = t - C_2$$

$$\theta = t - C_2$$

Ahora, si se considera que $\theta = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{C}}\right)$ y se reemplaza en esta expresión se tiene:

$$\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{C}}\right) = t - C_2$$

$$x = \sqrt{C} \operatorname{sen}(t - C_2)$$

$$x = C_1 \operatorname{sen}(t - C_2)$$

Para conocer los valores de C_1 y C_2 , se deben considerar la condición de borde $x(0) = 0$, por tanto:

$$x(0) = C_1 \operatorname{sen}(0 - C_2) = 0$$

$$\operatorname{sen}(-C_2) = 0$$

Luego, dado que la función $\text{sen}(\cdot)$ es impar, se tiene que $\text{sen}(-\cdot) = -\text{sen}(\cdot)$. Luego:

$$-\text{sen}(C_2) = 0$$

$$\text{sen}(C_2) = 0$$

De esta manera:

$$C_1 = \text{cte} \neq 0$$

$$C_2 = 0$$

Por tanto,

$$x(t) = C \text{sen}(t)$$

Si se consideran nuevamente la integral del problema y se evalúa en base al valor encontrado para $x(t)$ queda:

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} [x^2 - \dot{x}^2] dt \\ & \int_0^{2\pi} [C^2 \text{sen}^2(t) - \dot{C}^2 \text{cos}^2(t)] dt = C^2 \int_0^{2\pi} [2\text{sen}^2(t) - 1] dt \\ & = C^2 \left[-\frac{1}{2} \text{sen}(2t) \right] \Big|_0^{2\pi} = 0 \end{aligned}$$

Ahora, para que sea un máximo se debe considerar la condición de segundo orden, por tanto:

$$F_{\dot{x}\dot{x}} \leq 0$$

$$F_{\dot{x}\dot{x}} = -2 \leq 0$$

Siempre que se cumpla la condición de segundo orden, la función encontrada corresponde efectivamente a un máximo.

b. En este caso, se debe evaluar la función $y(t) = t - \frac{t^2}{2\pi}$ para determinar si cumple con la condición de Euler-Lagrange. En caso de que el resultado sea positivo, implica que la solución es factible y maximiza el funcional. Luego,

$$y + \dot{y} = 0$$

Donde:

$$y(t) = t - \frac{t^2}{2\pi}$$

$$\dot{y}(t) = 1 - \frac{t}{\pi}$$

$$\ddot{y}(t) = -\frac{1}{\pi}$$

Por tanto,

$$t - \frac{t^2}{2\pi} + \left(-\frac{1}{\pi}\right) \neq 0$$

Luego, $y(t) = t - \frac{t^2}{2\pi}$ no es una función factible del funcional.

Problema 4.8

Se desea determinar el plan de producción óptimo para una mina sobre un horizonte de tiempo no definido. Sea $F(t)$ la probabilidad de agotamiento de las reservas minerales en t , $F'(t)$ la función densidad de probabilidad y T la vida máxima de la mina (LOM). Entonces, se tiene que $F(t) = 1$. Luego, $1 - F(t) = \int_t^T F'(s)ds$ es la probabilidad de vida de la mina en t . La utilidad no depende solo de la producción $U(C)$, sino que también de las reservas remanentes. Lo último es expresado a través de $W(K)$, función continuamente diferenciable, no negativa y creciente. Se define $a(t)$ como la tasa de descuento asociada a la utilidad de *stock*. El comportamiento de la función no es especificado. Esta podría incrementarse para algunos tiempos y declinar para otros.

Solución

El problema a resolver está dado por maximizar la utilidad, por tanto:

$$\text{Max} \int_0^T F'(t) \left[\int_0^t e^{-rs} U(C(s)) ds + a(t)W(K(t)) \right] dt$$

s. a.

$$C(t) = iK(t) + w(t) - K'(t)$$

$$K(0) = K_0$$

El problema puede ser reinterpretado de la siguiente manera: si la vida de la mina es al menos hasta t (probabilidad $1 - F(t)$), entonces la utilidad por producir es recogida en $U(C(t))$. Si la mina cierra en t (probabilidad $F'(t)$) la utilidad remanente también es recibida. Luego, según esto, se tiene:

$$\int_0^T \{e^{-rt} U(C(t)) [1 - F(t)] + a(t)W(K(t))F'(t)\} dt$$

Entonces, sea $G = e^{-rt} U(C(t)) [1 - F(t)] + a(t)W(K(t))F'(t)$. Si se reemplaza el valor de $C(t)$ en esta expresión se tiene:

$$G = e^{-rt} U(iK(t) + w(t) - K'(t)) [1 - F(t)] + a(t)W(K(t))F'(t)$$

Luego, por la ecuación de Euler-Lagrange:

$$G_k - \frac{d}{dt} G_{k'} = 0$$

Por tanto, las derivadas de G con respecto a $K(t)$ y a $K'(t)$ son, respectivamente:

$$G_k = e^{-rt} U'(C(t)) i [1 - F(t)] + a(t)W'(K(t))F'(t)$$

$$G_{k'} = -e^{-rt} U'(C(t)) i [1 - F(t)]$$

Luego:

$$e^{-rt} U'(C(t)) i [1 - F(t)] + a(t)W'(K(t))F'(t) - \frac{d}{dt} (-e^{-rt} U'(C(t)) i [1 - F(t)]) = 0$$

$$\frac{d}{dt} (-e^{-rt} U'(C(t)) i [1 - F(t)]) = e^{-rt} U'(C(t)) i [1 - F(t)] + a(t)W'(K(t))F'(t)$$

Al desarrollar y reordenar los términos, finalmente se obtiene:

$$C'(t) = -\frac{(i-r)U'(C(t))}{U''(C(t))} + \left[\frac{F'(t)}{1-F(t)} \right] \frac{U(C(t)) - e^{rt}a(t)W'(K(t))}{U''(C(t))}$$

Problema 4.9

Encuentre los extremales del siguiente funcional:

$$J(y) = \int_0^1 4xy + y^2 dx$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 1$$

Solución

Se sabe que la curva extremal del funcional anterior debe satisfacer la ecuación de Euler–Lagrange. Este problema no posee restricciones de ningún tipo, por lo que se define:

$$F(x, y(x), \dot{y}(x)) = 4xy + y^2$$

Imponiendo la ecuación de Euler – Lagrange para la solución de y :

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{\dot{y}} = 0$$

Para este problema en particular se tiene que:

$$F_y = 0$$

$$F_{\dot{y}} = 4x + 2\dot{y}$$

Por lo tanto, la condición de primer orden resulta:

$$4 + \frac{d}{dx} (2\dot{y}) = 0$$

Dado que y depende exclusivamente de x , la ecuación anterior se traduce en:

$$4 + 2\ddot{y} = 0$$

Nótese que esta ya no es una ecuación diferencial de primer orden. Si bien el anexo de ecuaciones diferenciales menciona la solución de algunas ecuaciones de orden superior, en este caso particular simplemente se puede realizar el siguiente cambio de variable:

$$z = \dot{y}$$

De donde se obtiene que:

$$\dot{z} = \ddot{y}$$

Por lo tanto, la ecuación diferencial ordinaria es equivalente a:

$$4 + 2\dot{z} = 0$$

La ecuación anterior puede ser resuelta fácilmente utilizando separación de variables, de donde:

$$z(x) = -2x + C_1$$

Volviendo a la variable original:

$$y'(x) = -2x + C_1$$

Donde nuevamente se puede utilizar separación de variables llegando a la siguiente solución:

$$y(x) = -x^2 + C_1x + C_2$$

Para determinar las constantes de integración, se utilizan las condiciones de borde:

$$y(0) = 0 = C_2$$

$$y(1) = 1 = -1 + C_1$$

De aquí:

$$C_1 = 2$$

De donde finalmente se encuentra la solución:

$$y(x) = -x^2 + 2x$$

Para determinar si la función anterior maximiza o minimiza el funcional anterior se buscan las condiciones de segundo orden:

$$F_{\dot{y}} = 4x + 2\dot{y}$$

Por lo tanto:

$$F_{\dot{y}\dot{y}} = 2$$

De donde se confirma que el extremal encontrado corresponde a un mínimo ya que $F_{\dot{y}\dot{y}} > 0$.

Problema 4.10

Demuestre la ecuación de Euler-Lagrange para funcionales que dependen de derivadas de orden superior:

$$J = \int_a^b F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) dx$$

Solución

La determinación de los extremos de funcionales dependientes de derivadas de orden superior es análoga al proceso de derivación de la ecuación de Euler-Lagrange de primer orden.

Para ello, considérese en primer lugar la variación ΔJ del funcional $J(y)$ a través de la función variada $y(x) + h(x)$, que satisface las condiciones de borde.

$$y(a) = a_0, y'(a) = a_1, \dots, y^{(n-1)}(a) = a_{n-1}$$

$$y(b) = b_0, y'(b) = b_1, \dots, y^{(n-1)}(b) = b_{n-1}$$

De modo que la función $h(x)$ satisfaga:

$$h(a) = 0, h'(a) = 0, \dots, h^{(n-1)}(a) = 0$$

$$h(b) = 0, h'(b) = 0, \dots, h^{(n-1)}(b) = 0$$

Así, se tiene que:

$$\Delta J = J(y + h) - J(y)$$

$$= \int_a^b F(x, y + h, y' + h', \dots, y^{(n)} + h^{(n)}) dx - \int_a^b F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) dx$$

Luego, desarrollando mediante la expresión de Taylor de primer orden:

$$\Delta J = \int_a^b \left[F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) + F_y h + F_{y'} h' + \dots + F_{y^{(n)}} h^{(n)} - F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) \right] dx + \varepsilon(\xi)$$

$$\Delta J = \int_a^b \left[F_y h + F_{y'} h' + \dots + F_{y^{(n)}} h^{(n)} \right] dx + \varepsilon(\xi)$$

Donde $\varepsilon(\xi)$ denota el error asociado a la aproximación de Taylor de primer orden. No obstante, se debe notar que la última integral de la derecha representa el principal aporte lineal del incremento ΔJ , correspondiente a la variación δJ , y que como sabemos, vale cero para todo extremo óptimo. Es decir, se tiene la expresión:

$$\int_a^b \left[F_y h + F_{y'} h' + \dots + F_{y^{(n)}} h^{(n)} \right] dx = 0$$

De esta condición es posible integrar por partes el segundo término de la derecha:

$$\int_a^b [F_{y'} h'] dx = F_{y'} h \Big|_a^b - \int_a^b \left[\frac{dF_{y'}}{dx} h \right] dx$$

Mientras que si se integra por partes dos veces el tercer término:

$$\int_a^b [F_{y''} h''] dx = F_{y''} h' \Big|_a^b - F_{y'} h \Big|_a^b + \int_a^b \left[\frac{d^2 F_{y''}}{dx^2} h \right] dx$$

Y así sucesivamente hasta el último término integrando n veces, y recordando que en los puntos $x = a$ y $x = b$ las variaciones en dichos puntos desaparecen, se obtiene que:

$$\int_a^b \left(F_y - \frac{dF_{y'}}{dx} + \frac{d^2 F_{y''}}{dx^2} - \frac{d^3 F_{y'''}}{dx^3} + \dots + (-1)^n \frac{d^n F_{y^{(n)}}}{dx^n} \right) h dx = 0$$

Luego, dado que h es arbitrario y que el primer factor del integrando tomado sobre la curva $y = y(x)$ es una función continua de x , se sigue del lema fundamental del cálculo variacional que el primer factor es cero. Es decir:

$$F_y - \frac{dF_{y'}}{dx} + \frac{d^2 F_{y''}}{dx^2} - \frac{d^3 F_{y'''}}{dx^3} + \dots + (-1)^n \frac{d^n F_{y^{(n)}}}{dx^n} = 0$$

Esta ecuación diferencial, de orden $2n$, es llamada ecuación de Euler-Lagrange, y su solución general contiene $2n$ constantes arbitrarias que pueden ser determinadas de las condiciones de borde.

Problema 4.11

Considere el siguiente funcional:

$$\min_x \int_a^b t e^{\dot{x}} dt$$

Donde a y b son números positivos. Encuentre el extremo del funcional ¿se satisface la condición de segundo orden (Legendre)? ¿Es el integrando cóncavo?

Solución

Se define el siguiente funcional $F(t, x, \dot{x}) = t e^{\dot{x}}$.

Como $F_{\dot{x}} = 0$, entonces:

$$F_{\dot{x}} = t e^{\dot{x}} = C$$

$$\frac{dx}{dt} = \ln\left(\frac{C}{t}\right)$$

$$x = \int \ln\left(\frac{C}{t}\right) dt + A$$

Si se integra por partes se obtiene:

$$u = \ln\left(\frac{C}{t}\right) \rightarrow du = -\frac{1}{t}$$

$$dv = dt \rightarrow v = t$$

Entonces:

$$\ln\left(\frac{C}{t}\right)t + \int t \frac{1}{t} dt$$

$$\ln\left(\frac{C}{t}\right)t + t + A$$

La condición de segundo orden o de Legendre debe ser positiva para que sea un mínimo.

Luego:

$$F_{\dot{x}\dot{x}} > 0$$

$$F_{\dot{x}\dot{x}} = F_{\dot{x}} = te^x$$

Dado que a y b son números donde t será positivo y la función exponencial siempre es positiva, se cumple con la segunda condición para que el extremal sea un mínimo.

Problema 4.12

Determinar, entre todas las curvas posibles que unen dos puntos extremos fijos (x_0, y_0) y (x_1, y_1) , cuál es la que minimiza el área superficial del volumen de revolución generado al hacerla girar alrededor del eje de las abscisas.

Solución

El área de la superficie de revolución generada al hacer girar la curva $y(x)$ en torno al eje x viene dada por:

$$J(y) = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} y(x) \sqrt{1 + \dot{y}(x)^2} dx$$

De acuerdo a la forma de este último, se puede utilizar la condición de primer orden o ecuación de Euler-Lagrange. La ecuación establece que para funcionales de la forma:

$$J(y) = \int_a^b F(x, y(x), \dot{y}(x)) dx$$

La condición necesaria para que $y(x)$ sea un extremo es:

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{\dot{y}} = 0 \quad \forall x \in [a, b]$$

Expandiendo el segundo término, que es la derivada total de F_y respecto a x , se llega a:

$$F_y - \left(\frac{d}{dx} F_{y\dot{y}} \dot{y} + F_{y_x} \right) = 0$$

En este problema, $F(x, y, \dot{y}) = y\sqrt{1 + \dot{y}^2}$

Como no depende de x y considerando los casos posibles del funcional presentados en Anexos II, la ecuación diferencial que indica la curva que minimiza el área del volumen de revolución es:

$$y\sqrt{1 + \dot{y}^2} - y \frac{\dot{y}^2}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} = C$$

Donde C es una constante. Así, se llega a:

$$y = C\sqrt{1 + \dot{y}^2}$$

Para resolver la ecuación diferencial ordinaria anterior se reescribe esta como:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y^2 - C^2}{C^2}}$$

Integrando a ambos lados:

$$\int \frac{1}{\sqrt{y^2 - C^2}} dy = \int \frac{1}{C} dx$$

Ahora, si se realiza un cambio de variable y se considera la identidad trigonométrica que relaciona la tangente y la secante se tiene:

$$y = C \sec(u) \rightarrow dy = C \tan(u) \sec(u) du$$

$$1 + \tan^2(u) = \sec^2(u) \rightarrow \tan(u) = \sqrt{\sec^2(u) - 1}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{y^2 - C^2}} dy = \int \frac{C \tan(u) \sec(u)}{\sqrt{C^2 \sec^2(u) - C^2}} du = \int \frac{C \tan(u) \sec(u)}{C \tan(u)} du$$

Por tanto:

$$\int \sec(u) du = \frac{x + C_1}{C}$$

$$\log|\sec(u) + \tan(u)| = \frac{x + C_1}{C}$$

Donde $u = \sec^{-1}\left(\frac{y}{C}\right)$. Luego:

$$\log\left|\frac{y}{C} + \tan\left(\sec^{-1}\left(\frac{y}{C}\right)\right)\right| = \frac{x + C_1}{C}$$

Ahora, si se utiliza nuevamente la identidad trigonométrica antes presentada se tiene:

$$\log\left|\frac{y}{C} + \sqrt{\sec^2\left(\sec^{-1}\left(\frac{y}{C}\right)\right) - 1}\right| = \frac{x + C_1}{C}$$

$$\log\left|\frac{y}{C} + \sqrt{\frac{y^2 - C^2}{C^2}}\right| = \frac{x + C_1}{C}$$

$$\log\left|\frac{y + \sqrt{y^2 - C^2}}{C}\right| = \frac{x + C_1}{C}$$

Como se tiene un valor absoluto en la expresión, se tendrán dos resultados equivalentes:

$$\frac{y + \sqrt{y^2 - C^2}}{C} = e^{\frac{x+C_1}{C}}$$

Luego, sumando ambas igualdades, es posible despejar $y(x)$:

$$\frac{2y}{C} = e^{\frac{x+C_1}{C}} + e^{-\frac{x+C_1}{C}}$$

$$y = C\left(\frac{1}{2}e^{\frac{x+C_1}{C}} + \frac{1}{2}e^{-\frac{x+C_1}{C}}\right)$$

$$y(x) = C \cosh\left(\frac{x + C_1}{C}\right)$$

Los valores de las constantes C y C_1 se pueden determinar a partir de las condiciones iniciales $y(x_0) = y_0$ y $y(x_1) = y_1$. No obstante, aún no se sabe si es un máximo o un mínimo, por

tanto, es necesario utilizar la condición de segundo orden de Legendre. Esta condición establece que:

Si $F_{\dot{y}\dot{y}} \geq 0$, entonces $y(x)$ es mínimo.

Luego,

$$F_{\dot{y}\dot{y}} = \frac{y}{\sqrt{1+\dot{y}^2}} \left(1 - \frac{\dot{y}^2}{1+\dot{y}^2} \right) \geq 0$$

Lo que efectivamente se cumple, dado que $\frac{\dot{y}^2}{1+\dot{y}^2} \leq 1$, por lo que $1 - \frac{\dot{y}^2}{1+\dot{y}^2} \geq 0$ al igual que $\frac{y}{\sqrt{1+\dot{y}^2}} \geq 0$. Por tanto, la curva encontrada es mínima.

Anexo I: Resolución de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

1. Método de variables separables

Dada la siguiente ecuación diferencial:

$$g(x) = h(y)y'$$

Se puede resolver esta de la siguiente forma:

$$g(x)dx = h(y)dy$$

E integrando a ambos lados, suponiendo que G y H son las primitivas de g y h correspondientemente:

$$G(x) = H(y) + C, \quad \text{con } C \in \mathbb{R}$$

Que es la solución general de la ecuación.

2. Método de la sustitución lineal

Si se tiene la siguiente ecuación diferencial:

$$y' = f(ax + by)$$

Se puede realizar el siguiente cambio de variable:

$$z = ax + by$$

De donde:

$$y' = \frac{z' - a}{b}$$

Donde la ecuación queda:

$$\frac{z' - a}{b} = f(z)$$

Cuya solución se puede determinar utilizando el método de variables separables.

3. Ecuaciones homogéneas

Para la ecuación diferencial de la siguiente forma:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Se puede realizar el siguiente cambio de variable:

$$u = \frac{y}{x}$$

De donde:

$$y' = u'x + u$$

Donde la ecuación queda:

$$u'x + u = f(u)$$

La que finalmente se puede escribir como:

$$\frac{u'}{f(u) - u} = \frac{1}{x}$$

Ecuación que nuevamente se puede solucionar mediante el método de separación de variables.

4. Reducibles a homogéneas

Para la ecuación diferencial de la siguiente forma:

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{ax + by + c}\right)$$

Se distinguen dos casos posibles:

1) Si las rectas $ax + by + c = 0$ y $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ se cortan en (x_0, y_0) se realizan los siguientes cambios de variable:

$$Y = y - y_0, X = x - x_0$$

De donde la ecuación anterior se reduce a una del tipo homogénea.

2) Si las rectas $ax + by + c = 0$ y $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ son paralelas, entonces se realiza el siguiente cambio de variable:

$$z = ax + by$$

Cuya solución se puede encontrar utilizando el método de separación de variables.

Las demostraciones de los dos casos anteriores se escapan del curso y quedan propuestos al lector.

5. Transformables a homogéneas

Para la ecuación diferencial de la siguiente forma:

$$y' = f(x, y)$$

Tal que f satisface la siguiente relación:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^\alpha f(x, y), \alpha \neq 0$$

Entonces el cambio de variable:

$$y = z^\alpha$$

Transforma la ecuación anterior en una del tipo homogénea. (Si $\alpha = 0$ entonces la ecuación se puede resolver utilizando separación de variables).

6. Ecuaciones exactas

Para la ecuación diferencial de la forma:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

Tal que se cumpla $P_y = Q_x$, se busca una función F tal que:

$$dF = Pdx + Qdy$$

De donde la solución a la ecuación anterior está dada por:

$$F(x, y) = C$$

7. Ecuaciones lineales de primer orden:

Para la ecuación de la siguiente forma:

$$y' + a(x)y = b(x)$$

La solución está dada por la siguiente forma:

$$y(x) = e^{-\int a(x)dx} \left[\int b(x)e^{\int a(x)dx} dx \right] + C, C \in \mathbb{R}$$

8. Ecuación de Bernoulli

Para la ecuación diferencial de la siguiente forma:

$$y' + a(x)y + b(x)y^\alpha = 0$$

Realizando el siguiente cambio de variable:

$$y^{1-\alpha} = z$$

De donde se obtiene que:

$$\frac{1}{y^\alpha} y' = \frac{z'}{1-\alpha}$$

Reemplazando en la ecuación anterior:

$$\frac{z'}{1-\alpha} + a(x)z + b(x) = 0$$

Que puede ser resuelta utilizando el método para ecuaciones lineales de primer orden.

9. Ecuación de Riccati

Para la ecuación diferencial de la siguiente forma:

$$y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x)$$

La solución de este tipo de ecuaciones requiere haber encontrado previamente una solución particular $y_p(x)$.

Con esto, se realiza el siguiente cambio de variable:

$$y = y_p + z$$

De donde:

$$y' = y_p' + z'$$

Sustituyendo en la ecuación anterior:

$$z' + a(x)z + b(x)z^2 + 2b(x)zy_p = 0$$

O equivalentemente:

$$z' + [a(x) + 2b(x)y_p(x)]z + b(x)z^2 = 0$$

Ecuación que puede ser resuelta utilizando el método de Riccati.

10. Ecuación de Liouville

Para la ecuación diferencial de la siguiente forma:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

Si conocemos $y_1(x)$ una solución no nula de la ecuación, entonces:

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{1}{y_1(x)^2} e^{-\int P(x)dx} dx$$

Con y_1, y_2 soluciones linealmente independientes para la ecuación.

11. Ecuación homogénea de orden superior con coeficientes constantes

Para la ecuación diferencial de la siguiente forma:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0$$

Se puede calcular el polinomio característico de la siguiente forma:

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$$

Se busca soluciones a la ecuación:

$$p(\lambda) = 0$$

Se debe notar que la ecuación anterior es de grado n , por lo que posee n soluciones (no necesariamente distintas).

De esta forma, las soluciones particulares siguen el siguiente comportamiento:

Si la multiplicidad geométrica de λ_i es exactamente 1:

$$y_i(x) = e^{\lambda_i x}, \forall i$$

Si la multiplicidad geométrica de λ_i es mayor a 1:

$$y_i(x) = \sum_{i=1}^k C_i x^{i-1} e^{\lambda_i x}$$

De esta forma, la solución general de la ecuación estará dada por una combinación lineal de las soluciones particulares.

Anexo II: Casos especiales para la ecuación de Euler-Lagrange

Tomando de forma general el funcional:

$$J(y) = \int_a^b F(x, y(x), y'(x)) dx$$

Al momento de buscar el extremal de dicha función es posible encontrarse con algunos de los siguientes casos:

a) F no depende explícitamente de $y'(x)$

En este caso la función sería de la forma $F(x, y(x))$. Lo que implica que $F_{y'} = 0$. Por lo que la ecuación de Euler-Lagrange para encontrar el máximo o mínimo quedaría de la forma:

$$F_y = 0$$

b) F no depende explícitamente de $y(x)$ ni de x

Para este caso la función solo depende explícitamente de $y'(x)$, por lo que $F_y = 0$. Quedando la ecuación de Euler-Lagrange expresada como:

$$\frac{d}{dx}(F_{y'}) = 0$$

Recordando cálculo en varias variables, el diferencial de F se puede escribir de la siguiente manera:

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial x} \delta x + \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y'$$

Dividiendo por δx y tomando límite de que δx tiende a cero, se tiene:

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial y'} y''$$

Tomando este caso en particular:

$$\frac{dF_{y'}}{dx} = \frac{\partial F_{y'}}{\partial x} + \frac{\partial F_{y'}}{\partial y} y' + \frac{\partial F_{y'}}{\partial y'} y''$$

Pero como F solo depende de $y'(x)$, entonces:

$$\frac{\partial F_{y'}}{\partial x} = \frac{\partial F_{y'}}{\partial y} = 0$$

Quedando la expresión inicial reducida a:

$$F_{y'y''} = 0$$

c) F no depende explícitamente de x

Para este caso se tiene que la función es de la forma $F(y(x), y'(x))$.

En este caso la ecuación de Euler-Lagrange queda resumida a:

$$F - y'F_{y'} = cte$$

Para demostrar esta expresión, primero se deriva el término con respecto a x . Quedando:

$$\frac{d}{dx}(F - y'F_{y'}) = 0$$

Ocupando la misma propiedad para el diferencial de x , ocupado en la demostración anterior, se tiene que:

$$\frac{d}{dx}(F - y'F_{y'}) = y'F_y + y''F_{y'} + F_x - \left[y''F_{y'} + y' \frac{d}{dx}(F_{y'}) \right]$$

De donde despejando se obtiene que:

$$\frac{d}{dx}(F - y'F_{y'}) = y' \left[F_y - \frac{d}{dx}(F_{y'}) \right] = 0$$

Como para este caso, y' es diferente de 0 y está definida en los Reales, se tiene finalmente que:

$$\frac{d}{dx}(F - y'F_{y'}) = F_y - \frac{d}{dx}(F_{y'})$$

Siendo el término de la izquierda la ecuación de Euler-Lagrange.

d) F no depende explícitamente de $y(x)$

Para este caso la función es de la forma $F(x, y'(x))$. Y debido a que $F_y = 0$, la ecuación de Euler-Lagrange queda de la Forma:

$$\frac{d}{dx}(F_{y'}) = 0$$

Y al integrar se obtiene:

$$F_{y'} = Cte$$

e) F es lineal en $y'(x)$

En este caso la función F es de la forma:

$$F = A(x, y(x)) + B(x, y(x))y'$$

Desarrollando la ecuación de Euler-Lagrange, se tiene que:

$$F_y - \frac{d}{dx}(F_{y'}) = A_y + B_y y' - \frac{d}{dx}(B)$$

Lo que es equivalente a:

$$A_y + B_y y' - B_x - B_y y'$$

Finalmente: $A_y - B_x = 0$.

Capítulo 5: Programación dinámica

En este capítulo se describen los conceptos básicos de la programación dinámica, uno de los tres métodos de optimización dinámica a estudiar en este libro con el objetivo de resolver el problema dinámico intertemporal de la maximización de utilidad de la extracción de minerales. Se introducirán en primer lugar los conceptos básicos de la programación dinámica, para luego derivar la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman. Posteriormente se evaluará su relevancia y aplicación para la resolución del problema del planificador minero. De manera particular, se utilizará este método para derivar la ecuación de HJB orientada a determinar la política de leyes de cortes óptimas en el tiempo.

5.1 Introducción a la programación dinámica

Esta herramienta matemática surgió hacia 1930, pero no se desarrolló formalmente sino hasta la década de 1950 gracias a los esfuerzos del matemático estadounidense Richard Bellman, mientras éste trabajaba en la RAND CORPORATION (Flores, 1964). La programación dinámica es útil para solucionar problemas de optimización en el tiempo y entre sus fortalezas se encuentra la flexibilidad en cuanto a los tipos de problema a los cuales se puede aplicar.

Generalmente se emplea para resolver problemas en los cuales se toman decisiones irreversibles, porque las formulaciones con esta herramienta pueden capturar decisiones que se modifican en el tiempo. Como lo expresa Kennedy (1986): “Las discontinuidades en las

decisiones o variables de estado que surgen de la irreversibilidad de las mismas pueden ser manejadas fácilmente al utilizar programación dinámica numérica.”

Específicamente, el problema del planificador minero consiste en maximizar el valor actual neto (o VAN) asociado a la extracción de algún recurso mineral finito. Este es un ejemplo de un proceso con un número considerable de variables, ya que el productor debe decidir qué, cuándo y cuánto producir, teniendo en cuenta que las decisiones del presente tendrán repercusiones en el futuro, y que los flujos serán descontados, por lo que la utilidad de cada gramo de mineral depende además de cuándo es extraído.

Ahora bien, según White (1969), los elementos básicos de los problemas en etapas secuenciales, aquellos que la programación dinámica puede solucionar, son:

- Estado.
- Decisión.
- Transformación.
- Etapa.
- Función de valor.
- Política.

El “estado” se refiere a las variables que se pueden medir en un instante de tiempo (t) determinado, ya sea de manera discreta (por ejemplo, la cantidad de elementos en un inventario) o de manera continua (por ejemplo, el volumen de agua en un *stock*). Este expresa el estado del sistema en cada instante de tiempo. Para la explotación de minas el estado corresponde generalmente a los recursos remanentes de la mina. A lo largo de este capítulo la variable de estado en el tiempo será representada por $x(t)$.

La “decisión” es la variable que el planificador minero puede controlar, generalmente correspondiente a la tasa de producción en cada instante de tiempo o a la política de leyes de corte. Considerando esto, en cada instante de tiempo existe un estado del sistema y una decisión asociada con respecto a ese estado. Para pasar al siguiente instante de tiempo la “decisión” debe afectar el estado del sistema, lo que se denomina “transformación”.

Este es el concepto de “etapa”, representada por t , cantidad que puede ser discreta (al final de cada año, en reuniones mensuales o semanales, al cumplirse una condición como la finalización de un turno o la llegada de materiales) o continua (en cualquier momento del tiempo). Según Beckmann (1968) las etapas pueden ser finitas o infinitas, y a su vez cualquier sea el caso las etapas podrían ser de naturaleza conocida o desconocida.

La cantidad de etapas impacta directamente en la cantidad de estados y decisiones posibles en el tiempo. En contraste, Sniedovich (2010) diferencia entre problemas con horizonte finito (a los que llama truncados) y horizonte infinito (o no truncados).

En un problema con etapas discretas, la naturaleza de estas repercute directamente en la solución óptima, debido a que se restringe la cantidad de decisiones que se pueden tomar. En el caso de etapas continuas, resulta irrelevante el número de estas, pues son infinitas. Sin embargo, su duración total debe ser tomada en consideración.

Finalmente, para optimizar un proceso es necesario poseer una función objetivo o “función de valor”. Esta podría ser el máximo o el mínimo valor en un periodo de tiempo determinado, o la suma de los ingresos obtenidos durante un lapso de tiempo establecido. En el caso del planificador minero, el valor a maximizar será la suma de los beneficios descontados en el tiempo. El caso discreto anterior se observa en la Figura 5.1. El eje inferior indica la etapa en la que se encuentra y la variable $x_i(t)$ muestra el estado en la etapa t . Cada flecha representa una transformación posible en base a una decisión y el camino marcado es el que representa mayor potencial de optimización, lo que representa una “política” factible o conjunto de decisiones en el tiempo.

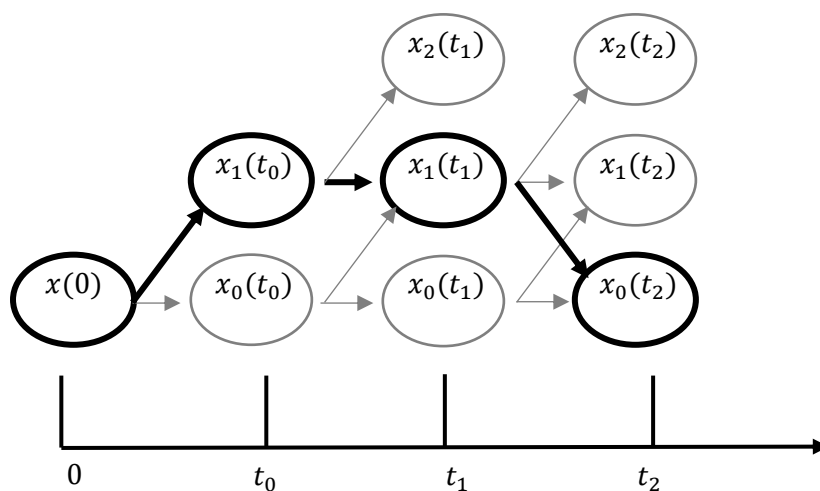


Figura 5.1. Representación gráfica de un problema de programación dinámica discreta

5.1.1 El principio de optimalidad de Bellman

Para encontrar la solución a los problemas de optimización dinámica se utiliza el “principio de optimalidad” desarrollado por Richard Bellman. Este consiste en que una secuencia óptima de decisiones en un proceso de múltiples etapas, posee la propiedad de que cualquiera sea la etapa, estado y resolución, las etapas restantes deben constituir una secuencia óptima de decisiones para el problema restante, con la etapa y el estado resultante desde la primera resolución considerando las condiciones iniciales.

En palabras simples, lo anterior establece que para que una solución sea óptima, todas sus etapas deben ser óptimas, independientemente del punto inicial desde el cual se examine.

Para comprender el principio de manera matemática se explicará primero dividiendo un problema secuencial en dos partes, a saber: la primera decisión y el resto de las decisiones (Beckmann, 1968). Esta distinción, aunque a primera vista pareciera obvia, es crucial para derivar este principio. Considérese así un ejemplo de programación dinámica discreta con las siguientes definiciones (se utilizará la notación de Beckmann):

Sea i_x uno de los estados posibles de la etapa x , y existe una transformación que permite pasar desde i_x' a i_{x+1}' , entonces habrá también un camino óptimo a seguir, que será de la forma i_1, \dots, i_T , donde T es la etapa final. Así, se puede ver que la función de valor v depende del estado inicial i , de lo cual se deduce que:

$$v = v(i) \quad (5.1)$$

Sea $a_{x,x+1}$ la utilidad generada por pasar desde la etapa x a $x + 1$ por el camino óptimo y si el valor de la solución definida es la suma de todas las utilidades en cada etapa, entonces la función de valor viene dada por:

$$v(i) = \max_{i_1, i_2, i_3, \dots, i_t} (a_{i,i_1} + a_{i_1,i_2} + \dots + a_{i_{t-1},i_t}) \quad (5.2)$$

Asumiendo este camino $i_1, i_2, i_3, \dots, i_t$ existe y pertenece al conjunto S_i (o sea, es posible recorrerlo) entonces se procede a agrupar i_2, i_3, \dots, i_t como:

$$v(i) = \max_{i_1 \in S_i} \left[a_{i,i_1} + \max_{i_2, i_3, \dots, i_t} (a_{i_1, i_2} + \dots + a_{i_{t-1}, i_t}) \right] \quad (5.3)$$

Que por definición es:

$$v(i) = \max_{i_1 \in S_i} [a_{i,i_1} + v(i_1)] \quad (5.4)$$

Al efectuar los mismos pasos para $v(i + 1)$ y luego para $v(i + 2)$, hasta $v(t)$, eventualmente el término de la utilidad terminal (o utilidad residual) se hará visible. Esta última es a su vez alcanzada cuando se avanza el último paso desde i_{t-1} a i_t , la que poseerá el valor de:

$$v(i_t) = a_t \quad (5.5)$$

Si conocemos el estado de i_t que maximiza a_t , se puede utilizar inducción hacia atrás recursivamente y encontrar el camino óptimo como el conjunto de todos los estados, partiendo desde el último (i_t), hasta el primero (i_1) y así encontrar el valor óptimo de $v(i)$. Este principio se hace evidente en el caso de resolverse el mismo problema, con las mismas condiciones, pero comenzando desde t , etapa que se encuentra entre 0 y T . Si adicionalmente la etapa t conservara el mismo estado i_t óptimo para su etapa t , entonces el camino a seguir sería el mismo hasta i_T . En otras palabras, no importa el momento en el cual se empieza a solucionar el problema, si el estado por el cual inicia la solución es óptimo, entonces el camino será el mismo.

Es este el principio de optimalidad de Bellman, el que introduce una función de valor o “función evaluadora de estados”, como principal herramienta para la determinación recursiva de soluciones (Radner, 1963).

Este principio permite solucionar numéricamente problemas que solo podrían haberse resuelto por métodos de cálculo de variaciones o control óptimo.

De hecho, los juegos computacionales de ajedrez deciden sus jugadas precisamente utilizando este principio. Sin embargo, debido a la complejidad matemática del ajedrez, incluso los mejores *softwares* en la actualidad no resuelven completamente el juego sino que más bien usan un principio de optimalidad aproximado para encontrar una muy buena solución. Tan buenas son las soluciones encontradas, sin embargo, que en 1997 la computadora Deep Blue

de IBM le ganó al entonces campeón del mundo Garry Kasparov (Campbell *et al.*, 2002). De ahí en adelante, la supremacía del ajedrez lo tienen las máquinas y no los seres humanos.³⁰

En el caso de la explotación óptima de minas, el software Deep Mine, creado por GEM, genera secuencias óptimas de extracción a rajo abierto en ambientes intertemporales usando los mismos principios de programación dinámica aproximada de Deep Blue (Juárez *et al.*, 2014).

5.1.2 Maximizar el área de una curva con perímetro constante

Ante el problema de maximizar el área encerrada por una curva de perímetro constante, la intuición indica que la circunferencia sería la figura seleccionada. Si bien esto es cierto como se demostró en el Capítulo 4, la demostración de tal conclusión no es del todo intuitiva, pues hay infinitas soluciones y se vuelve imposible encontrar la solución por fuerza bruta (por ejemplo, hacer el cálculo de todas las posibles soluciones y ver cuál maximiza el funcional).

Para encontrar la solución mediante programación dinámica se asume que la curva es convexa (por ejemplo, cualquier línea formada entre dos puntos de la Figura está contenida dentro de esta) y que existe un punto “ O ” (conocido) posicionado al interior de esta curva. Adicionalmente, existe un segundo punto a una distancia “ r_0 ” que es el primero de los puntos de la línea que formará el perímetro. Para formar el perímetro de esta curva se generarán infinitos puntos de manera recursiva: el segundo punto estará a una distancia $r_{0+d\theta} = r_0 + x_0$ del punto “ O ” y estará rotado en un $d\theta$ infinitesimalmente pequeño con centro en “ O ”. Se efectuará el mismo proceso para los siguientes puntos y se ingresará la condición de que el último punto $r_{2\pi} = r_T$ (una vez se obtenga una revolución en radianes) debe estar en la misma posición que el primero (r_0) para que sea una curva cerrada. Dado que el perímetro es la sumatoria infinita de puntos que cierra un área determinada, se puede armar un perímetro que encierre un área de manera recursiva como lo muestran las Figuras 5.2 y 5.3.

³⁰ Desde 2016 la supremacía en el juego oriental de Go lo poseen también las máquinas (Silver *et al.*, 2016).

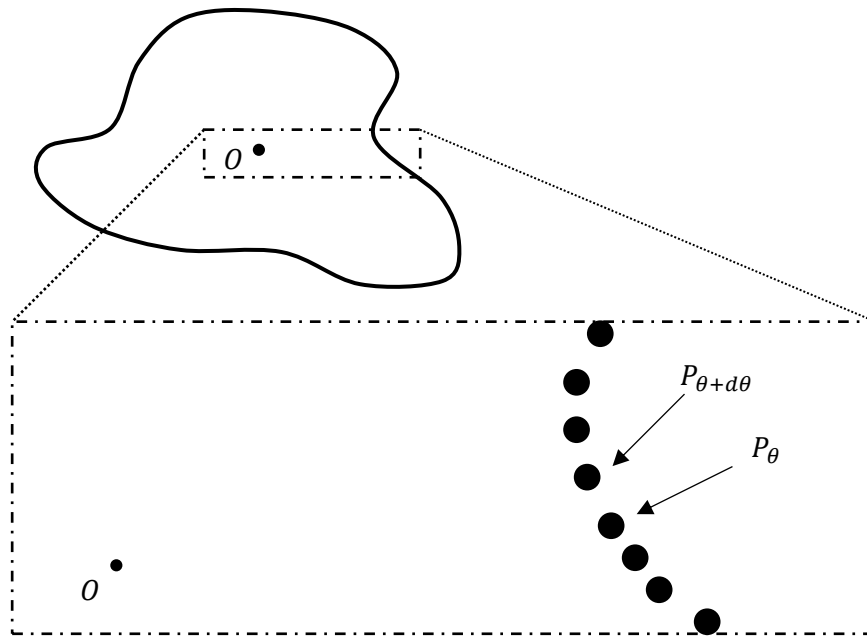


Figura 5.2. Perímetro de la Figura como sucesión recursiva de puntos

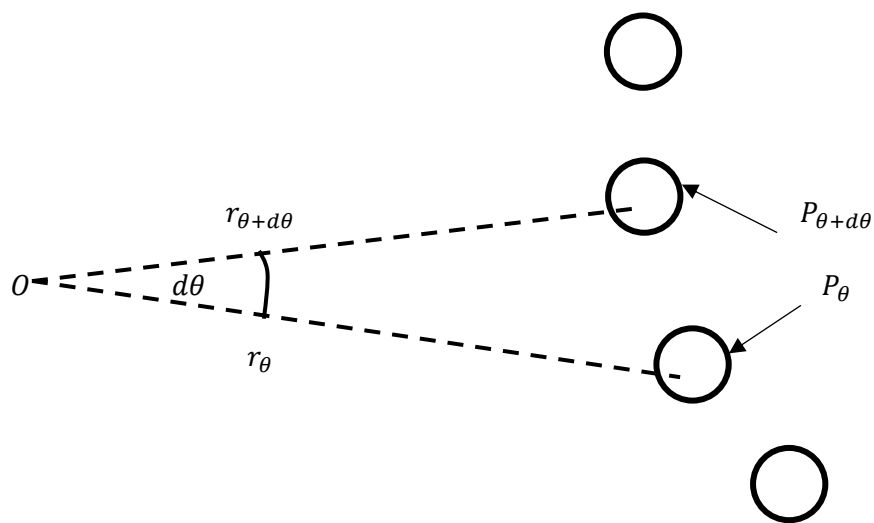


Figura 5.3. Detalle de la recursión de puntos del perímetro

El objetivo consiste en maximizar el radio hidráulico de la curva (es decir, el área dividido en el perímetro). Así, el área de la curva corresponde a la sumatoria del área de todos los triángulos formados por los puntos O , P_θ y $P_{\theta+d\theta}$ en todo el dominio. Sea $dA(\theta)$ el área formada por ese triángulo $(O, P_\theta, P_{\theta+d\theta})$, entonces:

$$A = \int_0^{2\pi} dA(\theta) d\theta \tag{5.6}$$

Por otro lado, el perímetro (P) es la sumatoria de todas las distancias de los puntos que forman la curva. Sea D_θ la distancia entre P_θ y $P_{\theta+d\theta}$ en todo el dominio, entonces se tendrá que:

$$P = \int_0^{2\pi} D_\theta d\theta \quad (5.7)$$

Se tiene que el primer punto está a una distancia r_0 de O y que el último punto debe “conectar” con el primero para cerrar la curva. Por el principio de optimalidad de Bellman no importa en qué punto estemos de la recursión, el camino óptimo a seguir debe ser el mismo. Particularmente, el último tramo que une P_T y P_0 debe ser óptimo, este se observa en la Figura 5.4.

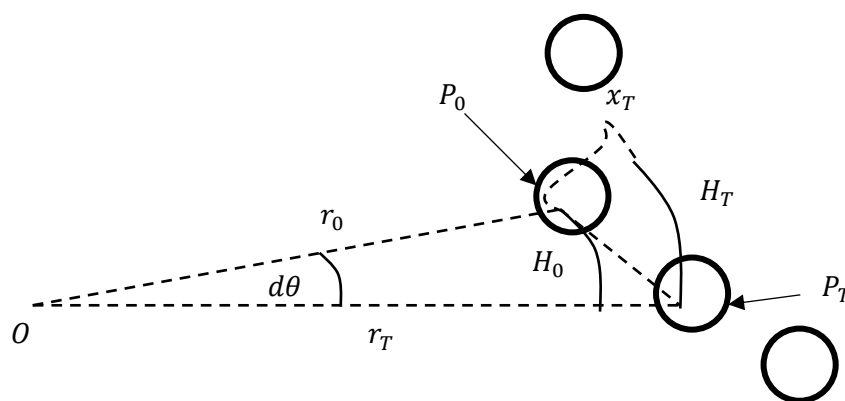


Figura 5.4. Detalle de la recursión del último tramo

Nótese que P_T , último punto del perímetro formado por una recursión infinita, conecta con P_0 , cerrándose así la curva. Se busca maximizar el radio hidráulico de este último tramo asumiendo que el camino $P_0, P_{dt}, \dots, P_{T-1}$ es óptimo. Como d_θ es infinitesimalmente pequeño se tratarán los arcos H_0 y H_t como si fueran líneas rectas (Robjohn, 2011) y como H_T y H_0 son infinitesimalmente más pequeños que r_0 y r_T serán aproximadas a líneas paralelas cerca de H_0 y H_T (Cavalieri, 2009). El área dA formada por el triángulo (O, P_T, P_0) es entonces:

$$dA \cong \frac{(H_0 R_T + X_T H_0)}{2} \cong \frac{(H_T R_T + X_T H_T)}{2} \quad (5.8)$$

$$X_T = R_0 - R_T \quad (5.9)$$

Considerando que $H_T \approx H_0$ por ser $d\theta$ infinitesimalmente pequeño, el segmento de perímetro formado por P_T y P_0 puede ser tomado como la hipotenusa de un triángulo rectángulo con catetos X_T y H_T . Ocupando luego el teorema de Pitágoras resulta:

$$dP \cong \sqrt{H_0^2 + X_T^2} \cong \sqrt{H_T^2 + X_T^2} \quad (5.10)$$

Por lo tanto, el radio hidráulico de este último tramo infinitesimal es:

$$\frac{dA}{dP} = \frac{\frac{(H_0 R_T + X_T H_0)}{2}}{\sqrt{H_0^2 + X_T^2}} \quad (5.11)$$

Dado que $H_T > 0$ y $R_T > 0$, este segmento posee radio hidráulico máximo cuando:

$$X_T = \frac{H_T^2}{R_T} \quad (5.12)$$

Como $H_T \rightarrow 0$ entonces $H_T^2 = 0$ y como, además, $R_T > 0$, entonces $X_T = 0$.

Al hacer uso del principio de optimalidad de Bellman se puede hacer inducción hacia atrás y ver que necesariamente se debe cumplir que $r_\theta = r_0$ para todo el dominio, es decir, la distancia de todos los puntos del perímetro al origen es igual. De aquí queda demostrado que la curva que maximiza el área dado un perímetro fijo es la circunferencia.

5.1.3 Aplicación en el mundo minero

Un ejemplo del principio de optimalidad de Bellman aplicado en el mundo real se observa en la determinación del *pit* final de una mina a rajo abierto ante cambios de topografía generados por la extracción minera. El estándar de la industria para determinar el *pit* final de una mina a rajo abierto es mediante el algoritmo de Lerchs y Grossman (1965) o variaciones del mismo (en la actualidad el método más efectivo es el de pseudo-flujo). Este es un algoritmo iterativo que ocupando un modelo de bloques escoge que bloques deberán ser extraídos con objeto de maximizar el valor total (sin consideraciones temporales). Estos bloques permiten mapear espacialmente leyes de mineral, costos, minerales y múltiples variables en el espacio, elementos necesarios para el algoritmo de L&G. Un modelo de bloques se observa en la Figura 5.5:

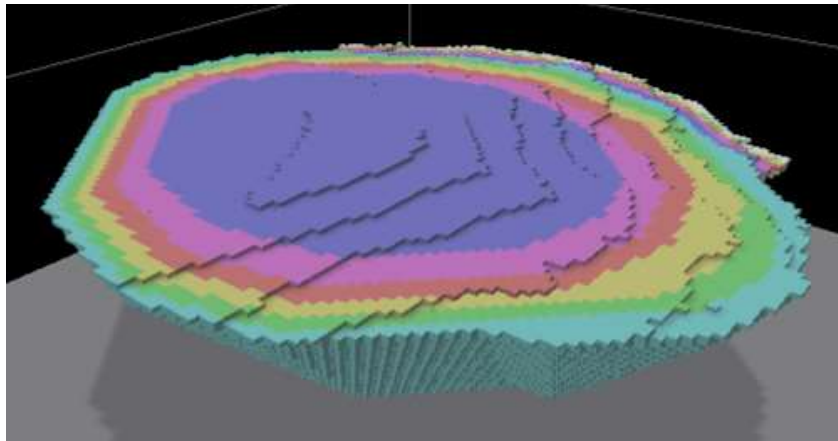


Figura 5.5. Ejemplo de un pit derivado por algoritmo de pseudo-flujo en DeepMine

Este algoritmo escoge y almacena tanto los bloques que serán extraídos como los que no en base a los beneficios de cada bloque. Se detiene donde un bloque deja de ser rentable de extraer con las condiciones dadas y con estos bloques de beneficio cero se forma una superficie, la que se denomina *pit* final.

En el caso del algoritmo de Lerchs y Grossman, se llegará al *pit* óptimo independiente del estado de la excavación y por tanto independiente de la topografía. A medida que se extraen los minerales la topografía de la zona cambia, pero si se corriera el algoritmo de Lerchs y Grossman sobre la topología remanente, aun así, se llega al mismo *pit* final, incluso con una excavación avanzada.

Es decir, no importa qué topografía dejada por la excavación minera se considere, cada vez que se ejecute el algoritmo de Lerchs y Grossman el *pit* final deberá ser el mismo. El ejemplo del *pit* es así una representación espacial de lo que ocurre con el tiempo en los problemas de programación dinámica, en donde no importa el momento en el cual se inicie la optimización, si las condiciones son las mismas que en el caso óptimo, la solución óptima debe ser la misma.

5.2 Derivación matemática de la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman

La ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (también llamada HJB) es la analogía continua al algoritmo de programación dinámica determinística discreta mostrada en la ecuación (5.4) (Mitchel, 2008).

Para derivar la ecuación de HJB se comenzará con un problema de optimización dinámica generalizado en tiempo continuo que viene dado por:

$$J(t, x(t)) = \max_{u(t)} \int_0^T g(x(t), u(t)) dt + h(x(T)) \quad (5.13)$$

Siguiendo la restricción conocida como ecuación de estado:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t)) \quad (5.14)$$

Y condiciones iniciales, como sigue:

$$x(0) = x_0 \quad (5.15)$$

La variable de estado ($x(t)$) representa el estado del sistema como una dimensión cuantificable. La variable de decisión o de control ($u(t)$) representa la variable a modificar para maximizar el funcional.

La función $g(x, u, t)$ representa una función cuya integral en el tiempo se quiere maximizar, es decir, es una función que evoluciona durante el tiempo y cuyo comportamiento acumulativo es interesante de estudiar con objeto de tomar decisiones sobre la variable de control. Como se puede observar, la función $g(x, u, t)$ depende tanto de la variable de control como de la variable de estado. Esto significa que es una función susceptible al camino por el cual se transita y el estado actual del sistema.

La función $f(x, u, t)$ es parte de la ecuación de estado en donde afecta la variable de decisión y el estado actual al estado futuro (en un tiempo dt adicional). Cabe destacar que las variables mencionadas dependen del tiempo por lo que podrían variar a medida que éste transcurra. Al término fuera de la integral ($h(x(T))$) se le conoce como valor residual y corresponde a un valor que se puede obtener al finalizar el ejercicio. El valor residual depende de la variable de estado del sistema cuando el tiempo $t = T$, es decir, cuando no se pueden ejercer más decisiones por encontrarse en la última etapa.

Como se puede observar existen algunas restricciones al problema que deben ser tomadas en cuenta a la hora de desarrollarlo. La primera restricción es la ecuación de estado que indica que la evolución de la variable de estado sigue cierto comportamiento definido por la función $f(x, u, t)$. Como es característico de un problema de optimización dinámica, las decisiones

tomadas repercuten en el estado del sistema, y por ende en las decisiones que se tomarán a futuro. La segunda restricción en la condición inicial y muestra el valor de la variable de estado en $t = 0$.

En este tipo de problemas se busca encontrar la variable $u^*(t)$ que maximiza el funcional J . En términos simples, el objetivo es encontrar el camino por el cual llegar al óptimo de un problema mediante decisiones a tomar en cada instante de tiempo.

Debido al principio de optimalidad de Bellman, cualquiera sea el instante de tiempo t en el que se evalúe la decisión de encontrar la variable de control para optimizar el funcional, la solución debe ser parte de la solución completa en el tiempo. Esto se reduce a decir que para cada intervalo de tiempo entre $t = 0$ y $t = T$, la solución encontrada es parte de la solución global.

Por otro lado, es posible relacionar este tipo de problema con la industria minera. A modo de ejemplo, se relacionan las variables de estado y de control con elementos de la realidad minera. La variable de estado se encarga de mostrar el estado del sistema y su evolución en el tiempo, por lo que corresponde a los recursos disponibles, $S(t)$. La variable de decisión es el control que puede ejercer el minero sobre la producción por lo que puede corresponder al tonelaje a extraer en cada instante de tiempo, $q(t)$, o a la ley de corte, $\omega(t)$. El valor residual representa el valor económico o utilidad al final de la explotación, lo que corresponde al valor que se puede conseguir al vender la mina o el de los recursos remanentes en la tierra.

El planificador minero buscará maximizar el VAN de la operación, el que depende directamente del material extraído en cada periodo y también de los recursos remanentes.

Por su parte, la formación o descomposición de los recursos mineros ocurre a una velocidad muy baja para ser relevante en un plan de explotación de unas cuantas décadas. Por el contrario, para un recurso renovable el nivel actual de los recursos puede afectar directamente a la ecuación de estado. Un ejemplo de esto ocurre en la pesca, en donde la velocidad de crecimiento del número de peces depende directamente de cuántos peces hay en un momento dado (como se detalla en el Capítulo 1).

En el caso de recursos no renovables los recursos disminuyen a medida que la explotación avanza. Sin embargo, la existencia de exploración puede generar aumentos de las reservas si se obtiene la información suficiente de los recursos alrededor del yacimiento. Si bien la exploración parece ser atractiva en cuanto a sus beneficios, también implica una inversión o

costo, motivo por el cual la decisión de realizar campañas de exploración debe evaluarse con criterio. La condición inicial indica simplemente el estado de los recursos al comenzar la explotación, es decir, su tonelaje inicial.

En el problema minero también se exige que la variable de control no sea negativa. Si bien podría ocurrir que se tenga que depositar material e incluso mineral en el suelo, como en el caso de una explotación por método de *Cut and Fill* o en el caso del litio donde existe una cuota máxima para su producción y en ciertos casos se debe reinyectar mineral al salar, estos son casos especiales y no son representativos del problema minero estudiado en este libro.

Es necesario notar que en el funcional óptimo $J^*(t, x(t))$ dependerá del tiempo y de la variable de estado, pero no de la variable de control. Si bien esto resulta extraño a primera vista tiene una explicación sencilla. Esto pues J^* representa el máximo valor del funcional (5.13) en base a un camino determinado por $u^*(t)$. De aquí, la variable de estado es relevante para encontrar ese óptimo, pero una vez obtenida, el valor de J^* obtenido no depende de ella. El hallazgo de la independencia de la solución óptima con la variable de control es uno de los grandes aportes de Richard Bellman a la programación dinámica.

Entonces, siendo J^* el valor óptimo del funcional, esta se puede denotar de la siguiente manera.

$$J^*(t, x(t)) = \int_0^T g(x, u^*) dt \quad (5.16)$$

Si se separa el intervalo de tiempo $[0, T]$ en dos intervalos más pequeños, $[0, dt]$ y $[dt, T]$. Se reescribe el funcional J^* a continuación:

$$J^*(t, x(t)) = \int_0^{dt} g(x, u^*) dt + \int_{dt}^T g(x, u^*) dt \quad (5.17)$$

Por lo que, según el Teorema del Valor Medio si $dt \rightarrow 0$, la integral tiende a un elemento infinitesimal que posee ancho dt y altura $g(x, u^*)$, por lo tanto:

$$J^*(t, x) = g(x, u^*)dt + J^*(t + dt, x + dx) \quad (5.18)$$

Esto tiene sentido al considerar que t puede ser cualquier tiempo entre 0 y T debido a que el principio de optimalidad de Bellman indica que no importa desde dónde se examine la solución, la solución al sub-problema es parte del óptimo global. Esta relación puede reescribirse mediante el siguiente funcional:

$$J^*(t, x(t)) = \max_{u(t)} \{g(x, u)dt + J^*(t + dt, x + dx)\} \quad (5.19)$$

Ahora se puede realizar la siguiente descomposición (utilizando series de Taylor para $J^*(t + dt, x + dx)$):

$$J^*(t, x) = \max_{u(t)} \{g(x, u)dt + J^*(t, x) + J_t^*(t, x)dt + J_x^*(t, x)dx\} \quad (5.20)$$

Considerando que el J^* es óptimo, se puede sacar de la maximización (al no depender de u):

$$J^*(t, x) = J^*(t, x) + \max_{u(t)} \{g(x, u)dt + J_t^*(t, x)dt + J_x^*(t, x)dx\} \quad (5.21)$$

Luego, restando J^* en ambos lados y dividiendo por dt (la que por definición es positiva):

$$0 = \max_{u(t)} \left\{ g(x, u) + J_t^*(t, x) + J_x^*(t, x) \frac{dx}{dt} \right\} \quad (5.22)$$

Para reemplazar $\frac{dx}{dt}$ recurrimos a la ecuación de estado (5.14):

$$0 = \max_{u(t)} \{g(x, u) + J_t^*(t, x) + J_x^*(t, x)f(x, u)\} \quad (5.23)$$

Y como J_t^* no depende de u :

$$-J_t^*(t, x) = \max_{u(t)} \{g(x(t), u(t)) + J_x^*(t, x)f(x, u)\} \quad (5.24)$$

Esta es una ecuación diferencial parcial (también conocida como EDP o PDE, por sus siglas en inglés: *partial differential equation*). Esta ecuación fue derivada por Bellman en 1952, y hoy se conoce como la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman o HJB, al ser considerada como una extensión del trabajo pasado en física clásica en la ecuación de Hamilton-Jacobi (Mitchel, 2008).

Un hecho increíble de la ecuación de HJB es que permite derivar directamente el funcional óptimo (J^*) sin tener que derivar primero la política óptima (u). Una vez con este, es posible deducir la política óptima a seguir.

5.3 Nota minera: El problema de Kenneth Lane

Uno de los procesos unitarios de la minería a rajo abierto es el carguío y transporte, el que consiste en cargar la roca tronada a camiones de gran volumen para ser transportadas a su destino final: generalmente un botadero (donde se bota el estéril) o planta (donde se procesa el mineral), existiendo también otros destinos que permiten maximizar aún más el VAN como *stock* o un proceso secundario de procesamiento (como lixiviación ROM³¹), aunque en este capítulo sólo se examinarán los dos primeros escenarios.

Para definir qué bloques deben ser considerados como lastre y cuales mineral se ocupa la llamada “ley de corte”, en donde todo bloque con una ley superior a la ley de corte se considera mineral, e inferior se considera estéril. La “ley de corte” óptima es dinámica en el tiempo ya que debe reaccionar a los cambios en precios, costos, y cualquier variable que afecte directamente el VAN.

Antes del trabajo de Kenneth Lane los planificadores mineros se guiaban por reglas no estandarizadas que entregaban leyes de corte no óptimas, generando por tanto un VAN subóptimo. Estas reglas variaban desde “siempre se ha hecho así”, pasando por “es un problema técnico que se las dejamos a otras personas” hasta “si nuestros costos son \$10 la tonelada y el uranio está a \$10 la libra, entonces 1 libra/tonelada debe estar bien” (Lane, 1988).

Hoy en día es trabajo del planificador minero encontrar la política de leyes de corte óptima a lo largo de la vida de la mina, Ω (que corresponde al conjunto de todos los $\omega(t)$). El problema de Lane queda matemáticamente definido como:

$$\max_{\omega(t)} \int_0^T e^{-rt} \pi(t, S, \omega) dt \quad (5.25)$$

La ecuación de estado en este caso es la condición de agotabilidad:

$$\dot{S}(t) = -q(t) \quad (5.26)$$

Con condición inicial:

$$S(0) = S_0 \quad (5.27)$$

Por su parte, las condiciones de no negatividad vienen dadas por:

³¹ Lixiviación ROM: Run of Mine, consiste en lixiviar la roca tronada sin molienda secundaria o terciaria, tiene baja recuperación, pero bajo costo por lo que se ocupa para mineral de baja ley.

$$S, q, T \geq 0 \quad (5.28)$$

La ecuación anterior relaciona los recursos remanentes o *stock* (S) del yacimiento en el tiempo (t) con la tasa de extracción (q) en la ecuación de estado. La utilidad (π) depende del tiempo, del *stock* y de la ley de corte de dicho periodo, $\omega(t)$. La utilidad está descontada en tiempo continuo (por lo que en cada instante la utilidad debe multiplicarse por e^{-rt}) y al integrar desde 0 hasta la vida de la mina (el LOM, representada por T) se consigue el VAN de la extracción minera. La resolución de la optimización supone la existencia de que una política de leyes de corte óptima Ω que maximiza el VAN entregando un óptimo (V^*) dado por:

$$V^*(t, S) = \max_{\omega(t)} \int_0^T e^{-rt} \pi(t, S, \omega) dt \quad (5.29)$$

Luego, al descomponer la integral en un intervalo $[0, dt]$ y otro intervalo $[dt, T]$, como $dt \rightarrow 0$ se obtiene:

$$V^*(t, S) = \max_{\omega(t)} \left\{ \int_0^{dt} e^{-rt} \pi(t, S, \omega) dt + \int_{dt}^T e^{-rt} \pi(t, S, \omega) dt \right\} \quad (5.30)$$

El primer término de la integral corresponde a $\pi(t, S, \omega)dt$, ya que como $dt \rightarrow 0$, según el Teorema del Valor Medio, la integral equivale al valor de la función de utilidad multiplicada por el ancho del intervalo (dt). Esto se muestra gráficamente en la Figura 5.6.

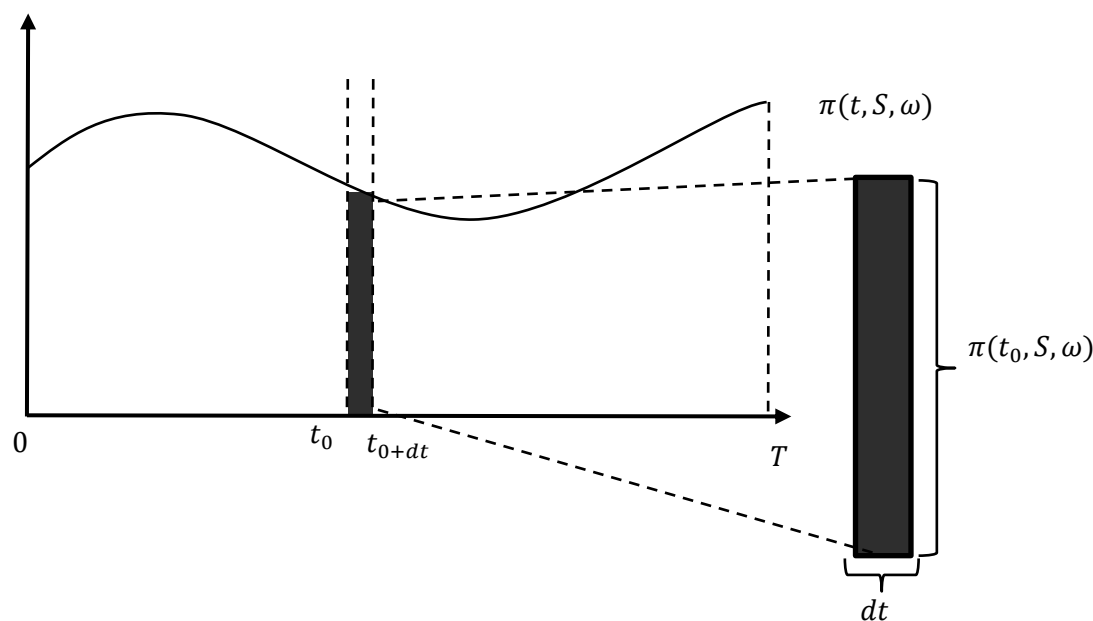


Figura 5.6. Representación gráfica de la utilidad instantánea

El segundo término de la integral equivale al VAN óptimo del problema minero, pero desde un punto de partida $t_0 + dt$.

Nótese que la función de utilidad $\pi(t, S, \omega)dt$ no está descontada ya que corresponde al presente, mientras que el VAN de $(t + dt)$ está descontado, ya que corresponde al VAN en el futuro (en un tiempo dt). Gráficamente:

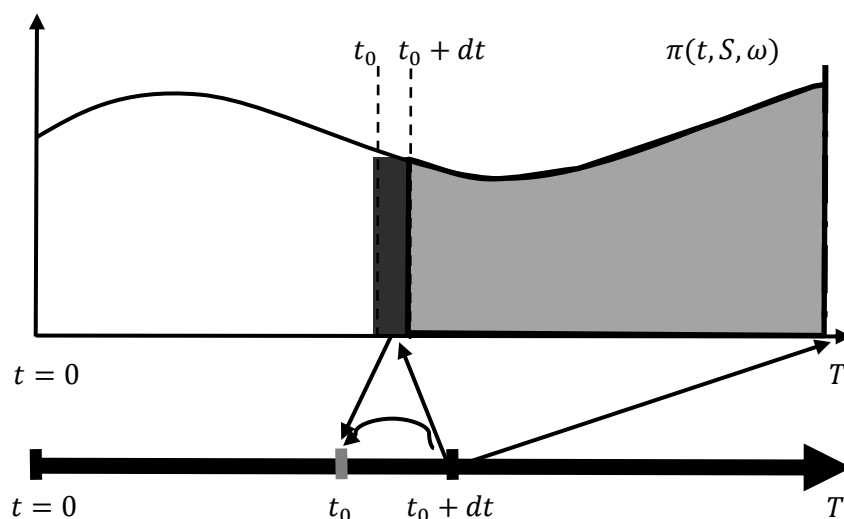


Figura 5.7. Representación gráfica de V^* en la ecuación (5.30)

Por otro lado, la expansión de Taylor de e^{-rdt} es:

$$e^{-rdt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-rdt)^n}{n!} = 1 + \frac{(-rdt)^1}{1!} + \frac{(-rdt)^2}{2!} + \frac{(-rdt)^3}{3!} + \dots \quad (5.31)$$

Y como $dt \rightarrow 0$, entonces se cumple que:

$$(-rdt)^n = 0 \quad \forall n > 1 \quad (5.32)$$

Por lo tanto, la expansión de Taylor equivale a:

$$e^{-rdt} = 1 - rdt \quad (5.33)$$

Reemplazando la expansión en V^* :

$$V^*(t, S) = \max_{\omega(t)} \{ \pi(t, S, \omega)dt + V^*(t + dt, S + dS)(1 - rdt) \} \quad (5.34)$$

Expandiendo $V^*(t + dt, S + dS)$, la ecuación anterior se puede reescribir como:

$$V^*(t, S) = \max_{\omega(t)} \{ \pi(t, S, \omega) dt + [V(t, S) + V_t(t, S) dt + V_s(t, S) ds] (1 - r dt) \} \quad (5.35)$$

Para desarrollar la multiplicación del segundo término, se utiliza la condición de agotabilidad con el fin de conseguir una equivalencia de ds se puede reescribir como:

$$dS = -q dt \quad (5.36)$$

Reemplazando dS en el segundo término de la parte derecha de la ecuación, se obtiene que:

$$\begin{aligned} & [V^*(t, S) + V_t^*(t, S) dt + V_s^*(t, S) ds] * (1 - r dt) = \\ & V^*(t, S) + V_t^*(t, S) dt - qV_s^*(t, S) dt - r[V^*(t, S) dt + V_t^*(t, S) dt^2 - qV_s^*(t, S) dt^2] \end{aligned} \quad (5.37)$$

Como $dt \rightarrow 0$, entonces se cumple que $dt^2 = 0$, por lo que lo anterior resulta en:

$$V_t^*(t, S) dt^2 = 0 \quad (5.38)$$

$$-qV_s^*(t, S) dt^2 = 0 \quad (5.39)$$

Reemplazando en la ecuación (5.37) se obtiene:

$$V^*(t, S) = \max_{\omega(t)} \{ \pi(t, S, \omega) dt + V^*(t, S) + V_t^*(t, S) dt - qV_s^*(t, S) dt - rV^*(t, S) dt \} \quad (5.40)$$

Como $V^*(t, S)$ no depende de $\omega(t)$ al estar evaluada en el Ω óptimo que es conocido para V^* , puede salir de la maximización. Restando $V^*(t, S)$ en ambos lados se obtiene:

$$0 = \max_{\omega(t)} \{ \pi(t, S, \omega) dt + V_t^*(t, S) dt - qV_s^*(t, S) dt - rV^*(t, S) dt \} \quad (5.41)$$

Dividiendo ambas partes por dt a ambos lados la igualdad resulta en:

$$0 = \max_{\omega(t)} \{ \pi(t, S, \omega) + V_t^*(t, S) - qV_s^*(t, S) - rV^*(t, S) \} \quad (5.42)$$

Como $-rV^*(t, S)$ no depende de $\omega(t)$ puede salir de la maximización. Sumando $rV^*(t, S)$ en ambos lados de la ecuación, se obtiene:

$$rV^*(t, S) = \max_{\omega(t)} \{ \pi(t, S, \omega) + V_t^*(t, S) - qV_s^*(t, S) \} \quad (5.43)$$

Esta ecuación corresponde a la ecuación de HJB derivada para el problema minero planteado por Kenneth Lane y relaciona el flujo de caja instantáneo de hoy con el VAN óptimo de la mina. Al derivar esta igualdad ya no se necesita encontrar la política de leyes de corte en todo el tiempo. De hecho, solo es necesario encontrar la ley de corte del presente, es decir $\omega(t)$. Ninguno de los componentes de la igualdad depende de una ley de corte de un tiempo futuro, pero si del cambio en el VAN futuro.

Los términos de la ecuación (5.43) se detallan a continuación:

$$rV^*(t, S) = \text{tasa de descuento} \cdot VAN \quad (5.44)$$

Este término corresponde a la rentabilidad de ese instante de tiempo de vender la mina con precio igual a su VAN luego de depositar el dinero en el banco y recibir retornos por los intereses generados a una tasa r , lo que da cuenta de la importancia de la mina como activo financiero. Se puede denominar como el costo financiero de la mina, que en el óptimo es equivalente al costo real de la mina (lado derecho de la ecuación).

Por su parte:

$$V_t^*(t, S) \quad (5.46)$$

es equivalente al cambio en el VAN óptimo respecto al tiempo, que podría estar dado por algún cambio en las condicionantes del problema minero, como una variación en el precio, en la legislación medioambiental, en costos, en la tasa de impuestos, entre otros.

A su vez:

$$qV_s^*(t, S) \quad (5.47)$$

representa el cambio en el VAN producto de una variación en los recursos. Equivalente al costo de oportunidad de extraer q toneladas (con su respectiva ley) que no estarán disponibles nunca más.

Finalmente:

$$V_t^*(t, S) - qV_s^*(t, S) \quad (5.48)$$

corresponde al cambio en la utilidad futura, de modo que en la programación dinámica los cambios en el futuro impactan en la elección de la ley de corte de hoy, lo que tiene sentido en un problema intertemporal donde las decisiones en el presente afectan al futuro.

Otra forma de encontrar la política de leyes de corte, Ω , sería optimizar el problema minero para todos los puntos de partida t entre $[0, T]$. Según el principio de optimalidad de Bellman, para cualquier punto de partida, de ahí en adelante la solución óptima para el sub-problema pertenece a la solución óptima total. Pero esto es bastante más difícil de determinar. En su lugar, la ventaja de la optimización dinámica es que el problema se puede solucionar obteniendo el $\omega(t)$ de hoy que nos deja indiferente entre seguir extrayendo mineral y ganar dinero por la rentabilidad de depositar el valor de la mina en el banco (por ejemplo, el que resuelve la ecuación (5.43)).

También es importante destacar que la política de leyes de corte óptima no es equivalente a calcular la ley de corte óptima para un periodo en particular (por ejemplo, el ω que maximiza $\pi(t, S, \omega)$), luego obtener la ley de corte óptima del periodo siguiente, y así sucesivamente sin considerar los cambios del VAN en periodos futuros. La solución total obtenida por este método arrojará un valor menor que el VAN óptimo obtenido mediante programación dinámica al no considerar los términos V_s y V_t necesarios para derivar una política de leyes de corte óptima. Esta solución sub óptima se llama “solución miope” ya que no mira al futuro, lo que se muestra de manera gráfica en la Figura 5.8.

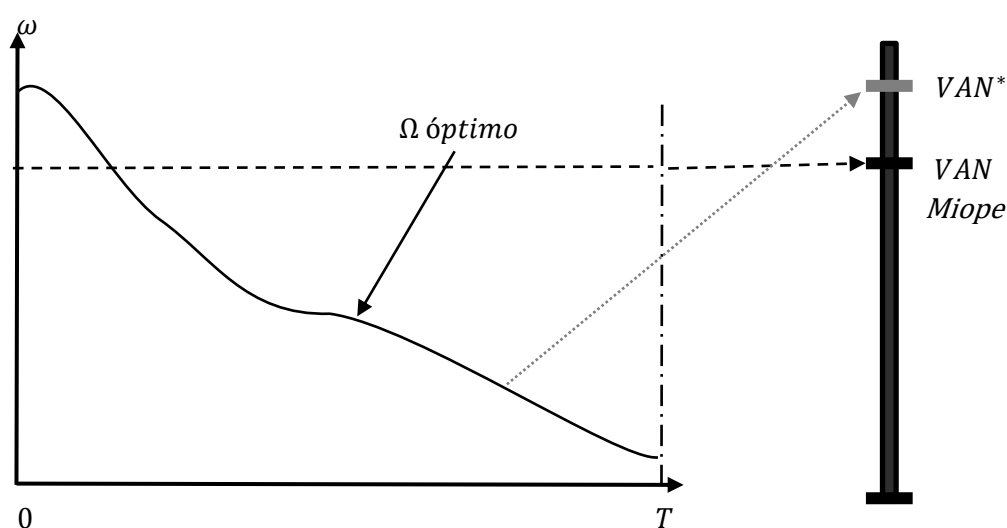


Figura 5.8. Solución miope al problema de la determinación de las leyes de corte

Es importante destacar la importancia del problema de determinar la política de leyes de corte. Según Lane (1988), la minería puede considerarse como una industria cuya preocupación principal corresponde precisamente a la de determinar la ley de corte en cada periodo, debido a que se está extrayendo un recurso agotable y a que la extracción está restringida por las capacidades de mina y planta (entre otras).

El factor de las capacidades afecta en el sentido de que no basta con que la ley a extraer en un periodo sea mayor a la ley marginal. Por ejemplo, si esta última tuviera un valor de 0,6%, ¿deberían tener la misma prioridad para el procesamiento en la planta una tonelada con ley de 1,2% versus una tonelada con ley de 0,65%? Según Lane se debe considerar como criterio de decisión el concepto de valor presente y flujos descontados, que da una base precisa de comparación entre las ganancias presentes y futuras a través de la función de utilidad presente. De modo que el conjunto de leyes de corte para cada periodo será el que maximice el VAN de la mina.

El factor de la agotabilidad implica que las reservas mineras se van consumiendo con el paso del tiempo, de modo que la extracción en cada periodo como la política de ley de corte debe ser la óptima incluso para cambios en los parámetros a futuro, cambios que son conocidos en este caso determinístico.

5.3.1 Cálculo de ley de corte óptima

La derivación de HJB del problema de Kenneth Lane permite comprender cómo interactúa el futuro en la elección de la política de leyes de corte, la que debe considerar V_t y V_s para ser óptima en un ambiente dinámico. Para mayor información se debe consultar el libro *The Economic Definition of Ore* (Lane, 1988).

Sea $v = V_s$ el cambio del VAN respecto a los recursos remanentes ($S(t)$) (aunque Lane ocupa R para referirse a los recursos seguiremos con la notación de este libro para mantener así consistencia).

El cambio en los recursos dependerá de la velocidad de extracción de cada proceso (mina, planta y venta) y, por lo tanto, la variación en el VAN debido al cambio en los recursos también dependerá de la velocidad con la que se consuman. Naturalmente la ley de corte impactará directamente en la velocidad de consumo de los recursos. En otras palabras, el cambio del VAN

respecto a los recursos es función de la velocidad con la que los procese en cada etapa y la ley de corte (g_c):

$$v(q, g_c) = V_s(q, g_c) \quad (5.49)$$

Donde V_s es una función de la velocidad de procesamiento de cada unidad de proceso (q).

Lane propone el cálculo de la ley de corte considerando tres leyes de corte, las que llama “*limiting cut-off grade*” y que se calculan considerando cuál de los siguientes tres procesos es el que está limitando la producción:

- Ley de corte de mina.
- Ley de corte de planta.
- Ley de corte de mercado.

La ley de corte de mina (v_m) considera el tiempo que demora “mover” (perforar, tronar, cargar y transportar) una unidad de mineral considerando una capacidad determinada para efectuar el cálculo de costo oportunidad.

La ley de corte de planta (v_h) debe tomar en cuenta el tiempo que una unidad mineralizada logra entregar x unidades de concentrado, por lo que considera el tiempo de procesamiento de mineral.

La ley de corte de mercado (v_k) representan limitaciones impuestas por la venta y/o procesamiento de minerales luego de ser concentrados, por ejemplo, un contrato exclusivo con un vendedor o limitaciones de procesamiento en fundición. Matemáticamente considera el tiempo que demora vender una unidad de producto terminado en el mercado.

Los tiempos de cada proceso son los usados para determinar el costo oportunidad de cada etapa de producción, los que impactan directamente en la velocidad con la que se consumen los recursos y por tanto V_s es afectado.

Lane (1988) propone luego una solución gráfica para encontrar la ley de corte óptima, la que consiste en superponer los gráficos generados por las distintas leyes de corte (v_m, v_h, v_k) las que dependen de la ley de corte de cada etapa, con el eje ordenado siendo el aumento en VAN y el eje de las abscisas como la ley de corte. Dado que el espacio posible solo es el que se

encuentra bajo estas tres curvas, la ley de corte óptima (g_c^*) para una mina es aquel que maximiza el aumento el VAN generada por la curva $\min[v_m, v_h, v_k] = v_e$, como se muestra en la Figura 5.9.

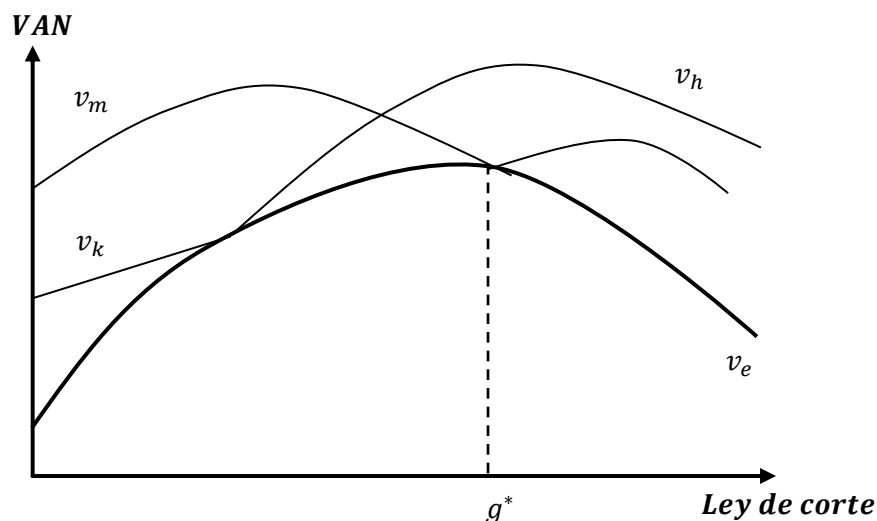


Figura 5.9. Maximización de la ley de corte óptima

Esto entrega en la práctica la política de leyes de corte óptima que considera la naturaleza intertemporal del problema minero que son el cambio en el VAN debido al tiempo y el cambio en el VAN debido a los recursos.

Las curvas v_m, v_h, v_k consideran a V_s y V_t dentro de su construcción, este procedimiento se detalla en *The Economic Definition of Ore* (Lane, 1988).

5.4 Otras aplicaciones de la programación dinámica

Como se ha visto hasta ahora la programación dinámica es una herramienta para resolver problemas dinámicos intertemporales. Debido a esto tiene aplicaciones en distintos rubros desde la milicia hasta el control de enfermedades (Álvarez, 1987), pasando por la extracción de recursos no-renovables y en particular los recursos minerales.

En la literatura económica se ha aplicado la programación dinámica para representar modelos de inversión y de decisiones de salida de mercados (Winter, 1998). En ese caso se asume que el centro corporativo de la empresa toma las decisiones de inversión y producción para cada

planta independiente, por lo que la empresa debe resolver problemas intertemporales independientes.

También se puede aplicar la metodología de la programación dinámica para tomar decisiones en el ámbito de la agricultura. Si bien este rubro es diferente al minero, ambos comparten similitudes que resultan relevantes mencionar. La más importante es que tanto la agricultura como la minería explotan recursos naturales. Sin embargo, como se mencionó en el Capítulo 1, los recursos de la agricultura se consideran renovables mientras que los recursos mineros no en la escala de tiempo de la vida humana. De todas formas, comparten un problema similar, determinar cuándo y cuánto producir teniendo en cuenta que las acciones en el presente tendrán repercusiones en el futuro. Las reservas en este caso son el fruto de los cultivos y la producción representa la cantidad extraída para su venta. Claro que el ejercicio puede complejizarse en la medida en que se agregan variables, como la capacidad de los equipos de extracción, la capacidad de crear inventarios y los cuidados que necesitan los cultivos.

La gestión de recursos naturales mediante programación dinámica ha sido ampliamente estudiada en la literatura. Así, Kennedy (1986) modela las principales preocupaciones operacionales de la explotación de recursos naturales. En su libro se estudian los casos del manejo de tierras, manejo forestal y de pesca, entre otros. Utilizando modelos de programación dinámica consigue resolver inquietudes acerca del nivel de producción y de la gestión de recursos como el agua, así como también el manejo apropiado de contaminantes.

Después de lo anteriormente expuesto, es necesario mencionar que en el mundo de la economía nada es determinístico como se ha supuesto en este capítulo. Los precios de los *commodities* e incluso de los resultados de exploraciones se comportan de manera aleatoria. En este ambiente estocástico, la programación dinámica no se queda atrás. El planteamiento descrito sigue siendo válido, pero las variables cambian su naturaleza por lo que la resolución mediante la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman varía en cierta medida de la derivada anteriormente. No se entrará en más detalles en este capítulo (la discusión en detalle se dejará para el Capítulo 8), pero queda explicitado que la programación dinámica sigue siendo una herramienta válida en distintos escenarios económicos con lo que demuestra ser versátil y relevante a la hora de enfrentarse con problemas de optimización dinámica.

5.5 Problemas resueltos

Problema 5.1

Encuentre el valor de la variable de control y de la variable de estado en el tiempo para el siguiente problema (considere que T es un valor positivo conocido):

$$\min_u \int_0^T (3u(t)^2 - x(t)^4) dt$$

s. a.

$$\dot{x}(t) = 2u(t)$$

$$x(0) = 0$$

$$x(T) = R$$

$$u(t), x(t) \geq 0$$

Ansatz: Pruebe con una solución de la forma $J(t, x) = x^3 + at^2$.

Donde a es una constante a ser determinada.

Solución

Para resolver utilizamos la fórmula de la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman derivada en el capítulo.

$$HJB: -J_t(t, x) = \min_u \{g(t, x, u) + J_x(t, x) * f(t, x, u)\}$$

En este caso:

$$g(t, x, u) = 3u^2 - x^4$$

$$f(t, x, u) = 2u$$

Entonces, la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman para este problema se puede reescribir como:

$$-J_t(t, x) = \min_u \{(3u^2 - x^4) + J_x(t, x)2u\}$$

Para encontrar el u óptimo, derivamos la parte derecha de la ecuación anterior respecto a u y se iguala a 0:

$$0 = 6u + 2J_x$$

Entonces u es:

$$u = \frac{-J_x}{3}$$

Para cerciorarse de que se trata de un mínimo, derivamos dos veces el lado derecho de la ecuación HJB respecto a u :

$$6 > 0$$

Entonces realmente se trata de un mínimo.

Ahora, se reemplaza el valor de u en la ecuación HJB, lo que resulta:

$$-J_t = \min_u \left\{ 3 \frac{J_x^2}{9} - x^4 + J_x \frac{-2 * J_x}{3} \right\}$$

En esta ecuación se puede eliminar el minimizador, ya que ahora ningún término depende de u . Entonces la ecuación HJB queda:

$$-J_t = 3 * \frac{J_x^2}{9} - x^4 + J_x \frac{-2 * J_x}{3} = -x^4 - \frac{J_x^2}{3}$$

Ahora, se utiliza el *hint*: $J(t, x) = x^3 + at^2$

Se calculan las derivadas parciales de $J(t, x)$:

$$J_t(t, x) = 2at$$

$$J_x(t, x) = 3x^2$$

Se reemplazan las derivadas parciales en la ecuación HJB:

$$-2at = -x^4 - \frac{9x^4}{3} = -x^4 - 3x^4 = -4x^4$$

Al multiplicar ambos lados por (-1) :

$$4x^4 = 2at$$

$$\rightarrow x^4 = \frac{2at}{4} = \frac{at}{2}$$

Aplicando raíz cuarta en ambos lados de la igualdad:

$$x(t) = \left(\frac{at}{2}\right)^{1/4}$$

Ahora, se utiliza la condición de borde en la igualdad anterior ($x(T) = R$):

$$x(T) = \left(\frac{aT}{2}\right)^{1/4} = R$$

Elevando a la cuarta potencia, se obtiene:

$$R^4 = \frac{aT}{2}$$

$$\rightarrow a = \frac{2R^4}{T}$$

Despejando el valor de a en $x(t)$:

$$x(t) = \left(\frac{\frac{2R^4}{T} * t}{2}\right)^{1/4} = \left(\frac{R^4 t}{T}\right)^{1/4} = R \left(\frac{t}{T}\right)^{1/4}$$

Entonces el valor de $u(t)$ es:

$$u = \frac{-J_x}{3} = \frac{-3x^2}{3} = -x^2$$

$$\rightarrow u(t) = -R^2 \left(\frac{t}{T}\right)^{1/2}$$

Reemplazando el valor de $x(t)$ en $J(t, x)$:

$$J(t) = R^3 \left(\frac{t}{T}\right)^{3/4} + \frac{2R^4 t^2}{T}$$

Problema 5.2

Encuentre el valor de $u(t)$ y $x(t)$ para el siguiente problema (considere que T es un valor positivo conocido y que $x(T)^2$ es el valor residual del problema):

$$\min_u \left(\int_0^T u(t)^2 dt \right) + x(T)^2$$

s. a.

$$\dot{x}(t) = x(t) - u(t)$$

$$x(T) = X_T$$

$$u(t), x(t) > 0$$

Ansatz: Pruebe con una solución de la forma: $J(t, x) = A(t)x^2$. Donde $A(t)$ es una función dependiente del tiempo a ser determinada.

Solución

Se utiliza la ecuación de HJB:

$$-J_t(t, x) = \min_u \{f(t, x, u) + J_x(t, x)g(t, x, u)\}$$

En este caso:

$$f(t, x, u) = u^2$$

$$g(t, x, u) = x - u$$

Entonces, la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman para este problema se puede reescribir como:

$$-J_t(t, x) = \min_u \{u^2 + J_x(t, x)(x - u)\}$$

Para encontrar el u óptimo, derivamos la parte derecha de la ecuación HJB respecto a u y se iguala a 0:

$$0 = 2u - J_x$$

Entonces u es equivalente a:

$$u = \frac{J_x}{2}$$

Para cerciorarse de que se trata de un mínimo, derivamos dos veces el lado derecho de la ecuación HJB respecto a u :

$$2 > 0$$

Entonces realmente se trata de un mínimo.

Ahora, se reemplaza el valor de u en la ecuación HJB, lo que resulta:

$$-J_t = \min_u \left\{ \frac{J_x^2}{4} + J_x \left(x - \frac{J_x}{2} \right) \right\}$$

En esta ecuación se puede eliminar el minimizador, ya que ahora ningún término depende de u :

$$\begin{aligned} -J_t &= \frac{J_x^2}{4} + J_x x + J_x \frac{-J_x}{2} = \frac{J_x^2}{4} - \frac{J_x^2}{2} + x J_x \\ &\rightarrow -J_t = -\frac{J_x^2}{4} + x J_x \end{aligned}$$

Ahora, ocupando el *ansatz*: $J(t, x) = A(t)x^2$

Calculando las derivadas parciales de $J(t, x)$:

$$J_t(t, x) = \dot{A}(t)x^2$$

$$J_x(t, x) = 2A(t)x$$

Reemplazando las derivadas parciales en la ecuación HJB:

$$\begin{aligned} -\dot{A}(t)x^2 &= -\frac{(2A(t)x)^2}{4} + x 2A(t)x \\ &\rightarrow \dot{A}(t)x^2 - A(t)^2 x^2 + 2A(t)x^2 = 0 \\ &\rightarrow (\dot{A}(t) - A(t)^2 + 2A(t))x^2 = 0 \end{aligned}$$

Como $x(t) > 0$, la igualdad anterior se cumple solo si lo que esta dentro del paréntesis es cero, entonces:

$$\dot{A}(t) - A(t)^2 + 2A(t) = 0$$

Resolviendo mediante Bernoulli:

$$A(t) = \frac{2}{1 + 2C e^{2t}}$$

Donde C es una constante a determinar.

Ahora, ocupamos la ecuación del valor residual, que en el problema a resolver vale $x(T)^2$. Sabemos por definición que el valor de $J(t, x(t))$ en el tiempo final T , es igual al valor residual.

Por enunciado:

$$J(T, x(T)) = x(T)^2$$

Por formula del *hint*:

$$J(T, x(T)) = A(T) * x(T)^2$$

Igualando los lados derechos del valor de $J(T, x(T))$, se tiene que:

$$x(T)^2 = A(T)x(T)^2$$

$$\rightarrow A(T) = 1$$

Se sabe que $A(t)$ es:

$$A(t) = \frac{2}{1 + 2Ce^{2t}}$$

$$\rightarrow A(T) = \frac{2}{1 + 2Ce^{2T}}$$

Pero, al trabajar con el valor residual sabemos que $A(T) = 1$, entonces:

$$A(T) = 1 = \frac{2}{1 + 2Ce^{2T}}$$

$$\rightarrow 1 + 2Ce^{2T} = 2$$

$$\rightarrow 2Ce^{2T} = 1$$

Entonces la constante C es:

$$C = \frac{1}{2}e^{-2T}$$

Reemplazando el valor de C en $A(t)$:

$$A(t) = \frac{2}{1 + 2Ce^{2t}} = \frac{2}{1 + 2e^{2t} \frac{1}{2} e^{-2T}}$$

$$\rightarrow A(t) = \frac{2}{1 + e^{2(t-T)}}$$

Entonces, $J(t, x)$ se puede reescribir como:

$$J(t, x) = A(t)x(t)^2 = \frac{2x(t)^2}{1 + e^{2(t-T)}}$$

$$\rightarrow J_x(t, x) = \frac{4x(t)}{1 + e^{2(t-T)}}$$

Al derivar el lado derecho de la ecuación de HJB, se obtiene:

$$u = \frac{J_x}{2}$$

Reemplazando el valor de $J_x(t, x)$ en $u(t)$:

$$u(t) = \frac{1}{2} \frac{4x(t)}{1 + e^{2(t-T)}}$$

$$\rightarrow u(t) = \frac{2x(t)}{1 + e^{2(t-T)}}$$

Por la ecuación de estado:

$$\dot{x} = x - u$$

Reemplazando el valor de $u(t)$:

$$\rightarrow \dot{x} = x - \frac{2x}{1 + e^{2(t-T)}}$$

Resolviendo lo anterior:

$$x(t) = Ke^{-t}(e^{2T} + e^{2t})$$

Para determinar el valor de la constante K , usamos la condición de valor residual:

$$x(T) = X_T$$

Por lo tanto, al igualar $x(t)$ evaluada en T con el valor residual:

$$x(T) = Ke^{-T}(e^{2T} + e^{2T}) = X_T$$

$$\rightarrow Ke^{-T}2e^{2T} = X_T$$

Entonces, el valor de la constante K es:

$$K = \frac{X_T e^{-T}}{2}$$

Por consiguiente, el valor de $x(t)$ se puede reescribir como:

$$x(t) = \frac{X_T e^{-T}}{2} e^{-t}(e^{2T} + e^{2t})$$

$$\rightarrow x(t) = \frac{X_T}{2} e^{-T-t}(e^{2T} + e^{2t})$$

$$\rightarrow x(t) = \frac{X_T}{2} (e^{T-t} + e^{t-T})$$

Entonces, el valor de la variable de control es:

$$u(t) = \frac{2 \frac{X_T}{2} (e^{T-t} + e^{t-T})}{1 + e^{2(t-T)}}$$

$$\rightarrow u(t) = \frac{X_T (e^{T-t} + e^{t-T})}{1 + e^{2(t-T)}}$$

Con lo que se puede obtener el valor óptimo de $J(t, x)$:

$$J^*(t, x) = \frac{2x^*(t)^2}{1 + e^{2(t-T)}}$$

Problema 5.3

El siguiente problema proviene, con algunas modificaciones, de Brito (2008). Encuentre el valor de la variable de control y de la variable de estado en el tiempo (considere que T es un valor positivo conocido).

$$\max_{c(t)} \int_0^T e^{-rt} (\ln(c(t))) dt$$

s. a.

$$\dot{w}(t) = -c(t)$$

$$w(0) = R$$

$$c(t), w(t) > 0$$

Hint: Pruebe con una solución de la forma $V(t, w) = a + \frac{1}{r} \ln(w(t))$, onde a es una constante a ser determinada.

Solución

Se utiliza la fórmula de la programación dinámica para funciones con flujo descontado (e^{-rt}), como ocurre en el caso del problema minero de encontrar la ley de corte óptima. Además, se sabe que en este caso la variable de control es $c(t)$ y la variable de estado $w(t)$, entonces, la ecuación HBJ será:

$$rV(t, w) - V_t(t, w) = \max_c \{f(t, w, c) + V_w(t, w)g(t, w, c)\}$$

En este caso, la variable de control es:

$$f(t, w, c) = \ln(c(t))$$

El factor e^{-rt} no es parte de $f(t, x, u)$, pues ya está considerado implícitamente al haber modificado la ecuación HJB.

$$g(t, w, c) = -c(t)$$

Entonces, la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman para este problema se puede reescribir como:

$$rV(t, w) - V_t(t, w) = \min_c \{\ln(c(t)) + V_w(t, w)(-c(t))\}$$

Para encontrar el c óptimo, derivamos la parte derecha de la ecuación anterior respecto a c y se iguala a 0:

$$0 = \frac{1}{c} - V_w$$

Entonces c es:

$$c = \frac{1}{V_w}$$

Para cerciorarse de que se trata de un máximo, derivamos dos veces el lado derecho de la ecuación HJB respecto a c :

$$\frac{-1}{c^2} < 0$$

Entonces realmente se trata de un máximo, ya que $c(t)$ es siempre distinto de cero.

Ahora, reemplazando el valor de c en la ecuación HJB, lo que resulta:

$$rV - V_t = \min_c \left\{ \ln\left(\frac{1}{V_w}\right) + V_w \left(\frac{-1}{V_w}\right) \right\}$$

En esta ecuación se puede eliminar el minimizador, ya que ahora ningún término depende de c , entonces la ecuación HJB queda:

$$rV - V_t = \ln\left(\frac{1}{V_w}\right) - 1$$

Ahora, ocupando el *hint*: $V(t, w) = a + \frac{1}{r} \ln(w(t))$

Calculando así las derivadas parciales de $V(t, w)$:

$$V_t(t, w) = 0$$

$$V_w(t, w) = \frac{1}{rw(t)}$$

$$\rightarrow \frac{1}{V_w(t, w)} = rw$$

Reemplazando las derivadas parciales y $V(t, w)$ en la ecuación de HJB:

$$r * \left(a + \frac{1}{r} \ln(w) \right) - 0 = \ln(rw) - 1$$

$$\rightarrow ra + \ln(w) = \ln(r) + \ln(w) - 1$$

$$\rightarrow ra = \ln(r) - 1$$

$$\rightarrow a = \frac{\ln(r) - 1}{r}$$

Por otro lado, se sabe que:

$$c(t) = \frac{1}{V_w} = rw(t)$$

Al reemplazar la igualdad anterior en la ecuación de estado:

$$\dot{w}(t) = -c(t) = -rw(t)$$

$$\rightarrow \frac{d(w(t))}{dt} = -rw(t)$$

$$\rightarrow \frac{d(w(t))}{w(t)} = -r dt$$

Integrando en ambos lados:

$$\ln(w(t)) = -rt + k$$

$$\rightarrow w(t) = e^{-rt+k} = Be^{-rt}$$

Donde B es una constante a determinar.

Para encontrar B , igualamos la ecuación anterior con la condición de borde: $w(0) = R$

$$\rightarrow w(0) = R = Be^{-r*0} = B$$

$$\rightarrow B = R$$

Reemplazando el valor de B en $w(t)$:

$$w(t) = Re^{-rt}$$

Entonces el valor de $c(t)$ es:

$$c(t) = rw(t) = rRe^{-rt}$$

Finalmente, reemplazando el valor de a en $V(t, w)$, se obtiene:

$$V(t) = a + \frac{1}{r} \ln(w(t)) = \frac{\ln(r) - 1}{r} + \frac{1}{r} \ln(Re^{-rt})$$

$$\rightarrow V(t) = \frac{\ln(r) - 1 + \ln(R) - rt}{r}$$

Problema 5.4

El modelo de Ramsey es el problema de un planificador que determina el consumo óptimo de un flujo $c(t)$ que maximiza la utilidad del funcional en el tiempo. Este ejercicio proviene, con algunas modificaciones leves, de Brito (2008).

Encuentre el valor de $c(t)$ y $m(t)$ para el siguiente problema de programación dinámica.

$$\max_{c(t)} \int_0^{\infty} e^{-rt} \frac{c(t)^{1-\alpha}}{1-\alpha} dt$$

s. a.

$$\dot{m}(t) = Am^\alpha - c(t), \text{ ecuación de estado}$$

$$m(0) = m_0, \text{ Stock inicial}$$

$$c(t) \geq 0$$

$$A, \alpha > 0$$

Ansatz: Pruebe con una solución de la forma $V(t, m) = B + Em^{1-\alpha}$. Donde B y E son constantes a ser determinadas.

Solución

La ecuación de HJB para funciones con e^{-rt} , con variable de control $c(t)$ y como variable de estado $m(t)$, viene dada por:

$$rV(t, m) - V_t(t, m) = \max_c \{g(t, m, c) + V_k(t, m)f(t, m, c)\}$$

En este ejercicio los valores de $g(t, m, c)$ y $f(t, m, c)$ son:

$$f(t, m, c) = \frac{c(t)^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

$$g(t, m, c) = Am^\alpha - c(t)$$

Entonces, la ecuación de HJB para este problema se puede reescribir como:

$$rV(t, m) - V_t(t, m) = \min_c \left\{ \frac{c(t)^{1-\alpha}}{1-\alpha} + V_m(t, m) * (Am^\alpha - c(t)) \right\}$$

Para encontrar el c óptimo, se deriva la parte derecha de la ecuación anterior respecto a c y se iguala a 0:

$$0 = \frac{(1-\alpha) * c(t)^{-\alpha}}{1-\alpha} - V_m$$

$$\rightarrow V_m = c(t)^{-\alpha}$$

Entonces c vale:

$$c(t) = V_m^{-1/\alpha}$$

Para cerciorarse de que se trata de un máximo, derivamos dos veces el lado derecho de la ecuación HJB respecto a c :

$$-\alpha c^{-\alpha-1} < 0$$

Entonces realmente se trata de un máximo, ya que α es positivo.

Ahora, reemplazando el valor de c en la ecuación HJB, lo que resulta:

$$rV - V_t = \min_c \left\{ \frac{V_m^{-\frac{1}{\alpha}(1-\alpha)}}{1-\alpha} + V_m \left(Am^\alpha - V_m^{-\frac{1}{\alpha}} \right) \right\}$$

En esta ecuación se puede eliminar el minimizador, ya que ahora ningún término depende de c , entonces la ecuación HJB queda:

$$rV - V_t = \frac{V_m^{1-\frac{1}{\alpha}}}{1-\alpha} + V_m * Am^\alpha - V_m * V_m^{-\frac{1}{\alpha}}$$

$$= \frac{V_m^{1-\frac{1}{\alpha}}}{1-\alpha} + V_m Am^\alpha - V_m^{1-\frac{1}{\alpha}} = V_m^{1-\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{1}{1-\alpha} - 1 \right) + V_m Am^\alpha$$

$$= V_m^{1-\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{1-1(1-\alpha)}{1-\alpha} \right) + V_m Am^\alpha = V_m^{1-\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right) + V_m Am^\alpha$$

Factorizando el lado izquierdo por V_k , la ecuación HJB corresponde a:

$$rV - V_t = V_m \left(V_m^{-\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right) + Am^\alpha \right)$$

Ahora, ocupando el *ansatz*: $V(t, m) = B + Em^{1-\alpha}$

Calculando las derivadas parciales de $V(t, m)$:

$$V_t(t, m) = 0$$

$$V_m(t, m) = E(1-\alpha)m^{-\alpha}$$

Reemplazando las derivadas parciales y $V(t, m)$ en la ecuación HJB:

$$\begin{aligned} r * (B + Em^{1-\alpha}) - 0 &= E(1-\alpha)m^{-\alpha} \left((E(1-\alpha)m^{-\alpha})^{-\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right) + Am^\alpha \right) \\ \rightarrow rB + rEm^{1-\alpha} &= E \left((E(1-\alpha))^{-\frac{1}{\alpha}} m \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right) (1-\alpha)m^{-\alpha} + Am^\alpha (1-\alpha)m^{-\alpha} \right) \\ \rightarrow rB + rEm^{1-\alpha} &= E \left(\alpha (E(1-\alpha))^{-\frac{1}{\alpha}} m^{1-\alpha} + A(1-\alpha) \right) \end{aligned}$$

Igualando los ponderadores de $m^{1-\alpha}$ y los de m^0 , se tiene que:

$$\begin{aligned} \text{Para } m^{1-\alpha}: \quad rE &= E\alpha(E(1-\alpha))^{-\frac{1}{\alpha}} \\ \rightarrow \frac{r}{\alpha} &= (E(1-\alpha))^{-\frac{1}{\alpha}} \\ \rightarrow \left(\frac{\alpha}{r} \right)^\alpha &= E(1-\alpha) \\ \rightarrow E &= \left(\frac{\alpha}{r} \right)^\alpha \frac{1}{(1-\alpha)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Para } k^0: \quad rB &= E * A(1-\alpha) = \left(\frac{\alpha}{r} \right)^\alpha \frac{1}{(1-\alpha)} A(1-\alpha) \\ \rightarrow rB &= A \left(\frac{\alpha}{r} \right)^\alpha \\ \rightarrow B &= \frac{A}{r} \left(\frac{\alpha}{r} \right)^\alpha \end{aligned}$$

Entonces, el $V(m)$ se puede reescribir como:

$$V(m) = \frac{A}{r} * \left(\frac{\alpha}{r}\right)^\alpha + \left(\frac{\alpha}{r}\right)^\alpha \frac{1}{(1-\alpha)} m^{1-\alpha}$$

Entonces $V_m(m)$ vale:

$$V_m(t, m) = \left(\frac{\alpha}{r}\right)^\alpha \frac{1}{(1-\alpha)} (1-\alpha) m^{-\alpha}$$

$$\rightarrow V_m(t, m) = \left(\frac{\alpha}{r}\right)^\alpha m^{-\alpha}$$

Al derivar la ecuación de HJB respecto a $c(t)$, se determinó que:

$$c(t) = V_m \frac{1}{\alpha} = \left(\left(\frac{\alpha}{r}\right)^\alpha m^{-\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \left(\frac{\alpha}{r}\right)^{-1} m$$

$$\rightarrow c(t) = \frac{r m(t)}{\alpha}$$

Por la ecuación de estado, se sabe que:

$$\dot{m}(t) = Am^\alpha - c(t)$$

Al reemplazar el valor de $c(t)$:

$$\dot{m}(t) = Am^\alpha - \frac{r m(t)}{\alpha}$$

Resolviendo mediante Bernoulli:

$$m^*(t) = \left[\frac{Ar}{\alpha} + \left(m_0^{\frac{1}{1-\alpha}} - \frac{Ar}{\alpha} \right) e^{-\frac{r(1-\alpha)t}{\alpha}} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Luego, el valor de $c(t)$ es:

$$c^*(t) = m^*(t) \frac{r}{\alpha}$$

Problema 5.5

Una operación minera explota un *commodity* mineral en un ambiente en donde el precio se considera constante e igual a p_0 para todo instante de tiempo en el futuro. Por otro lado, el

costo unitario de producción será equivalente a $ce^{\alpha t}$ (con $c, \alpha > 0$). Los recursos iniciales son iguales a S_0 y la mina posee una capacidad de producción de $K > 0$ por periodo. La tasa de descuento para el proyecto es igual a r .

- Plantee el problema de optimización dinámica que permite a la empresa encontrar el nivel de producción en cada instante de tiempo que maximiza el VAN de la operación, identificando claramente las restricciones del problema. Establezca cuáles son las variables de estado y de control para este caso.
- Resuelva mediante programación dinámica para encontrar el nivel de producción óptimo para cada instante de tiempo. A su vez, determine el LOM de la mina.

Solución

- Se tiene el siguiente problema de optimización dinámica:

$$J = \text{Max}_{q(t), T} \int_0^T e^{-rt} (p_0 - ce^{\alpha t}) q(t) dt$$

s. a.

$$\dot{S} = -q(t)$$

$$S(0) = S_0$$

$$S(T) = 0$$

$$0 \leq q(t) \leq K$$

Para plantear el problema se deben tener algunas consideraciones. Al ser el costo unitario es necesario multiplicarlo por la producción $q(t)$ para obtener los costos totales. El VAN depende tanto de la producción como del LOM por lo que ambas variables son parte de la maximización. Por otra parte, la capacidad de extracción y procesamiento de la operación debe estar contenida entre 0 y la capacidad máxima (K) para cada instante de tiempo.

La variable de para este caso será $S(t)$, mientras que la de control será $q(t)$ ya que es la que el planificador controla para alcanzar el VAN óptimo.

b) Para resolver se debe derivar la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman vista en el capítulo. La ecuación se presenta a continuación.

$$HJB: -J_t(t, x) = \text{Max}_u \{g(t, x, u) + J_x(t, x) * f(t, x, u)\}$$

Para aplicarla en este caso, se debe identificar las variables relevantes:

$$u = q(t)$$

$$g(t, x, u) = e^{-rt}(p_0 - ce^{at})q$$

$$f(t, x, u) = -q$$

Por lo que la ecuación de HJB para este caso es

$$-J_t(t, x) = \text{Max}_{q(t)} \{ e^{-rt}(p_0 - ce^{at})q(t) - J_s(t, x)q(t) \}$$

Redistribuyendo se puede ver que la función a maximizar es lineal en $q(t)$:

$$-J_t(t, x) = \text{Max}_{q(t)} \{ [e^{-rt}(p_0 - ce^{at}) - J_s(t, x)]q(t) \}$$

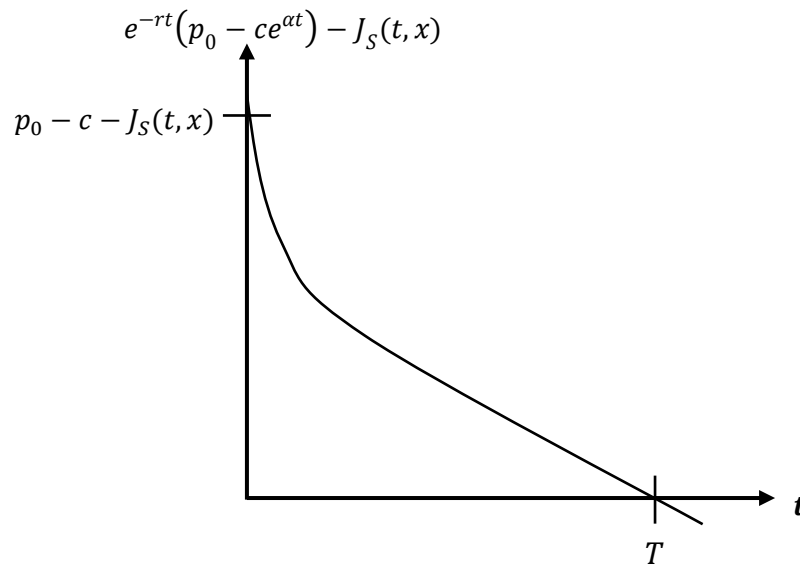
Para obtener un máximo en un problema lineal en la variable de control no basta con derivar e igualar a cero, ya que la función es una recta. Para resolver se requiere realizar un análisis de $q(t)$ para distintos casos.

- Si lo que acompaña a $q(t)$ es positivo, el máximo se alcanza cuando el $q(t)$ sea máximo, por lo que se buscará producir al límite de la capacidad (K).
- Si lo que acompaña a $q(t)$ es igual a cero, la función será igual a cero independiente del $q(t)$, por lo que la producción será indiferente a producir, es decir no necesariamente toma un valor específico en uno de sus extremos.
- Si lo que acompaña a $q(t)$ es negativo, el máximo se alcanza cuando el $q(t)$ sea mínimo, por lo que se buscará no producir.

Esta información se resume de la siguiente forma:

$$q(t)^* = \begin{cases} K & \text{si } e^{-rt}(p_0 - ce^{at}) > J_s(t, x) \\ q(t)^* & \text{si } e^{-rt}(p_0 - ce^{at}) = J_s(t, x) \\ 0 & \text{si } e^{-rt}(p_0 - ce^{at}) < J_s(t, x) \end{cases}$$

Como se puede observar el ponderador que acompaña a $q(t)$ en la función $(e^{-rt}(p_0 - ce^{at}) - J_S(t, x))$ varía con el tiempo, disminuyendo a medida que aumenta t . Este comportamiento en el tiempo se muestra a continuación:



Como se puede observar en la figura anterior en el tiempo t^* el valor del ponderador pasa a ser negativo, es decir $e^{-rt}(p_0 - ce^{at}) < J_S(t, x)$ por lo que la producción óptima sería igual a cero según lo visto anteriormente.

Ahora, se pueden determinar los recursos en base a la explotación con la ecuación de estado y la condición inicial:

$$\dot{S} = -q(t)$$

Integrando con respecto a $q(t)$:

$$S(t) = C - q(t)t$$

Con C una constante a determinar con la condición inicial de los recursos:

$$S(0) = S_0 = C - q(0) \cdot 0$$

$$S(0) = C$$

Entonces se obtiene la función de los recursos:

$$S(t) = S_0 - q(t)t$$

Para determinar el LOM de la mina se debe analizar las razones para detener la extracción. Por una parte, la extracción no puede seguir una vez que se han extraído todos los recursos porque simplemente no queda nada más que extraer. En este caso el LOM estaría definido como $T^* = \frac{S_0}{K}$ ya que si es económicamente viable se tratará de extraer a la máxima capacidad.

Por otro lado, se deja de extraer mineral cuando se deja de obtener beneficio por su explotación. Esto ocurre cuando $e^{-rt}(p_0 - ce^{at}) < J_S(t, x)$ por lo que el LOM sería igual a t^* según lo visto en el gráfico anterior.

Entonces el LOM de la operación será el menor tiempo entre estos dos, es decir:

$$T = \text{Mínimo} \left\{ \frac{S_0}{K}, t^* \right\}$$

Capítulo 6: Control óptimo

En este capítulo se presenta la teoría y los principios matemáticos del control óptimo. Este método de optimización matemática corresponde a una extensión del cálculo de variaciones y a la tercera y última forma de resolver los problemas de optimización dinámica. En particular, el control óptimo busca maximizar o minimizar el valor de un funcional influyendo en el comportamiento de un sistema dinámico. Las principales aplicaciones de este método son presentadas a modo de motivación, para luego formular el problema general del control óptimo, las condiciones necesarias para su solución y, finalmente, analizar algunas aplicaciones en la economía minera a modo de ejemplo.

6.1 Principales aplicaciones

La teoría del control óptimo nace en la década de 1950 cuando el matemático ruso Lev S. Pontryagin (1908-1988) y sus colaboradores desarrollaron con éxito el “principio del máximo” (que se detallará más adelante). Este descubrimiento permitió desarrollar una nueva teoría para encontrar la solución de la clase de problemas llamados procesos óptimos, respectivamente problemas de control óptimo (Pesch y Plail, 2009).

Sus primeras aplicaciones lo relacionan con el problema de la exploración espacial, donde el desafío de lanzar un satélite a una órbita estable permitió el desarrollo temprano de la teoría (Schättler y Ledzewicz, 2010). Posteriormente, la creciente demanda por aplicaciones en economía permitió que se desarrollara una amplia variedad de aplicaciones en las ciencias económicas (Seierstad y Sydsaeter, 1987; Holly y Hughes Hallett, 2010; Anița *et al.*, 2011).

Así por ejemplo, Weber (2011) presenta las revisiones más recientes de la teoría de juegos y el diseño de mecanismos con aplicaciones fundamentales del control óptimo.

Actualmente, la teoría del control óptimo tiene importantes aplicaciones en ingeniería, pero también en ciencias aplicadas, en particular en biología y medicina (Lenhart y Workman, 2007). Por ejemplo, en Kirschner *et al.* (1997) se presenta una estrategia óptima de quimioterapia para un tratamiento dinámico del VIH. En relación a otras áreas de la ingeniería, en Berkovitz y Medhin (2013) se presentan aplicaciones en las áreas de mecánica del vuelo, ingeniería química e ingeniería eléctrica.

Otro tema investigado en la literatura es el de las aplicaciones del control óptimo en la extracción de recursos naturales. Ramírez (1987) presentó aplicaciones del control óptimo en la recuperación de petróleo. Más recientemente, en Sethi y Thompson (2005) analizan las aplicaciones del control óptimo en la extracción de algunos recursos naturales (peces, forestales y petróleo). Como veremos en la Parte III de este libro, en economía minera las aplicaciones de control óptimo son también abundantes en la literatura económica (no así en planificación minera).

En la última sección de este capítulo se analizan las aplicaciones del control óptimo en la minería, así como el significado de sus variables en un contexto económico. En los Capítulos 10 y 11, se incorpora información básica al problema, dada por las condiciones de estabilidad geotécnica y la inversión, y se presentan algunas aplicaciones con interés práctico del control óptimo en la explotación óptima de minas.

6.2 Problema del control óptimo

En esta sección se describe el problema general del control óptimo, así como las restricciones sobre las funciones que describen el problema. Los fundamentos teóricos con un mayor nivel de rigurosidad matemática se encuentran por ejemplo en Kamien y Schwartz (1991).

El control óptimo surge como generalización del cálculo de variaciones, entregando resultados equivalentes a los problemas planteados mediante esta técnica. El control óptimo en algunos casos presenta, sin embargo, ventajas sobre el cálculo de variaciones, principalmente en aquellos casos en que se presentan restricciones con derivadas de las funciones a determinar.

En términos generales, el control óptimo considera un sistema dinámico para el cual se puede controlar en algún grado su evolución en el tiempo. Existen dos clases de variables: variables de estado y variables de control. Las primeras, denotadas mediante un vector $x(t)$, describen el estado del sistema en cada instante tiempo, mientras que las segundas representan las decisiones del agente y están resumidas en un vector $u(t)$. De esta forma, el problema base de control óptimo consiste en elegir cursos temporales para las variables de control, dentro de una serie de ecuaciones diferenciales que describen el sistema, con el objeto de optimizar (maximizar o minimizar) el funcional objetivo. Así, el problema estándar se puede plantear matemáticamente como:

$$\min_{u(t)} \int_{t_0}^{t_1} g(t, x(t), u(t)) dt \quad (6.1)$$

s. a.

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \quad (6.2)$$

$$x(t_0) = x_0 \quad (6.3)$$

$$x(t_1) \text{ libre} \quad (6.4)$$

Nótese que en este problema g y f son funciones continuamente diferenciables de tres argumentos independientes entre sí, y ninguno se encuentra en derivadas. Por su parte, la variable de control $u(t)$ debe ser una función continua. A su vez, la variable de estado $x(t)$ se rige por ecuaciones diferenciales de primer orden y varía en el tiempo según la primera restricción (6.2).

El problema (6.1-6.4) puede reescribirse como un problema clásico del cálculo de variaciones, según:

$$\min_{x(t)} \int_{t_0}^{t_1} g(t, x(t), x'(t)) dt \quad (6.5)$$

s. a.

$$x(t_0) = x_0 \quad (6.6)$$

El problema clásico del cálculo de variaciones se puede transformar así en un problema de control óptimo, considerando que el movimiento de la variable de estado $x(t)$ está regido por una función $f(t, x, u)$. En particular, la función f puede corresponder en algunos casos a la variable de control $u(t)$, luego:

$$\min_{u(t)} \int_{t_0}^{t_1} g(t, x(t), u(t)) dt \quad (6.7)$$

s. a.

$$\dot{x}(t) = u(t) \quad (6.8)$$

$$x(t_0) = x_0 \quad (6.9)$$

Se debe considerar que un problema de control óptimo puede tener varias variables de estado y varias variables de control. Se debe respetar, sin embargo, el hecho de que cada variable de estado evolucione de acuerdo con una ecuación diferencial ordinaria respecto a una o varias variables de control.

Por lo tanto, el problema general a resolver mediante el control óptimo viene dado por:

$$\min_{u(t)} \int_0^T g(t, x(t), u(t)) dt + h(x(T)) \quad (6.10)$$

s. a.

$$\dot{x} = f(t, x(t), u(t)) \quad (6.11)$$

$$x(0) = x_0 \quad (6.12)$$

Donde (6.11) corresponde a la ecuación de estado, que relaciona la variable de estado $x(t)$, con la variable de control $u(t)$, mientras que (6.12) describe el estado inicial del sistema. La función $h(x(T))$ corresponde a una función de valor residual.

En cuanto a la geometría del problema, la variable t se supone monótonamente creciente y no siempre representa al tiempo. Por su parte, las variables de estado y control se consideran funciones continuas. Las variables de estado están obligadas a ser continuas por estar diferenciadas en las ecuaciones de estado, sin embargo, existen problemas en que estas variables pueden ser discontinua, como por ejemplo la masa de un cohete de múltiples etapas o la velocidad en una órbita de transferencia impulsiva (Hull, 2003). En este caso particular, se considera $x(t)$ como función continua por partes. En este caso, dado que la variable de control $u(t)$ no está diferenciada en ecuaciones de estado, se le permite cierto nivel de discontinuidad (Hull, 2003).

6.3 Principio del máximo

El “principio del máximo” desarrollado por el matemático ruso Pontryagin y un grupo de colaboradores en la década de 1950 permite transformar esta estructura de problema en una formulación matemática estándar, que facilite la determinación de la solución óptima. La demostración del principio del máximo aquí presentada se puede revisar con más detalle en Kamien y Schwartz (1991).

Para la demostración considérese el problema básico del control óptimo:

$$\min_{u(t)} \int_{t_0}^{t_1} g(t, x(t), u(t)) dt \quad (6.13)$$

s. a.

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (6.14)$$

$$x(0) = x_0 \quad (6.15)$$

Para encontrar las condiciones necesarias que minimicen o maximicen el problema del control óptimo, se debe considerar el uso de multiplicadores de Lagrange. Sin embargo, a diferencia de la optimización estática, la restricción sobre el movimiento de la variable de estado debe cumplirse en cada instante de tiempo. Por lo tanto, se debe considerar una función $v(t)$ asociada a una única restricción. Así, se define el funcional:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} g(x, u) dt + \int_{t_0}^{t_1} v(t)[f(x, u) - \dot{x}] dt \quad (6.16)$$

Si la ecuación de estado (6.14) se cumple en todo instante de tiempo, la diferencia entre la función $f(x, u)$ y \dot{x} en la ecuación (6.4) debería ser 0. Por lo tanto, como el término que multiplica a $v(t)$ es 0, la ecuación (6.16) corresponde al mismo funcional del problema básico planteado.

Al integrar el último término de la ecuación (6.16) mediante integración por partes, se obtiene:

$$\int_{t_0}^{t_1} v(t)[f(x, u) - \dot{x}] dt = -v(t_1)x(t_1) + v(t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} x(t)\dot{v}(t) dt \quad (6.17)$$

Reemplazando la ecuación (6.17) en (6.16):

$$J = \int_{t_0}^{t_1} g(x, u) dt + \int_{t_0}^{t_1} x(t)\dot{v}(t) dt - v(t_1)x(t_1) + v(t_0)x(t_0) \quad (6.18)$$

Considerando una familia de controles de comparación $u^*(t) + ah(t)$, donde $u^*(t)$ es el control óptimo, $h(t)$ una función conocida que corresponde a una alteración del control $u^*(t)$ y a un parámetro. Además, $y(t, a)$ corresponde a la variable de estado generada por la ecuación de movimiento acorde al control definido anteriormente. Se asume además que $y(t, a)$ es una función suficientemente suave en sus dos argumentos. Dada la definición de la familia de controles de comparación, $a = 0$ provee el camino óptimo de $x^*(t)$. Luego:

$$y(t, 0) = x^*(t) \quad (6.19)$$

$$y(t_0, a) = x_0 \quad (6.20)$$

Con las funciones u^* , x^* y h fijadas, el valor del funcional J depende únicamente de a :

$$J(a) = \int_{t_0}^{t_1} g(y(t, a), u^*(t) + ah(t)) dt \quad (6.21)$$

Donde la variable de estado corresponde a la función $y(t, a)$ y el control a la familia de controles $u^*(t) + ah(t)$. Al utilizar la ecuación (6.18):

$$J(a) = \int_{t_0}^{t_1} [g(y(t, a), u^*(t) + ah(t)) + v(t)f(y(t, a), u^*(t) + ah(t)) + y(t, a)\dot{v}(t)] dt - v(t_1)y(t_1, a) + v(t_0)y(t_0, a) \quad (6.22)$$

Dado que u^* es el control que maximiza el funcional, considerando la familia de controles $u^*(t) + ah(t)$, la función $J(a)$ alcanza su máximo en $a = 0$. Al derivar con respecto a a y evaluar en $a = 0$, se obtiene:

$$j(0) = \int_{t_0}^{t_1} [(g_x + vf_x + \dot{v})y_a + (g_u + vf_u)h] dt - v(t_1)y_a(t_1, 0) \quad (6.23)$$

Donde g_x , f_x y g_u , f_u corresponden a las derivadas parciales de g y f , respecto de x y de u , respectivamente. Así, y_a es la derivada parcial de y con respecto a a . Dado que y_a es difícil de determinar, se determinará $v(t)$ tal que elimine la necesidad de hacerlo. Para esto $v(t)$ debe obedecer la siguiente ecuación diferencial:

$$\dot{v}(t) = -[g_x + vf_x]; v(t_1) = 0 \quad (6.24)$$

Luego, dada una función arbitraria $h(t)$, para anular la primera derivada de J debe cumplirse:

$$\int_{t_0}^{t_1} [(g_u + vf_u)] h dt = 0 \quad (6.25)$$

En particular, para $h(t) = f_u + vg_u$ se tiene:

$$\int_{t_0}^{t_1} [(g_u + v f_u)]^2 dt = 0 \quad (6.26)$$

La ecuación (6.26), implica la condición necesaria de que:

$$g_u + v f_u = 0 \quad (6.27)$$

De esta forma, se derivan las condiciones necesarias del problema base del control óptimo: la condición de primer orden (6.27), la condición del multiplicador de Lagrange (6.24), y la ecuación de estado (6.14). En particular, la solución va a pasar por construir una función auxiliar $H(x, u, v)$, que en general es función de la variable de estado $x(t)$, de la variable de control $u(t)$ y de una variable que se identificará como de co-estado $v(t)$. Esta última, corresponde a un símil de la variable de estado $x(t)$ y vive en un mundo imaginario, ya que esta función no existe en el problema original. La función $H(x, u, v)$ se conoce como Hamiltoniano³² y su estructura es la siguiente:

$$H(x, u, v) = g(x, u) + v f(x, u) \quad (6.28)$$

Por lo tanto, el principio del máximo consiste en una serie de condiciones que deben cumplir las variables x , u y v para ser solución al problema inicial. En general, se tendrán tres condiciones, y dado que hay tres incógnitas nos permitirá encontrar el valor de estas variables.

La primera condición corresponde a que $u^*(t)$ debe ser mínimo de la función H (o máximo dependiendo del problema). Es decir:

$$u^*(t) \rightarrow H(x, u^*, v) \leq H(x, u, v) \quad \forall u \quad (6.29)$$

Para el caso de maximización se debe cumplir la siguiente desigualdad:

$$u^*(t) \rightarrow H(x, u^*, v) \geq H(x, u, v) \quad \forall u \quad (6.30)$$

Cabe destacar que, el principio del máximo permite transformar un problema funcional en un problema de funciones (que es más simple que un problema funcional), por medio del uso de la función H . Por lo que, $u(t)$ debe satisfacer alguna condición de primer orden sobre la función H . En particular:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \quad (6.31)$$

³² La función Hamiltoniana $H(x, u, v)$ es llamada así en honor al matemático William Rowan Hamilton (1805-1865).

Un error frecuente es precisamente asumir que la primera condición del principio del máximo corresponde siempre a la ecuación (6.31). Sin embargo, la primera condición solo establece que la función H tiene que alcanzar un mínimo (o máximo) en $u^*(t)$. Únicamente bajo ciertos escenarios, esta condición es equivalente a la ecuación (6.31). Dada la condición de minimización, la condición de segundo orden asociada es:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} > 0 \quad (6.32)$$

Si el problema corresponde a una maximización, entonces esta condición será:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} < 0 \quad (6.33)$$

En el caso en donde la función H sea lineal en u , se debe cumplir que:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = 0 \quad (6.34)$$

Si se da el caso de la ecuación (6.34) la solución estará en los límites de la variable u . Desde el punto de vista gráfico, si se fijan las funciones $x(t)$ y $v(t)$, la función H tiene la forma de la Figura (6.1), y el u que minimiza ese H es el u óptimo que debiese resolver el problema inicial.

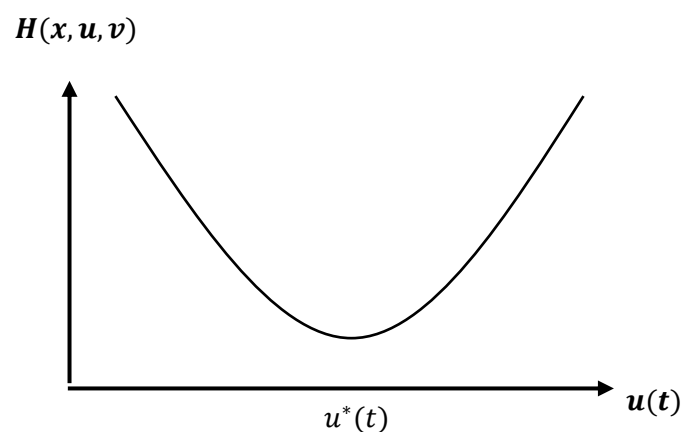


Figura 6.1. Descripción gráfica de $u(t)$ que minimiza la función Hamiltoniana

La segunda condición del principio del máximo corresponde a la ecuación de estado:

$$\dot{x} = H_v = \frac{\partial H}{\partial v} = f(x, u) \quad (6.35)$$

Esta condición implica que las restricciones del problema original se deben seguir cumpliendo en este nuevo planteamiento del problema.

La tercera condición del principio del máximo corresponde a la ecuación adjunta, que entrega información respecto a la variable de co-estado. En particular, esta condición establece que $v(t)$ tiene que variar de la siguiente forma:

$$\dot{v} = -H_x = \frac{-\partial H}{\partial x} \quad (6.36)$$

Debido a que $v(t)$ no pertenece al problema original, es necesario agregar esta ecuación adicional para poder determinar esta variable.

Lo que estas tres condiciones permiten obtener entonces es un sistema de tres ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, donde las incógnitas son tres variables que son dependientes del tiempo. Para el caso en que el problema tenga más restricciones, se generarán más variables y más ecuaciones, caso que se presenta en la Sección 6.7.

El principio del máximo asegura que los valores de $x^*(t)$, $u^*(t)$ y $v^*(t)$, que satisfacen las tres ecuaciones son el $x^*(t)$, $u^*(t)$ y $v^*(t)$ que resuelven el problema de optimización dinámica planteado en un comienzo.

Una vez revisada la teoría asociada a la resolución de problemas de optimización dinámica por control óptimo, se desarrollará un ejemplo simple de aplicación de las condiciones del principio del máximo.

Ejemplo 6.1

Se define el siguiente problema genérico de optimización dinámica, con un tiempo máximo T fijo e igual a T_0 , y una función $F(t, x(t), u(t))$ que cumpla que $F_{uu} < 0$:

$$\max_{u(t)} \int_0^T F(t, x(t), u(t)) dt \quad (6.37)$$

s. a.

$$\dot{x}(t) = u(t) \quad (6.38)$$

Realizando el procedimiento descrito anteriormente, primero se define el Hamiltoniano del problema:

$$H(x(t), u(t), v(t)) = F(t, x(t), u(t)) + v(t)u(t) \quad (6.39)$$

Definiendo así las condiciones del principio del máximo:

- Primera condición (condición del máximo):

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \rightarrow F_u + v = 0 \quad (6.40)$$

Se verifica que en este caso se está trabajando con un máximo, ya que desde un comienzo se le exige a la función F que sea cóncava en $u(t)$, por lo que la condición de segundo grado se cumple siempre en este ejemplo.

- Segunda condición (ecuación de estado):

$$\dot{x}(t) = H_v = u(t) \quad (6.41)$$

- Tercera condición (ecuación adjunta):

$$\dot{v}(t) = -H_x = -F_x \quad (6.42)$$

- Condición de transversalidad:

$$T = T_0 \quad (6.43)$$

Definidas las condiciones del problema, se trabajará con las ecuaciones para poder llegar al resultado esperado. Primero, se deriva la ecuación (6.40) con respecto al tiempo, para luego reemplazar la ecuación (6.42) en el resultado obtenido:

$$\frac{d(F_u+v)}{dt} \rightarrow \frac{d(F_u)}{dt} + \dot{v}(t) = 0 \quad (6.44)$$

Reemplazando $\dot{v}(t)$ en la ecuación (6.44) se obtiene:

$$F_x - \frac{d(F_u)}{dt} = 0 \quad (6.45)$$

, que corresponde ¡precisamente a la ecuación de Euler-Lagrange! Por tanto, la solución encontrada utilizando control óptimo en base a los cálculos realizados por medio de este ejemplo es equivalente a la solución en caso de resolver el problema por medio del cálculo de variaciones.

Nótese que la ecuación (6.45) corresponde a la ecuación de Euler-Lagrange, pero con la ecuación de estado reemplazada en el funcional. Es decir que el resultado es equivalente al problema:

$$\max_{u(t)} \int_0^T F(t, x(t), x'(t)) dt \rightarrow F_x - \frac{d(F_x^t)}{dt} = 0 \quad (6.46)$$

Por lo que si se cumple la ecuación (6.41), entonces la ecuación (6.45) obtenida por control óptimo es idéntica a la ecuación (6.46) definida según cálculo de variaciones.

6.4 Condiciones de transversalidad y condiciones iniciales

6.4.1 Condiciones de transversalidad

Una vez planteadas las principales ecuaciones correspondientes al principio del máximo es necesario notar que las variables de estado $x(t)$, de control $u(t)$ y la función auxiliar $v(t)$ definidas anteriormente, no son las únicas incógnitas del problema. Por lo que, para determinar el valor del resto de las incógnitas, junto a las constantes de integración provenientes de las ecuaciones diferenciales, es necesario agregar condiciones adicionales. Una de las condiciones a agregar se asocia al escenario en el cual los puntos extremos del funcional a optimizar son fijos o variables. Dependiendo de lo anterior, se cumplirán ciertas restricciones denominadas como condiciones de transversalidad (asociadas a las así llamadas en el caso del cálculo de variaciones), las cuales son profundizadas en la referencia asociada a Kamien y Schwartz (1991).

Como se mencionó anteriormente, una de estas incógnitas corresponde al límite superior de la integral del funcional definido en el problema del control óptimo. Este límite puede ser una función o una constante a determinar. De esta forma, su valor puede estar definido por el problema, siendo un valor fijo, o ser parte de la solución buscada, es decir, una variable adicional. Es por esto que se plantean cinco alternativas de ecuaciones de transversalidad³³, que dependerán de las características del problema y que permitirán determinar el valor de la variable en los extremos.

La primera condición se debe considerar cuando el valor descrito es una constante conocida en el problema o valor fijo dado. Esto implica que la condición de transversalidad asociada a esta característica sea que el límite del funcional es igual a este valor dado. Es decir, utilizando las

³³ Se debe notar que existen más condiciones de transversalidad, pero se escapan del alcance del libro. Para mayor detalle sobre el resto de condiciones, el lector puede consultar Kamien y Schwartz (1991).

variables del problema genérico del control óptimo, si T es dado como parámetro constante e igual a T_0 , entonces la condición de transversalidad asociada es $T = T_0$.³⁴

La segunda condición es necesaria cuando el valor final de la variable de estado es fijo. En otras palabras, si $x(T)$ es conocido e igual a una constante, entonces se debe agregar al problema la condición $x(T) = X_T$, con X_T una constante conocida.

La tercera condición se utiliza cuando el valor del límite superior del funcional es una constante, pero no es conocida *a priori*, por lo que esta constante se hace parte del problema como una variable extra a encontrar. Es decir, esta condición permite mantener endógeno el valor de T . Por ende, al existir una nueva variable, es necesario agregar una nueva ecuación al sistema. Esta nueva ecuación corresponde a la exigencia de que el Hamiltoniano evaluado en el límite buscado sea igual a cero. Es decir, si T es un valor desconocido y se necesita obtener del problema, se agregará a las ecuaciones del principio del máximo la ecuación $H(x(T), u(T), v(T)) = 0$.³⁵

La cuarta condición de transversalidad aplica cuando el valor de la variable de estado puede ser cualquiera. De este modo, la variable se vuelve endógena al problema original. Para esto, es necesario agregar una nueva ecuación a las detalladas en la parte del principio del máximo. Específicamente en este caso, la ecuación que se debe sumar al resto es la que iguala a cero la función auxiliar $v(T)$. En otras palabras, si $x(T)$ es desconocido y es una variable del problema, entonces se debe agregar la ecuación $v(T) = 0$.

Finalmente, el último tipo de condiciones de transversalidad que se analizará en este capítulo es un caso especial del tipo descrito anteriormente. Se relaciona con aquella situación en la cual el valor de la variable de estado evaluada en el extremo superior de la integral sea desconocido (una variable a definir), pero que por características del problema además debe ser mayor o igual a cero. Es decir, si $x(T)$ es desconocido y debe cumplir que $x(T) \geq 0$, entonces se agrega a las condiciones la inecuación $v(T) \geq 0$ y la condición $v(T)x(T) = 0$.

³⁴ Acorde a los objetivos del libro, la mayoría de los casos el límite superior de la integral a maximizar será el tiempo. Pero evidentemente puede ser otro parámetro, ya que dependerá del problema a resolver.

³⁵ La interpretación que hay detrás de esta condición dependerá del problema a resolver. Más adelante en este capítulo se dará a conocer en detalle el significado minero de esta condición.

Para expresar de forma resumida lo descrito anteriormente, se entrega a continuación un cuadro resumen. En este se especifica cada característica detallada que puede presentar un problema en particular, junto con la condición o ecuación de transversalidad correspondiente a cada caso.

Tabla 6.1. Condiciones de transversalidad dependiente del tipo de condición.

TIPO DE CONDICIÓN	CONDICIÓN DE TRANSVERSALIDAD
1. T como un parámetro fijo	$T = T_0$
2. $x(T)$ como un parámetro fijo	$x(T) = X_T$
3. T como una variable a definir	$H(x(T), u(T), v(T)) = 0$
4. $x(T)$ como una variable a definir	$v(T) = 0$
5. $x(T) \geq 0$ como una variable a definir	$v(T) \geq 0$ $v(T)x(T) = 0$

6.4.2 Condiciones Iniciales

Otro tipo de condiciones que se deben tener en cuenta en el planteamiento de un problema y luego resolución por medio de control óptimo son las condiciones iniciales. Es decir, el valor que toma la variable de estado en un instante inicial de tiempo.

Con estas, será posible determinar el valor de las constantes de integración que surjan de la resolución del sistema de ecuaciones diferenciales descrito anteriormente. Comúnmente, se entregan referencias sobre el valor inicial de la variable de estado, el cual sirve para obtener los valores óptimos de todas las variables y constantes que posea el problema de optimización dinámica planteado.

6.5 Condiciones de segundo orden o suficientes

Siendo rigurosos al momento de analizar los resultados obtenidos hasta ahora, todas las condiciones del principio del máximo son necesarias para que una función sea óptima, pero no necesariamente serán suficientes para asegurar que la solución encontrada con este método lo sea. Es por esto que a continuación se detallan los teoremas de Mangasarian y Arrow, los cuales aseguran esta suficiencia de las condiciones del principio del máximo, bajo ciertas situaciones.

Para explicar estos teoremas, primero se define un problema genérico de optimización dinámica:

$$\max_{u(t)} \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t)) dt \quad (6.47)$$

s. a.

$$\dot{x}(t) = g(t, x(t), u(t)) \quad (6.48)$$

$$t_0, t_1, x(t_0) \text{ fijo}, x(t_1) \text{ libre} \quad (6.49)$$

Luego se construye el Hamiltoniano correspondiente a este problema, dado por:

$$H(t, x(t), u(t), \lambda(t)) = f(t, x(t), u(t)) + \lambda(t)g(t, x(t), u(t)) \quad (6.50)$$

6.5.1 Teorema de Mangasarian

El teorema establece que para que las condiciones del principio del máximo resulten ser necesarias y suficientes, se deben cumplir alguna de las siguientes condiciones:

- Que las funciones f y g sean cóncavas en x y en u en el intervalo $[t_0, t_1]$, y que $\lambda(t) \geq 0$ en el mismo intervalo.
- Que la función f sea cóncava y la función g sea convexa en x y en u en el intervalo $[t_0, t_1]$, y que $\lambda(t) \leq 0$ en el mismo intervalo.

6.5.2 Teorema de Arrow

Adicionalmente al teorema de Mangasarian, existe una condición suficiente más débil, pero se basa en la obtención previamente de una trayectoria óptima y la definición de un Hamiltoniano maximizado. Esta definición corresponde simplemente al Hamiltoniano evaluado en la función óptima. Por lo que el teorema de suficiencia de Arrow establece que las condiciones necesarias expuestas en la parte del principio del máximo son, además, suficientes si se cumple que el Hamiltoniano maximizado es cóncavo en la función x , para un λ dado en el intervalo $[t_0, t_1]$. Es decir, si se cumple que para un $\lambda(t)$ dado, el $H(t, x(t), u^*(t), \lambda(t))$ es cóncavo en la función $x(t)$ en el intervalo $[t_0, t_1]$.

Por lo tanto, si se desea conocer con seguridad si una solución encontrada por medio del uso de control óptimo es óptima, se deben comprobar las condiciones de segundo orden establecidas por alguno de estos dos teoremas.

RECUADRO 6.1

AUTORES DE LOS TEOREMAS DE SUFICIENCIA O CONDICIONES DE SEGUNDO ORDEN

El autor del primer teorema es el profesor emérito Olvi Mangasarian. Nació el 12 de enero de 1934, en Bagdad, Iraq. Comenzó sus estudios en la Universidad Americana de Beirut, para terminarlos, junto a un magister, en la Universidad de Princeton. Luego, completó un doctorado en Matemáticas Aplicadas en la Universidad de Harvard, donde se mantuvo investigando por años. En 1967, Mangasarian se unió al Departamento de Ciencias Computacionales de la Universidad de Wisconsin, donde dictó clases y continuó investigando. Durante el periodo 1965 - 1967, dictó como profesor adjunto cursos de programación no lineal, en el Departamento de Electricidad e Ingeniería Industrial de la Universidad de California, en Berkeley. A lo largo de todo este prestigioso recorrido académico, Olvi Mangasarian realizó varios aportes en la materia, descritas en múltiples charlas y publicaciones. Entre estos, el teorema de suficiencia en el control óptimo.

Por su parte, el economista estadounidense Kenneth Joseph Arrow nació el 23 de agosto de 1921, en Nueva York, y murió el 21 de febrero de 2017. Junto a John Hicks, recibió el Premio Nobel de Economía en 1972. Es considerado uno de los más destacados economistas de la teoría económica neoclásica. Se licenció en 1940 en ciencias sociales, pero combinó sus estudios con una maestría en Matemáticas en la Universidad de Columbia. Aquí, obtuvo su doctorado en 1951 y por influencia de Harold Hotelling (el mismo que se discutirá en el Capítulo 9), se integró al Departamento de Economía de dicha universidad. Adicionalmente, fue jefe del Departamento de Economía y Estadística de la Universidad de Stanford entre 1949 y 1968. Luego de esto, y hasta 1979 trabajó desarrollando la teoría económica en la Universidad de Harvard, para finalmente volver a Stanford. Si bien sus principales contribuciones han sido en el campo de la teoría de la decisión, también aportó en la teoría del control óptimo, con teoremas como el descrito anteriormente que lleva su nombre.

6.6 Problema del control óptimo en la minería y su significado

En esta sección se estudiará en el problema de la explotación óptima de minas y los significados de cada una de las condiciones de transversalidad en este caso. El problema minero simplificado corresponde a maximizar los flujos de caja a lo largo de la vida de la mina, que dependerá de distintas variables (costos, exploración, avances tecnológicos, etc.). En este ejemplo se asume que el flujo de caja solo estará determinado por los recursos remanentes y la cantidad de material a extraer sujeto a una serie de restricciones. Este problema se traduce matemáticamente en:

$$\max_{q(t)} \int_0^T \pi(S(t), q(t)) dt \quad (6.51)$$

s. a.

$$\dot{S}(t) = -q(t) \quad (6.52)$$

$$S(0) = S_0 \quad (6.53)$$

$$q(t), S(t) \geq 0 \quad (6.54)$$

En donde $q(t)$ es la cantidad de material a extraer en cada instante t , $S(t)$ son las reservas remanentes en t , $\pi(S(t), q(t))$ son las utilidades instantáneas en cada t , y T corresponde al LOM de la mina.

En el problema anterior se busca determinar la cantidad óptima de mineral a extraer $q(t)$, con objeto de maximizar la utilidad de la faena hasta un período T . Las utilidades dependerán de las reservas remanentes y de la cantidad de mineral a extraer en cada período de tiempo. La variable de control se relacionará con variable de estado a través de la ecuación $\dot{S}(t) = -q(t)$. Esta se puede interpretar como que la variación de las reservas remanentes en cada periodo será igual a la cantidad extraída de material en ese período. Además, las reservas iniciales vienen dadas por la información entregadas por los geólogos, que en este caso serán S_0 .

Las tres primeras ecuaciones del principio del máximo sirven para derivar un óptimo de la función en cuestión. A medida que el problema se vuelve más complejo se necesitarán de condiciones de transversalidad cuando, por ejemplo, el LOM de la mina sea una variable endógena. En minería, estas ecuaciones tienen un significado clave para entender el problema minero y permitirán encontrar las constantes de integración que faltan para resolverlo. Es por

esto que a continuación se detalla la interpretación de cada una de las condiciones de transversalidad para la minería.

La primera condición de transversalidad, donde T es un parámetro fijo, se relaciona con el tiempo en el cual se termina de explotar la mina, es decir, el LOM de la mina. Por lo que esta restricción se utilizaría en problemas donde el LOM de la mina se considera exógeno, es decir, el momento de cierre de la mina es un dato del problema y no se considera como parte de las variables que la empresa minera (o el planificador minero) pueda manejar.

En minería, la segunda condición expresa que al final de la operación las reservas toman un determinado valor, por ejemplo, $S(T) = 0$ o $S(T) = S_T$. Esto va a variar dependiendo del caso a estudiar y de las condiciones iniciales de cada problema. En otras palabras, esta restricción se aplicaría en problemas para los cuales la cantidad de reservas que deben permanecer sin ser extraídas al final de una operación minera se encuentran restringidas.

Cuando el límite del funcional es constante, pero endógeno, se debe satisfacer además que $H(S(T), q(T), v(T)) = 0$. Dándole un sentido minero a esta nueva ecuación esta se relacionaría con la búsqueda del LOM óptimo por parte de la empresa. El significado de esta condición se refiere a que al finalizar la operación, el beneficio neto (función a maximizar) debe ser nulo. Por lo tanto, se debe cumplir que:

$$\pi(S(T), q(T)) - q(T)v(T) = 0 \quad (6.55)$$

El primer término de (6.55) se refiere a la utilidad instantánea en el instante final de tiempo o beneficio *ex situ*. Y el segundo término es la cantidad producida en T multiplicado por $v(T)$, que corresponde al beneficio *in situ*. En economía, y no solo en minería, el valor $v(t)$ se conoce como el precio sombra. Esto porque si se le da un sentido económico a la función $v(t)$, esta sería precisamente el precio que tiene una unidad de *commodity* “enterrada” en la tierra. Así, $v(t)q$ es el valor de dejar *in situ* esa unidad de producción. De esta manera, la ecuación (6.55) muestra que, se explotará una mina hasta el punto en el cual la utilidad que se obtendría extrayendo q unidades iguala a la utilidad que se obtendría si se dejaran enterradas en la tierra. En consecuencia, el LOM no se alcanzará si es que la utilidad instantánea de la mina es mayor que el valor de dejar enterrado el mineral. Es decir:

$$\text{Si } t \leq T, \text{ entonces } H(t) \geq 0$$

En conclusión, la función Hamiltoniana llevada al problema de la mina expresa que el Hamiltoniano de la mina es una suma entre la utilidad efectiva y el costo de oportunidad de extraer q unidades, ya que al extraer q unidades de valor $v(t)$ se deja de tener ese valor en el yacimiento para una explotación futura.

RECUADRO 6.2

PRECIO SOMBRA Y COSTO DE OPORTUNIDAD.

El precio sombra se representa matemáticamente a través de los multiplicadores de Lagrange. El significado de estos ponderadores dependerá del caso que se esté analizando. En optimización, (independiente de si el problema es uno de maximización o minimización) el precio sombra corresponderá al valor de cambio de la función objetivo, si es que se relaja la restricción asociada a ese multiplicador de Lagrange, o sea, si existe una variación en la restricción de Δx , entonces la función objetivo tendrá una variación de $\Delta x \cdot \lambda$, donde λ es el precio sombra asociado a esa restricción.

En microeconomía los multiplicadores de Lagrange tienen una interpretación del “costo marginal” (Nicholson, 2004). Es decir, reflejan la carga que se añade a la restricción por utilizar un poco más de x_i , donde x_i es una variable del problema.

En control óptimo los multiplicadores de Lagrange son llamados variables de co-estado. Seierstad y Sydsaeter (1987) le dan una interpretación económica alternativa a este valor. Ellos señalan que el cambio de V (en el caso de control óptimo, la función a optimizar es el Hamiltoniano), cuando cambia una de sus variables es conocido en economía como:

$$\frac{\partial V}{\partial x_i^0} = p_i(t_0), \quad i = 1, \dots, n,$$

Si x_i^0 denota el aumento de algún recurso, entonces $p_i(t_0)$ aproximadamente mide la contribución al valor de la función objetivo por unidad de incremento en x_i^0 . Por lo tanto, es razonable pensar que $p_i(t_0)$ es el valor o precio asignado a x_i^0 (al recurso). En conclusión, el precio sombra en minería equivale al valor *in situ* del mineral en el depósito.

El costo de oportunidad se puede entender como el costo potencial de escoger una alternativa por sobre la otra. De esta forma, no tiene sentido interpretar este valor sí es que no hay más de una opción. Por ejemplo, si existe la posibilidad de explotar una faena por minería a rajo abierto o por minería subterránea, el costo de oportunidad será lo que se deje de ganar por optar a la otra opción. Así, el beneficio neto será igual al beneficio de la opción tomada menos el beneficio de la opción desechada (costo de oportunidad).

La cuarta condición de transversalidad aplica cuando $x(T)$ es una variable del problema. En problemas de explotación óptima de minas esto se podría asociar a situaciones en las cuales sea necesario determinar cuánto recurso extraer, y cuántos recursos dejar en el yacimiento al cierre de la mina. Esto significa que las reservas o los recursos remanentes, al llegar al final de la vida de la mina puede tomar cualquier valor, es decir, las reservas son endógenas y, por ende, se debe determinar cuánto serán al final de la explotación, a través del problema de optimización. Partiendo de la base de que se está maximizando la utilidad de extraer el recurso y que se encontró el LOM que optimiza ese valor el recurso que quedó enterrado no tiene valor. Esto debido a que, si tuviese un beneficio, hubiese sido conveniente seguir extrayendo y el LOM determinado no habría sido óptimo. Por lo tanto, el precio sombra $v(T)$ de los recursos que quedaron enterrados desde ese instante de tiempo tiene que ser 0.

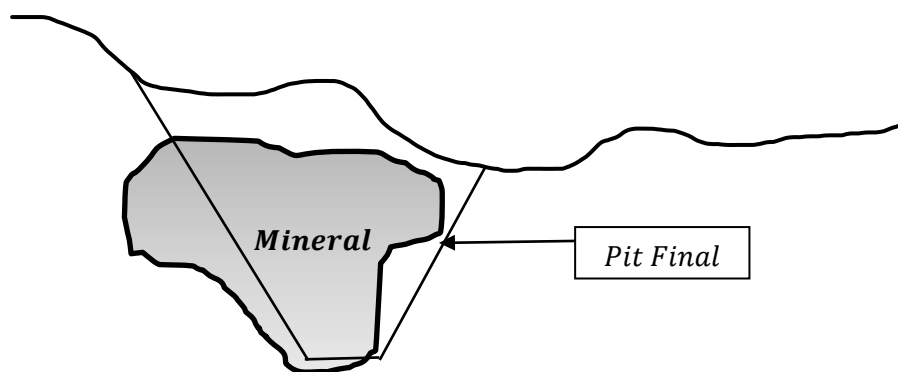


Figura 6.2. Caso en el que el *pit* final excluye parte de los recursos

Pensando en la explotación de un depósito por métodos de minería a rajo abierto, se puede generar el caso en el que el *pit* óptimo de la mina excluya parte de los recursos, o sea que $S(T) > 0$ (ver Figura 6.2). En estos casos, los recursos no serían extraídos porque su valor (objeto de la estimación de hoy, ya que en un futuro esto puede cambiar) es 0. Sin embargo, existe la posibilidad de extraer estos recursos, pero su beneficio sería 0, por lo que no existen incentivos para extraerlos. Analizando otro caso posible (ver Figura 6.3), podría ocurrir que el *pit* final considere la extracción de todo el mineral. De este modo, $S(T)$ sería igual a 0, y se presentaría una situación similar al caso en donde $x(T)$ es fijo.

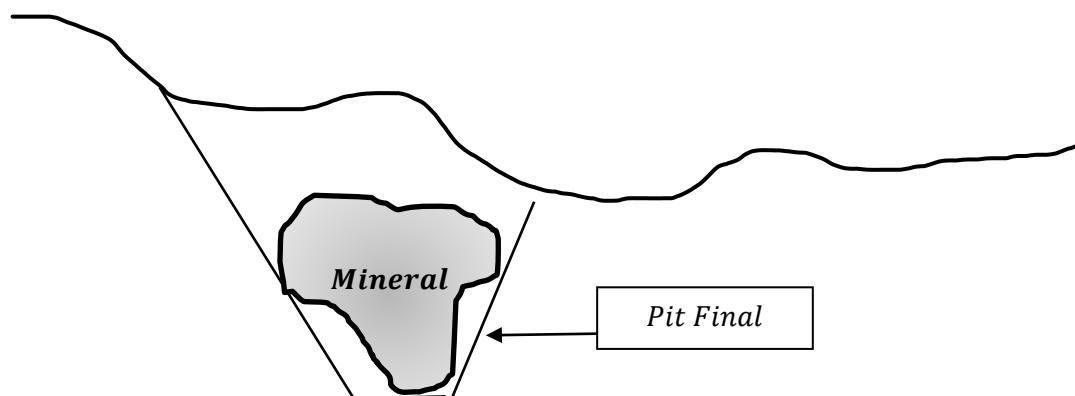


Figura 6.3. Caso en el que el *pit* final incluye todo el cuerpo mineralizado

Por último, la quinta condición de transversalidad señala que no solo $x(T)$ es variable, sino que también no puede ser negativa. En el problema minero esta condición es crucial, ya que los recursos remanentes no pueden ser negativos. Esta condición implica que se deban cumplir dos situaciones. Primero, el precio sombra tiene que ser no negativo, es decir, no se puede tener *in situ* algo que tiene un valor negativo. No tendría sentido pensar en sacar unidades negativas enterradas de ese mineral. Segundo, el valor del mineral remanente³⁶ tiene que ser nulo. Se explotará así la mina hasta que ocurra esto, ya que no tiene sentido detenerse si el valor del mineral que queda enterrado es todavía positivo.

6.7 Casos particulares

6.7.1 Hamiltoniano en valor corriente \hat{H}

Para muchos problemas con aplicaciones económicas, los valores futuros del flujo tendrán un factor de descuento involucrado (o tasa de descuento r), representado en tiempo continuo como e^{-rt} . Al plantear un problema general de esta índole por medio de control óptimo, se busca entonces resolver:

$$\max_{u(t)} \int_0^T e^{-rt} g(t, x(t), u(t)) dt \quad (6.56)$$

³⁶ El valor del mineral enterrado $v(T)$ por la cantidad de mineral en el LOM $x(T)$, es igual al valor de todo mineral al momento del fin de la vida de la mina ($v(T)x(T)$).

s. a.

$$\dot{x} = f(t, x(t), u(t)) \quad (6.57)$$

$$x(0) = x_0 \quad (6.58)$$

Dado el factor de descuento, el Hamiltoniano estándar se plantea de la siguiente forma:

$$H(t, x(t), u(t), v(t)) = e^{-rt} g(t, x(t), u(t)) + v(t) f(t, x(t), u(t)) \quad (6.59)$$

Al plantear las tres primeras condiciones del principio del máximo, se obtiene:

- Primera condición (condición del máximo):

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \rightarrow e^{-rt} g_u + v(t) f_u = 0 \quad (6.60)$$

- Segunda condición (ecuación de estado):

$$\dot{x} = H_v = \frac{\partial H}{\partial v} = f(t, x(t), u(t)) \quad (6.61)$$

- Tercera condición (ecuación adjunta):

$$\dot{v} = -H_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = -(e^{-rt} g_x + v(t) f_x) \quad (6.62)$$

Debido a la mayor dificultad de resolver el sistema de ecuaciones diferenciales descritas anteriormente, se realiza un cambio de variable en el Hamiltoniano, que otorgará comodidad algebraica al problema. Este cambio de variable es conocido como Hamiltoniano en valor corriente:

$$\hat{H}(t, x(t), u(t), v'(t)) = e^{rt} H(t, x(t), u(t), v(t)) \quad (6.63)$$

Aplicando este al caso bajo estudio:

$$\hat{H}(t, x(t), u(t), v'(t)) = e^{rt} [e^{-rt} g(t, x(t), u(t)) + v(t) f(t, x(t), u(t))] \quad (6.64)$$

$$\hat{H}(t, x(t), u(t), v'(t)) = g(t, x(t), u(t)) + e^{rt} v(t) f(t, x(t), u(t)) \quad (6.65)$$

Como $v(t)$ y e^{rt} dependen del tiempo, se define una nueva variable de co-estado, $v'(t) = v(t)e^{rt}$, por lo que la ecuación anterior puede ser escrita como:

$$\widehat{H}(t, x(t), u(t), v'(t)) = g(t, x(t), u(t)) + v'(t)f(t, x(t), u(t))$$

Así el problema planteado queda de la forma de un Hamiltoniano, sin el multiplicador e^{-rt} :

$$\max_{u(t)} \int_0^T g(x, u) dt \quad (6.66)$$

A diferencia del Hamiltoniano original, el Hamiltoniano en valor corriente asume que el valor del dinero no decrece en el tiempo, por ello no considera el factor e^{-rt} . Para resolver lo anterior es necesario adaptar las condiciones del principio del máximo. Sin embargo, ante el nuevo problema definido en la ecuación (6.66), la única condición que se ve alterada con este cambio de variable es la ecuación adjunta de la siguiente manera:

- Primera condición (condición del máximo):

$$\max_{u(t)} \widehat{H}(x, u, v') \quad (6.67)$$

- Segunda condición (ecuación de estado):

$$\dot{x} = \widehat{H}_{v'} = \frac{\partial H}{\partial v'} = f(T, x, u) \quad (6.68)$$

- Tercera condición (ecuación adjunta):

$$\dot{v} = -H_x \quad (6.69)$$

Pero como $\widehat{H} = e^{rt}H$ y $v' = e^{rt}v$, entonces al derivar la variable de co-estado, se obtiene:

$$\frac{d}{dt} v' = \frac{d}{dt} (e^{rt}v(t)) \rightarrow \frac{d}{dt} v' = r e^{rt}v + e^{rt} \frac{dv}{dt} \quad (6.70)$$

Reemplazando en la ecuación (6.70), este valor de v' , la ecuación anterior queda expresada como:

$$\frac{d}{dt} v' = r v' - e^{rt} H_x \quad (6.71)$$

Ahora, reemplazando el valor de \widehat{H} , se concluye con la tercera condición (ecuación adjunta), para el caso en el cual se trabaje con el Hamiltoniano en valor corriente:

$$\dot{v} = r v' + \widehat{H}_x \quad (6.72)$$

Con los cambios en las condiciones del principio del máximo detallados, ya es posible desarrollar el resto del problema de igual forma a como se ha realizado en el caso genérico del control óptimo.

6.7.2 H lineal en la variable de control

En este caso se plantea el siguiente ejemplo, donde T es conocido y existe una variable de control $u(t)$ con condición de borde.

$$\max_{u(t)} \int_0^T (1-u)x dt \quad (6.73)$$

s. a.

$$0 \leq u \leq 1, \forall t \in [0, T] \quad (6.74)$$

$$\dot{x} = \gamma ux, \text{ con } \gamma > 0 \quad (6.75)$$

$$x(0) = x_0, \text{ con } x_0 > 0 \quad (6.76)$$

A continuación, se muestra una posible solución al problema, para poder comprender de mejor manera las condiciones que debe cumplir.

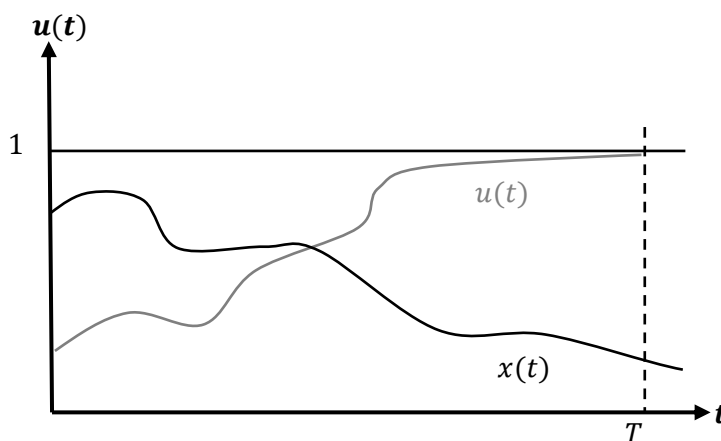


Figura 6.4. Posibles caminos de las variables de estado y control, buscadas en el problema

Resolviendo el problema mediante control óptimo, se parte construyendo la función Hamiltoniana:

$$H(x, u, v) = (1-u)x + v(\gamma ux) \quad (6.77)$$

Se plantean las tres primeras condiciones del principio del máximo:

- Primera condición (condición del máximo): Dado que el Hamiltoniano es lineal en la variable de control, no se cumple la primera condición de orden, lo que indica que la solución estará en los bordes.

$$H(x, u, v) = \begin{cases} x, & \text{si } u=0 \\ v\gamma x, & \text{si } u=1 \end{cases} \quad (6.78)$$

Con esto, si $v\gamma > 1 \rightarrow u^* = 1$, mientras que si $v\gamma < 1 \rightarrow u^* = 0$. Entonces:

$$u^*(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } v(t) < \frac{1}{\gamma} \\ 1 & \text{si } v(t) > \frac{1}{\gamma} \end{cases} \quad (6.79)$$

- Segunda condición (ecuación de estado):

$$\dot{x} = H_v = \frac{\partial H}{\partial v} = \gamma ux \quad (6.80)$$

Con esto:

$$\dot{x} = \begin{cases} 0 & \text{si } u = 0 \\ \gamma x & \text{si } u = 1 \end{cases} \quad (6.81)$$

Por lo tanto, se cumple la siguiente relación:

$$x(t) = \begin{cases} C_1 & \text{si } \dot{x} = 0 \\ x_0 e^{\gamma t} & \text{si } \dot{x} = \gamma x \end{cases} \quad (6.82)$$

Con C_1 constante. Considerando la ecuación (6.81) se tiene:

$$x^*(t) = \begin{cases} C_1 & \text{si } u^* = 0 \\ x_0 e^{\gamma t} & \text{si } u^* = 1 \end{cases} \quad (6.83)$$

- Tercera condición (ecuación adjunta):

$$\dot{v} = -H_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = -((1-u) + v\gamma u) \quad (6.84)$$

Por lo tanto:

$$\dot{v} = \begin{cases} -1 & \text{si } u = 0 \\ \gamma v & \text{si } u = 1 \end{cases} \quad (6.85)$$

En base a esto, se obtiene la siguiente relación:

$$v(t) = \begin{cases} -t + C & \text{si } \dot{v} = 1 \\ Ce^{-\gamma t} & \text{si } \dot{v} = \gamma v \end{cases} \quad (6.86)$$

Con C constante. Considerando la ecuación (6.85) se consigue el siguiente resultado:

$$v^*(t) = \begin{cases} -t + C_2 & \text{si } u^* = 0 \\ v(0)e^{-\gamma t} & \text{si } u^* = 1 \end{cases} \quad (6.87)$$

- Cuarta condición (condición de transversalidad):

Al encontrar la función óptima, se deben considerar los extremos fijos o variables. En este caso, dado que $x(T)$ es variable, entonces $v^*(T) = 0$. Considerando las ecuaciones (6.79), (6.83), (6.86), se tiene que:

$$v^*(T) = 0 \rightarrow -T + C_2 = 0 \quad (6.88)$$

Con esto, se obtiene el valor de la constante $C_2 = T$

De aquí, reemplazando la última condición en la ecuación (6.87):

$$v^*(t) = \begin{cases} -t + T & \text{si } u^* = 0 \\ v(0)e^{-\gamma t} & \text{si } u^* = 1 \end{cases} \quad (6.89)$$

Por otro lado, $-t + T = v(t) < \frac{1}{\gamma}$. Entonces se tiene que

$$T - \frac{1}{\gamma} < t \rightarrow u = 0 \quad (6.90)$$

Dada la definición de $u^*(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t > T - \frac{1}{\gamma} \\ 1 & \text{si } t < T - \frac{1}{\gamma} \end{cases}$, gráficamente se tiene que:

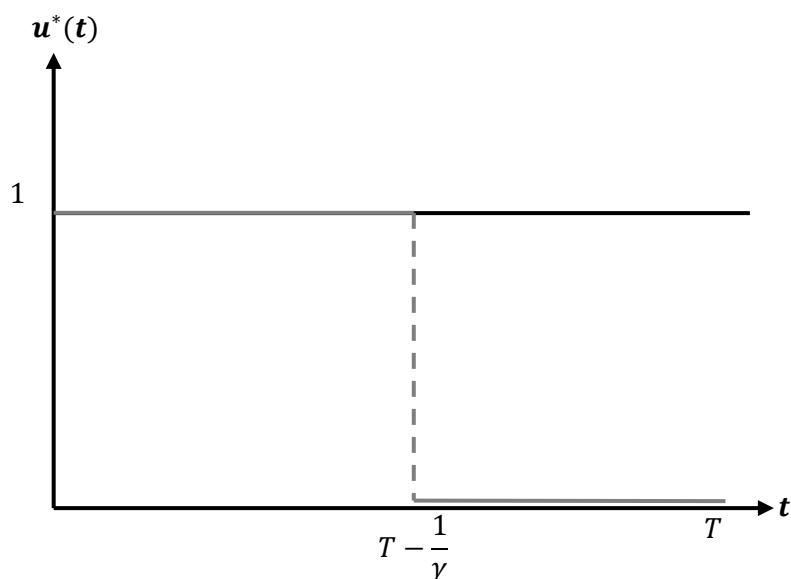


Figura 6.5. Representación gráfica de la variable de control $u(t)$ en el óptimo

En cuanto a $v^*(t)$, se pide que esta sea continua. De esta forma, si $v^*(t)$ está definida como:

$$v^*(t) = \begin{cases} -t + T & \text{si } t > T - \frac{1}{\gamma} \\ v(0)e^{-\gamma t} & \text{si } t < T - \frac{1}{\gamma} \end{cases} \quad (6.91)$$

Con $v^*\left(T - \frac{1}{\gamma}\right) = \frac{1}{\gamma}$, se observa que para $t > T - \frac{1}{\gamma}$, la función decrece exponencialmente, mientras que bajo ese valor decrece linealmente.

Referido a la continuidad de $v^*(t)$ en este caso se condiciona que esta variable sea continua para que no se generen problemas de decisión, en cuanto a los precio sombra, sobre el instante de tiempo $t = T - \frac{1}{\gamma}$. De esta forma, se necesita que:

$$v(0)e^{-\gamma\left(T - \frac{1}{\gamma}\right)} = \frac{1}{\gamma} \quad (6.92)$$

con lo que, despejando se obtiene:

$$v(0) = \frac{1}{\gamma} e^{\gamma\left(T - \frac{1}{\gamma}\right)} \quad (6.93)$$

Gráficamente:

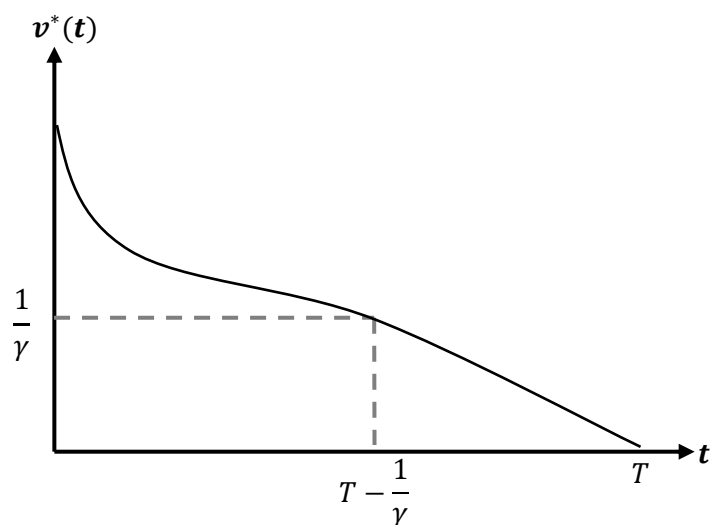


Figura 6.6. Representación gráfica de la variable de control $v(t)$ en el óptimo

Para el caso de $x^*(t)$, se sabe que se comporta de la forma:

$$x^*(t) = \begin{cases} C_1 & \text{si } t > T - \frac{1}{\gamma} \\ x_0 e^{\gamma t} & \text{si } t < T - \frac{1}{\gamma} \end{cases} \quad (6.94)$$

Con $x_0 > 0$. Para $t > T - \frac{1}{\gamma}$ la función se comporta constante, según la ecuación (6.94) y considerando que en este intervalo $u^*(t)$. Mientras que para $t < T - \frac{1}{\gamma}$, $x^*(t)$ es creciente exponencial. Además, exigiendo la continuidad de la función, se obtiene:

$$x_0 e^{\gamma t} = C_1 \quad (6.95)$$

Gráficamente:

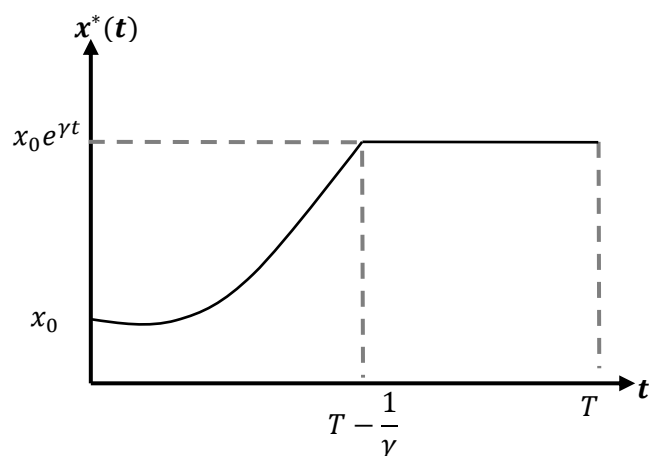


Figura 6.7. Representación gráfica de la variable de control $x(t)$ en el óptimo

6.8 Problemas Resueltos

Problema 6.1

Una mina ubicada en el extremo septentrional de Finlandia contiene una cantidad S_0 de un recurso mineral no renovable. La empresa encargada de su explotación estima que el beneficio neto, en todo instante de tiempo futuro, estará dado por la expresión $\ln(q(t))$, donde $q(t)$ son los recursos extraídos en t , y que la tasa de descuento asociada al proyecto será de $r > 0$. Por otro lado, la minera posee un contrato por labores de exploración con una empresa junior que significan un aumento del nivel de reservas estimado en $\beta S(t)$. Considere una capacidad de producción ilimitada, derechos de explotación a perpetuidad y que β es una constante conocida. Asuma que el nivel de recursos minerales se agota sólo en el infinito y que $r > \beta > 0$.

- Plantee el problema de optimización dinámica que le permite a la empresa productora encontrar su nivel de producción óptima en cada instante de tiempo con objeto de maximizar el VAN.
- Encuentre mediante control óptimo el nivel de producción óptimo en cada instante de tiempo.
- Grafique las funciones $q(t)$ y $S(t)$ en el óptimo explicando de qué forma dependen de los parámetros del problema β , S_0 y r .

Solución

El problema de optimización dinámica corresponde a maximizar el VAN encontrando el nivel óptimo de producción en cada de instante de tiempo, por lo tanto, el problema general estará determinado por:

$$\max_{q(t)} VAN$$

Dado que existe una tasa de descuento r , y una función de beneficio igual a la expresión $\ln(q(t))$, se tiene que el VAN del proyecto corresponderá a:

$$\int_0^{\infty} e^{-rt} \ln(q(t)) dt$$

Se asume que los límites de integración van desde un tiempo inicial igual a 0, hasta un LOM igual a infinito dado que los derechos de explotación fueron dados a perpetuidad.

Dado que la minera posee un contrato por labores de exploración con una empresa *junior*, el cambio en el nivel de reservas dependerá del nivel de producción $q(t)$ y del aumento del nivel de reservas estimado en $\beta S(t)$. Luego, la ecuación diferencial que caracteriza esta situación estará dada por:

$$\dot{S}(t) = -q(t) + \beta S(t)$$

En relación a las condiciones de borde, la mina contiene una cantidad inicial de recursos igual a S_0 . Además, se deberá asumir que el nivel de recursos minerales se agota sólo en el infinito, por lo tanto:

$$S(0) = S_0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = 0$$

Por lo tanto, el problema de optimización dinámica que deberá resolver la empresa productora para maximizar el VAN corresponde a:

$$\max_{q(t)} \int_0^{\infty} e^{-rt} \ln(q(t)) dt$$

s. a.

$$\dot{S}(t) = -q(t) + \beta S(t)$$

$$S(0) = S_0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = 0$$

Para resolver el problema se define el Hamiltoniano en valor corriente:

$$\hat{H}(S(t), q(t), v(t)) = \ln(q(t)) + v(t)(-q(t) + \beta S(t))$$

i) Condición del máximo:

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial q} = 0 \rightarrow \frac{1}{q(t)} - v(t) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \hat{H}}{\partial q^2} = \frac{-1}{q(t)^2} < 0 \text{ (máximo)}$$

ii) Ecuación de estado:

$$\dot{S}(t) = -q(t) + \beta S(t)$$

iii) Ecuación adjunta:

$$\dot{v}(t) = rv(t) - \beta v(t)$$

La ecuación adjunta representa una ecuación diferencial ordinaria para $v(t)$:

$$\frac{dv}{dt} = v(r - \beta)$$

$$\frac{dv}{v} = (r - \beta)dt$$

$$\int_0^t \frac{dv}{v} = \int_0^t (r - \beta)dt$$

$$v(t) = C_1 e^{(r-\beta)t}$$

Del principio del máximo se determina que:

$$\frac{1}{q(t)} - v(t) = 0$$

Por lo tanto:

$$q(t) = \frac{1}{v(t)}$$

$$q(t) = \frac{1}{C_1} e^{(\beta-r)t}$$

Luego, reemplazando $q(t)$ en la ecuación de estado se puede resolver la ecuación diferencial para $S(t)$:

$$\dot{S}(t) = -\frac{1}{C_1} e^{(\beta-r)t} + \beta S(t)$$

$$S(t) = \frac{e^{(\beta-r)t}}{rC_1} + C_2 e^{\beta t}$$

Para determinar las constantes utilizamos las condiciones de borde del problema:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{(\beta-r)t}}{rC_1} + C_2 e^{\beta t} = 0$$

Dado que $r > \beta > 0$, el primer término es 0 al evaluar en $t = \infty$. Luego C_2 debe ser 0 para que se cumpla la restricción. Por lo tanto:

$$C_2 = 0$$

Considerando la condición de borde inicial:

$$S(0) = S_0$$

$$\frac{1}{rC_1} = S_0$$

$$C_1 = \frac{1}{rS_0}$$

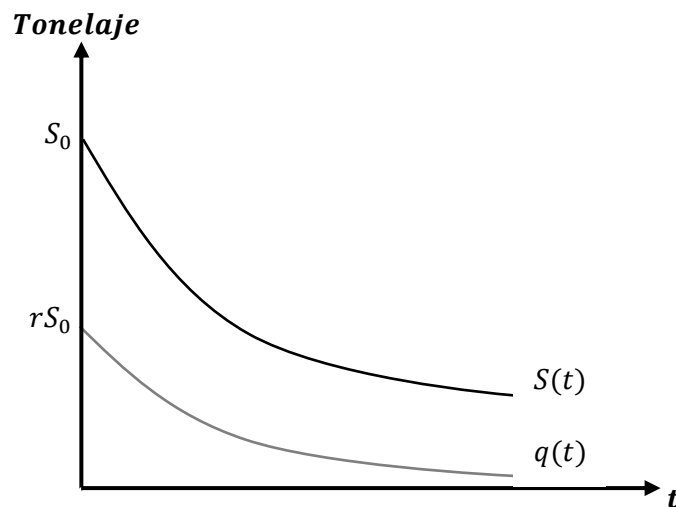
Finalmente, reemplazando C_1 y C_2 en $S(t)$, $q(t)$ y $v(t)$ se tiene que:

$$S(t) = e^{(\beta-r)t} S_0$$

$$q(t) = e^{(\beta-r)t} S_0 r$$

$$v(t) = \frac{e^{(r-\beta)t}}{rS_0}$$

En la figura siguiente se aprecia cómo varía $S(t)$ y $q(t)$ en el tiempo. Tanto la producción óptima como el nivel de reservas remanentes dependen de S_0 en el punto de inicio. La diferencia se encuentra en que el nivel de producción óptimo en $t = 0$ también depende de la tasa de descuento asociada al proyecto. En relación a la curva que siguen ambas funciones, estas decrecen exponencialmente dependiendo de la diferencia entre la constante β asociada al nivel de exploración y la tasa de descuento r .



Problema 6.2

Una mina explota un *commodity* mineral con recursos iniciales de S_0 . Se estima que el precio $p(t)$ será constante para todo instante de tiempo en el futuro, mientras que el costo unitario de producción será equivalente a $c_0 e^{\alpha t}$ (con $c_0, \alpha > 0$ y $p > c_0 e^{\alpha t}$). A su vez, la mina posee una capacidad de producción de $K > 0$. Se asume que al final de la operación no existen más recursos, es decir, se extrae todo y que r es la tasa de descuento.

a. Plantee el problema completo de optimización dinámica que permite a la empresa encontrar su nivel de producción óptimo en cada instante de tiempo con objeto de maximizar el VAN de la operación. El LOM de la operación se considera endógeno. Además, se pide definir la función objetivo, restricciones y las condiciones del problema.

b. Mediante control óptimo encuentre el nivel de producción óptimo en cada instante de tiempo. Calcule el LOM resultante como resultado del ejercicio de optimización dinámica.

Solución:

El problema anterior se define como:

$$\max_{q(t), T} \int_0^T e^{-rt} (pq - c_0 e^{\alpha t} q) dt$$

s. a.

$$\dot{S} = -q$$

$$S(0) = S_0$$

$$0 \leq q \leq K$$

Para resolver el problema a través de control óptimo primero se plantea el Hamiltoniano:

$$\hat{H}(s(t), q(t), v(t)) = pq(t) - c_0 e^{\alpha t} q(t) + v(t)((-q(t)))$$

Para poder determinar la solución se plantean las condiciones del principio del máximo:

i) Condición del máximo:

$$\text{Condición de primer orden: } \frac{\partial \hat{H}}{\partial q} = 0 = p - c_0 e^{\alpha t} - v(t)$$

Condición de segundo orden:

$$\frac{\partial^2 \hat{H}}{\partial u^2} = 0$$

ii) Ecuación de estado:

$$\dot{S} = \hat{H}_v = \frac{\partial \hat{H}}{\partial v} = -q$$

iii) Ecuación adjunta:

$$\dot{v} = rv - \hat{H}_S = rv$$

iv) Condiciones de transversalidad:

$$S(T) = 0$$

v) Condición inicial:

$$S(0) = S_0$$

De la condición *i*) se ve que la función que se quiere maximizar es lineal en q , por lo que se debe hacer un análisis para encontrar su solución, ya que su solución estará en los bordes.

$$q^* = \begin{cases} K & \text{si } (p - c_0 e^{\alpha t}) > 0 \\ 0 & \text{si } (p - c_0 e^{\alpha t}) < 0 \\ \text{Indiferencia si } & (p - c_0 e^{\alpha t}) = 0 \end{cases}$$

Del enunciado se obtiene que $(p - c_0 e^{at}) > 0$. Por lo tanto, la producción óptima será K , es decir, la mina operará a máxima capacidad de producción en cada instante de tiempo.

Para calcular el LOM de la mina se debe tener en consideración la tasa a la cual se consumen las reservas. De esta manera,

$$\int_0^t \dot{S} dt = - \int_0^t q dt$$

Resolviendo la integral se obtiene la cantidad de recursos remanentes en t :

$$S(t) = -qt + C$$

Ocupando las condiciones de borde:

$$S(0) = S_0 \text{ entonces } C = S_0$$

$$S(T) = 0 \text{ entonces } 0 = -qT + S_0$$

Recordando que $q = K$. Se obtiene, de la ecuación anterior, que:

$$T = \frac{S_0}{K}$$

Finalmente, la producción óptima q^* será igual a la tasa máxima de producción (K). Por otro lado, el LOM de la mina quedará determinado por las reservas y K de manera que $LOM = \frac{S_0}{K}$.

Problema 6.3

Una empresa minera de nitrato/yodo del norte de Chile ha decidido analizar su actual estrategia de exploración, consistente en la minimización de sus costos. El problema que actualmente resuelve la empresa está dado por la expresión:

$$\min_{q(t)} \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [S_1^2(t) + \frac{1}{8} q^2(t)] dt$$

s. a.

$$\dot{S}_1(t) = S_2(t)$$

$$\dot{S}_2(t) = -S_1(t) + q(t)$$

Donde $S_1(t)$ son los recursos de nitrato remanentes en t , $S_2(t)$ son los recursos de yodo remanentes en t , y $q(t)$ la extracción total instantánea en t .

Determine mediante control óptimo el nivel de producción óptimo que maximiza el VAN de la minera.

Solución:

Este problema corresponde a un problema de control óptimo en varias variables. Específicamente se tienen dos variables de estado: $S_1(t)$ que corresponde a los recursos de nitrato remanentes en t y $S_2(t)$ los recursos de yodo remanentes. La única diferencia en el planteamiento del problema será que existirá una variable de co-estado distinta para cada variable de estado.

Se define el Hamiltoniano:

$$H(S_1(t), S_2(t), q(t), v_1(t), v_2(t)) = \frac{S_1^2(t)}{2} + \frac{1}{16}q^2(t) + v_1(t) * S_2(t) + v_2(t)(-S_1(t) + q(t))$$

i) Condición del máximo:

$$\frac{\partial H}{\partial q} = 0 \rightarrow \frac{q(t)}{8} + v_2(t) = 0$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial q^2} = \frac{1}{8} > 0 \text{ (mínimo)}$$

ii) Ecuación de estado:

$$\dot{S}_1(t) = S_2(t)$$

$$\dot{S}_2(t) = -S_1(t) + q(t)$$

iii) Ecuación adjunta:

$$\dot{v}_1(t) = -S_1(t) + v_2(t)$$

$$\dot{v}_2(t) = -v_1(t)$$

De la condición del máximo se puede despejar $q(t)$:

$$q(t) = -8v_2(t)$$

Reemplazando $q(t)$ en la ecuación de estado para $S_2(t)$ se obtiene un sistema de 4 ecuaciones diferenciales para $S_1(t)$, $S_2(t)$, $v_1(t)$ y $v_2(t)$:

$$\dot{S}_1(t) = S_2(t)$$

$$\dot{S}_2(t) = -S_1(t) - 8v_2(t)$$

$$\dot{v}_1(t) = -S_1(t) + v_2(t)$$

$$\dot{v}_2(t) = -v_1(t)$$

Resolviendo el sistema anterior se obtienen las soluciones del sistema. Se define:

$$A(t) = \text{sen}(\sqrt{2} t)$$

$$B(t) = \text{cos}(\sqrt{2} t)$$

Luego, la solución del sistema corresponde a (se utilizó el software MAPLE para resolverlo):

$$S_1(t) = -\frac{1}{3}C_1e^{-t}A(t) - \frac{1}{3}C_1e^{-t}\sqrt{2}B(t) - \frac{1}{3}C_2e^{-t}B(t) + \frac{1}{3}C_2e^{-t}\sqrt{2}A(t) + \frac{1}{3}C_3e^tA(t) \\ - \frac{1}{3}C_3e^t\sqrt{2}B(t) + \frac{1}{3}C_4e^tB(t) + \frac{1}{3}C_4e^t\sqrt{2}A(t)$$

$$S_2(t) = C_1e^{-t}A(t) + C_2e^{-t}B(t) + C_3e^tA(t) + C_4e^tB(t)$$

$$v_1(t) = -\frac{1}{4}\sqrt{2}(e^tA(t)C_4 - e^tB(t)C_3 - e^{-t}A(t)C_2 + e^{-t}B(t)C_1)$$

$$v_2(t) = \frac{1}{6}C_1e^{-t}A(t) - \frac{1}{12}C_1e^{-t}\sqrt{2}B(t) - \frac{1}{6}C_2e^{-t}B(t) + \frac{1}{12}C_2e^{-t}\sqrt{2}A(t) - \frac{1}{6}C_3e^tA(t) \\ - \frac{1}{12}C_3e^t\sqrt{2}B(t) - \frac{1}{6}C_4e^tB(t) + \frac{1}{12}C_4e^t\sqrt{2}A(t)$$

Dado que $q(t) = -8v_2(t)$ se puede obtener $q(t)$.

$$q(t) = -\frac{4}{3}C_1e^{-t}A(t) + \frac{2}{3}C_1e^{-t}\sqrt{2}B(t) + \frac{4}{3}C_2e^{-t}B(t) - \frac{2}{3}C_2e^{-t}\sqrt{2}A(t) + \frac{4}{3}C_3e^tA(t) \\ + \frac{2}{3}C_3e^t\sqrt{2}B(t) + \frac{4}{3}C_4e^tB(t) - \frac{2}{3}C_4e^t\sqrt{2}A(t)$$

Problema 6.4

Una empresa minera desea resolver el siguiente problema de optimización para una de sus minas:

$$\max_{q(t), T} VAN = \int_0^T e^{-rt} \{p(q(t))q(t) - c(q(t))\} dt$$

s. a.

$$\dot{S}(t) = -q(t) + \varphi(t)$$

Donde $S(t)$ son los recursos minerales remanentes en t , $q(t)$ es la producción instantánea en t . $p(q(t))$ y $c(q(t))$ corresponden al precio del *commodity* mineral y el gasto de la empresa dado un nivel de producción $q(t)$. Se asume que dichas funciones son tales que $p(q(t)) > c(q(t))$ y $p_{qq} < c_{qq}$ para todo nivel de producción $q(t)$. El equipo de geólogos de la empresa estima que los recursos iniciales son iguales a $S_0 > 0$, pero que su trabajo de exploración sumará en cada instante de tiempo t una cantidad adicional $\varphi(t) \geq 0$. T es el LOM de la mina y r es la tasa de descuento de la empresa.

- Mediante control óptimo derive las ecuaciones y condiciones que debe satisfacer $S(t)$, $q(t)$ y T en el óptimo.
- Desarrolle las ecuaciones anteriores de tal forma de plantear la ecuación y condiciones que debe satisfacer $S(t)$. Discuta cómo derivaría T .
- Para el caso $p(q(t)) = a - bq(t)$, $c(q(t)) = \frac{1}{2}cq^2(t)$ (con a , b y c constantes positivas) y $\varphi(t) = Ae^{-kt}$. Resuelva explícitamente $S(t)$, $q(t)$ y T en el óptimo. ¿Qué condiciones debe satisfacer k para que T sea infinito en el óptimo?

Solución:

El problema de optimización dinámica que la empresa minera debe resolver corresponde a:

$$\max_{q(t), T} VAN = \int_0^T e^{-rt} \{p(q(t))q(t) - c(q(t))\} dt$$

s. a.

$$\dot{S}(t) = -q(t) + \varphi(t)$$

$$S(0) = S_0$$

$$S(T) = 0 \text{ y } p > c$$

Se define el Hamiltoniano en valor corriente:

$$\hat{H}(S(t), q(t), v(t)) = p(q)q - c(q) + v(-q + \varphi)$$

i. Condición del máximo:

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial q} = 0 \rightarrow p_q q + p(q) - c_q - v = 0$$

ii. Ecuación de estado:

$$\dot{S} = -q + \varphi$$

iii. Ecuación adjunta:

$$\dot{v} = rv - \frac{\partial \hat{H}}{\partial S}$$

Dado que $\hat{H}_S = 0$ la ecuación adjunta corresponde a una ecuación diferencial ordinaria para $v(t)$:

$$\dot{v} = rv$$

$$\frac{dv}{v} = r dt$$

$$\int_0^t \frac{dv}{v} = \int_0^t r dt$$

$$v(t) = v_0 e^{rt}$$

iv. Condición de transversalidad:

$$\hat{H}(T) = 0$$

Del principio del máximo se puede despejar $q(t)$:

$$p_q q + p(q) - c_q - v = 0$$

$$q(t) = \frac{-p(q) + c_q + v}{p_q}$$

De la ecuación adjunta se conoce $v(t)$, por lo tanto:

$$q(t) = \frac{-p(q) + c_q + v_0 e^{rt}}{p_q}$$

Luego, reemplazando $q(t)$ en la ecuación de estado se tiene una ecuación diferencial ordinaria para $S(t)$:

$$\dot{S}(t) = - \left[\frac{-p(q) + c_q + v_0 e^{rt}}{p_q} \right] + \varphi(t)$$

Luego, T se deriva de la ecuación de transversalidad.

Para el caso $p(q(t)) = a - bq(t)$, $c(q(t)) = \frac{1}{2}cq^2(t)$ (con a , b y c constantes positivas) y $\varphi(t) = Ae^{-kt}$ se tiene:

$$p_q = -b$$

$$c_q = cq$$

Reemplazando en la expresión para $q(t)$:

$$q(t) = \frac{bq - a + cq + v_0 e^{rt}}{-b}$$

$$q + \frac{bq}{b} + \frac{cq}{b} = \frac{a - v_0 e^{rt}}{b}$$

$$q \left(\frac{2b + c}{b} \right) = \frac{a - v_0 e^{rt}}{b}$$

$$q(t) = \frac{a - v_0 e^{rt}}{2b + c}$$

Reemplazando $q(t)$ y $\varphi(t)$ en la ecuación de estado:

$$\dot{S} = \frac{-a + v_0 e^{rt}}{2b + c} + Ae^{-kt}$$

Integrando la expresión anterior entre 0 y t se determina $S(t)$:

$$S(t) = \frac{v_0 e^{rt}}{(2b+c)r} - \frac{Ae^{-kt}}{k} - \frac{a}{2b+c}t + C_1$$

Para despejar v_0 y C_1 se utilizarán las condiciones de borde:

$$S(0) = S_0 = \frac{v_0}{(2b+c)r} - \frac{A}{k} + C_1$$

$$S(T) = 0 = \frac{v_0 e^{rT}}{(2b+c)r} - \frac{Ae^{-kT}}{k} - \frac{a}{2b+c}T + C_1$$

Las dos expresiones anteriores representan un sistema de dos ecuaciones para $v_0(T)$ y $C_1(T)$.

Resolviendo el sistema se obtienen las siguientes expresiones:

$$v_0(T) = \frac{(2b+c)r}{(1-e^{rT})} \left[S_0 - \frac{A(e^{-kT}-1)}{k} - \frac{a}{2b+c}T \right]$$

$$C_1(T) = \frac{Ae^{-kT}}{k} - \frac{e^{rT}}{(1-e^{rT})} \left[S_0 - \frac{A(e^{-kT}-1)}{k} \right] + \frac{a}{2b+c}T \left[1 + \frac{e^{rT}}{(1-e^{-rT})} \right]$$

Para determinar completamente $S(t)$ y $q(t)$ sólo falta determinar T . Considerando la condición de transversalidad:

$$\hat{H}(T) = p(q(T))q(T) - c(q(T)) + v(T)(-q(T) + \varphi(T)) = 0$$

$$[a - bq(T)]q(T) - \frac{1}{2}c[q^2(T)] + v_0 e^{rT}[-q(T) + \varphi(T)] = 0$$

Considerando que el recurso se consume completamente en T se tiene que:

$$\hat{S}(T) = 0$$

Por lo tanto, $q(T) = \varphi(T)$. Reemplazando en $\hat{H}(T)$ resulta:

$$[a - b\varphi(T)]\varphi(T) - \frac{1}{2}c[\varphi^2(T)] = 0$$

$$a\varphi(T) - b\varphi^2(T) - \frac{1}{2}c\varphi^2(T) = 0$$

$$\varphi(T) \left[a - \left(b + \frac{1}{2}c \right) \varphi(T) \right] = 0$$

Considerando el caso no trivial con $\varphi(T)$ distinto de 0:

$$a - \left(b + \frac{1}{2}c\right) \varphi(T) = 0$$

$$\varphi(T) = \frac{a}{\left(b + \frac{1}{2}c\right)}$$

Luego, con $\varphi(T) = Ae^{-kT}$ se puede despejar T :

$$Ae^{-kT} = \frac{a}{\left(b + \frac{1}{2}c\right)}$$

$$T = \frac{\ln(A) - \ln\left[\frac{a}{\left(b + \frac{1}{2}c\right)}\right]}{k}$$

Luego, con T quedan explícitamente determinadas $S(t)$ y $q(t)$.

Respecto a las condiciones que debe satisfacer k para que T sea infinito en el óptimo, se tiene que T será infinito si $\dot{S}(t) \geq 0$. Luego:

$$\frac{-a + v_0 e^{rt}}{2b + c} + Ae^{-kt} \geq 0$$

Despejando k se puede determinar la condición para que T sea infinito en el óptimo:

$$k \leq \frac{\left[-\ln\left(\frac{a - v_0 e^{rt}}{(2b + c)A}\right)\right]}{t}$$

Problema 6.5

Una empresa minera que opera en el norte de Chile ha descubierto un nuevo yacimiento de cobre con gran potencial económico. Sin embargo, este yacimiento se ubica cerca de una reserva natural y las comunidades cercanas han expresado su opinión de oponerse a que la empresa explote con algún método a cielo abierto, ya que podría impactar el paisaje y la integridad de la reserva. A pesar de esto, estudios de la empresa demuestran la viabilidad económica de un método subterráneo con relleno para explotar el yacimiento, que cumpliría con los requerimientos de las comunidades, pero significaría un costo adicional a la

planificación de extracción hecha por la empresa. Específicamente, los costos totales que se habían estimado para extraer el mineral por un método a cielo abierto seguían la función $C(q(t), S(t)) = \beta \frac{q(t)^2}{S(t)}$, donde $q(t)$ representa las reservas extraídas en cada periodo, $S(t)$ las reservas remanentes en el yacimiento en cada periodo y $\beta > 0$ una constante. Pero, con el nuevo método los costos totales de extracción se duplicarían, y como se necesita rellenar cada tonelada de mineral extraída, se debe comprar cemento a un costo C_0 por tonelada. Junto con esta información, los geólogos de la empresa determinan por medio de métodos geoestadísticos que, todas las reservas de este nuevo yacimiento suman un total de S_0 toneladas, las cuales no aumentarían en el tiempo. Con esto, la empresa debe planificar la extracción para el nuevo escenario, sabiendo que sus proyectos comúnmente se descuentan a una tasa igual a $r > 0$ y que estudios muestran que el precio del cobre se comportaría según $p(t) = Pe^{rt}$.

- a. Plantee el problema de optimización dinámica que le permite a la empresa encontrar su nivel de producción óptima en cada instante de tiempo, junto con la duración total de la operación.
- b. Encuentre mediante control óptimo las ecuaciones que permitan calcular el nivel de producción óptima, las reservas remanentes en cada periodo y el LOM de la mina.

Solución

El problema de optimización dinámica que busca desarrollar la empresa corresponde a maximizar el VAN, controlando el nivel óptimo de producción en cada de instante de tiempo, y buscando encontrar el LOM de la mina. Por lo tanto, el problema estará determinado por:

$$\max_{q(t), T} VAN$$

Este VAN corresponde a la suma de los beneficios en cada periodo, descontados por la tasa continua r de la empresa. En específico, los beneficios en cada periodo estarán determinados por: los ingresos generados por la venta a un precio $p(t)$ de cada tonelada extraída $q(t)$, menos los costos totales de explotación junto a el gasto por cada tonelada de cemento comprado (que en este caso es igual a cada tonelada de mineral extraído, debido al método de extracción). Por lo que el VAN queda expresado por:

$$VAN = \int_0^T e^{-rt} \left[P e^{rt} q(t) - \beta \frac{q(t)^2}{S(t)} - C_0 q(t) \right] dt$$

Los límites de integración van desde un tiempo inicial igual a 0, hasta un LOM desconocido igual a T , ya que es en este periodo es donde se generan los flujos para la empresa.

Dado que las reservas son finitas y es un recurso agotable, la maximización del VAN estará restringida a la siguiente ecuación de estado y condición inicial:

$$\dot{S}(t) = -q(t)$$

$$S(0) = S_0$$

Por lo tanto, el problema de optimización dinámica que deberá resolver la empresa productora para maximizar el VAN corresponde a:

$$Max_{q(t), T} \int_0^T e^{-rt} \left[P e^{rt} q(t) - \beta \frac{q(t)^2}{S(t)} - C_0 q(t) \right] dt$$

s. a.

$$\dot{S}(t) = -q(t)$$

$$S(0) = S_0$$

Para resolver el problema se define el Hamiltoniano en valor corriente:

$$\hat{H}(q(t), S(t), v(t)) = P e^{rt} q(t) - \beta \frac{q(t)^2}{S(t)} - C_0 q(t) + v(t)(-q(t))$$

i) Condición del máximo:

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial q} = 0 \rightarrow P e^{rt} - \frac{2\beta q}{S} - C_0 - v = 0$$

$$\frac{\partial^2 \hat{H}}{\partial q^2} = \frac{-2\beta}{S} < 0 \text{ (corresponde a un máximo)}$$

ii) Ecuación de estado:

$$\dot{S} = -q$$

iii) Ecuación adjunta:

$$\dot{v} = rv - \frac{\partial \hat{H}}{\partial s} = rv - \beta \frac{q^2}{s^2}$$

iv) Condición de transversalidad:

Debido a que el límite de la integral es una constante desconocida y una variable del problema, se utiliza la tercera condición explicada en este capítulo, correspondiente a:

$$\hat{H}(q(T), S(T), v(T)) = 0$$

$$Pe^{rT}q(T) - \beta \frac{q(T)^2}{S(T)} - C_0q(T) + v(T)(-q(T)) = 0$$

Esta ecuación es la que luego con permitirá calcular la variable T , cuando se conozcan las funciones $q(t)$ y $S(t)$.

Por último, la quinta condición del principio del máximo plantea la condición inicial:

$$S(0) = S_0$$

Ahora, ya que las ecuaciones anteriores permiten calcular la función $S(t)$ y T , conociendo la función $q(t)$, solo falta encontrar una ecuación que permita encontrar esta función.

Trabajando con la condición del máximo, se despeja la función $v(t)$ y se deriva la ecuación con respecto al tiempo, obteniendo:

$$\dot{v} = Pre^{rt} - \frac{2\beta}{S} \frac{d(q)}{dt} + 2\beta \frac{q}{S^2} \frac{d(S)}{dt}$$

Reemplazando la ecuación de estado en \dot{S} , y luego utilizando la ecuación \dot{v} , se obtiene la siguiente igualdad:

$$Pre^{rt} - \frac{2\beta}{S} \frac{d(q)}{dt} - 2\beta \frac{q^2}{S^2} = r(Pre^{rt} - 2\beta \frac{q}{S} - C_0) - \beta \frac{q^2}{S^2}$$

Por medio de la ecuación anterior es posible llegar a una ecuación diferencial para la función $q(t)$, en términos de los parámetros del problema y la función $s(t)$. Por lo que, al despejar la derivada de q con respecto del tiempo, se encuentra:

$$\dot{q} = -\frac{1}{2} \left[r \left(Pre^{rt} - 2\beta \frac{q}{s} - C_0 \right) + \frac{\beta q(t)^2}{s(t)^2} - Pre^{rt} \right] \frac{s}{\beta}$$

Por lo tanto, por medio de la resolución del sistema de ecuaciones, es posible encontrar el nivel de producción óptima, las reservas remanentes en cada periodo y el LOM de la mina.

Capítulo 7: Cálculo estocástico

El cálculo estocástico corresponde a una disciplina de las matemáticas relacionada con el cálculo infinitesimal de funciones no diferenciables. Su campo de aplicación es amplio e incluye, entre otras, a la ingeniería, economía, ciencias y finanzas. En esta última toma un rol fundamental, en particular a lo referido a la determinación de precios y derivados financieros. Su uso en estos ámbitos surge de la necesidad de incorporar incertidumbre en los modelos, permitiendo de esta forma reflejar de mejor manera lo que sucede en el mundo real. A partir de la introducción de la incertidumbre se hace necesario entonces el uso de la teoría de probabilidades.

En el ámbito de la minería, las empresas productoras se enfrentan cotidianamente a problemas con incertidumbre. Estas incertidumbres son tanto de carácter técnico como económico. Desde la ley de un mineral hasta su recuperación en la planta de procesos, al precio del *commodity* mineral explotado,³⁷ la falta de total certidumbre en las variables propias de la explotación, procesamiento y venta es inherente a la industria minera.

7.1 Reseña histórica

³⁷ En distintos estudios prácticos en minas y proyectos reales el autor ha podido comprobar que la variable que genera mayor incertidumbre en el VAN de una mina o proyecto es el precio del *commodity* principal que la operación explota. Así, por ejemplo, en el caso de las minas de cobre casi el 90% de la variabilidad del VAN puede ser explicada por el precio del cobre.

En 1827 el botánico escocés Robert Brown (1773-1858) examinaba partículas de polen en el microscopio y observó que cuando estas se encontraban suspendidas en agua se movían sin cesar en forma errática. Sin embargo, no pudo explicar el origen de dicho comportamiento, que se conoce hoy precisamente como Movimiento Browniano en su honor. A principios del siglo XX se descubrió que la forma en que se mueve el polen en un líquido se debe a las desproporcionalidades instantáneas en las fuerzas ejercidas por las pequeñas moléculas líquidas sobre cada unidad de polen (Venegas, 2008).

Los primeros intentos para modelar matemáticamente el Movimiento Browniano se remontan a tres orígenes distintos. El primero en plantear esto fue el astrónomo T. N. Thiele (1838-1910), quien mientras estudiaba series de tiempo en 1880 propuso una teoría matemática para el Movimiento Browniano. El segundo fue el matemático L. Bachelier (1870-1946), quien para su tesis doctoral (bajo la supervisión de H. Poincaré) modeló en 1900 el Movimiento Browniano mientras analizaba el comportamiento de la Bolsa de París. Bachelier se percató de que el ruido en el precio de mercado era un proceso sin memoria, donde los incrementos en el precio de las acciones debían ser independientes y normalmente distribuidos. Por su parte, en 1905 el físico Albert Einstein (1879-1955) escribió un artículo sobre mecánica estadística que proporcionaba una formulación matemática del Movimiento Browniano, de la cual se desprende que la dispersión promedio del desplazamiento de la partícula, en un tiempo dado, es proporcional a dicho tiempo. Este último trabajo se constituye como uno de los aportes más relevantes para la investigación futura de los procesos de este tipo. Finalmente, en 1923 N. Wiener (1894-1964) extendió el proceso anterior al mundo de las funciones continuas. Este trabajo permitió sentar así las bases matemáticas modernas de lo que hoy se conoce como Movimiento Browniano (Jarrow y Protter, 2004).

Uno de los campos donde el Movimiento Browniano cobra una importancia primordial corresponde a la teoría financiera desarrollada bajo ambientes estocásticos. De hecho, Venegas (2008) afirma que “el Movimiento Browniano ocupa el 99% en la teoría de valuación de portafolios y productos derivados en tiempo continuo; el 1% restante se refiere a detalles sin importancia”.

7.2 Procesos estocásticos

El concepto de procesos estocásticos es fundamental para el desarrollo de problemas en tiempo continuo en ambientes de riesgo o incertidumbre.³⁸ Un proceso estocástico corresponde a una colección o conjunto de variables aleatorias $\{X(t)\}$ que varían según cada instante de tiempo t . A cada elemento s del espacio muestral S de un experimento aleatorio E se le asigna una función $X(t, s)$, que corresponde a una variable aleatoria para cada instante t con $t \in T$ y $T \subset \mathbb{R}$. Por simplificación esta se denota de la forma $\{X(t), t \in T\}$.

Dependiendo de si T es considerado un conjunto de tiempo infinito numerable o no-numerable, el proceso estocástico se clasificará como discreto o continuo, respectivamente. En consecuencia, se dice que el proceso ocurre en tiempo discreto cuando se denotan los instantes de tiempo $t \in T$ de la forma $t = 0, 1, 2, \dots$. De lo contrario, si $t \geq 0$, entonces se dice que ocurre en tiempo continuo.

Análogamente, la clasificación de discreto o continuo se extiende al estado de un proceso estocástico, es decir, al conjunto de valores que pueden tomar las variables aleatorias $X(t)$. El proceso $\{X(t), t \in T\}$ posee un estado discreto cuando el espacio de estados es contable, o bien, un estado continuo cuando el espacio de estados es infinito incontable.

La función de distribución de orden n del proceso estocástico $\{X(t), t \in T\}$ corresponde a la función de distribución conjunta de las variables aleatorias:

$$F(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = P[X(t_1) \leq x_1, \dots, X(t_n) \leq x_n] \quad (7.1)$$

Un proceso estocástico posee incrementos independientes si se cumple que para todo $t_i \in T$, tal que $t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$, las variables aleatorias $X(t_4) - X(t_3)$ y $X(t_2) - X(t_1)$ son independientes. Además, posee incrementos estacionarios si se verifica que $X(t_2 + s) - X(t_1 + s)$ y $X(t_2) - X(t_1)$ poseen la misma función de probabilidades para todo s . Alternativamente, en este último caso se dice que las variables aleatorias están idénticamente distribuidas.

³⁸ Aunque el autor utiliza generalmente de forma distinta los conceptos de incertidumbre y riesgo (según se presentan en Knight, 1921) en este libro se utilizan indistintamente.

Un ejemplo clásico de proceso estocástico es el de una partícula que en un tiempo inicial $t = 0$ se encuentra en el origen ($X_0 = 0$), y avanza una unidad por instante de tiempo cada vez que se lanza una moneda, de modo que cuando se obtiene cara aumenta en una unidad y cuando se obtiene sello disminuye en una unidad. Sea X_n la variable aleatoria que denota la posición de la partícula luego de que se han efectuado N lanzamientos de una moneda. El proceso estocástico $\{X_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ es un caso particular de lo que se conoce como “caminata aleatoria”.

A continuación, se muestra otro caso particular que sigue la misma lógica que el ejemplo de la partícula. En tiempo discreto, el proceso estocástico puede representarse mediante:

$$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t \quad (7.2)$$

, donde el error ε_t sigue una distribución de probabilidad y, por lo tanto, es una variable aleatoria. En este caso:

$$\varepsilon_t = \begin{cases} -1 & \text{con probabilidad } 1/2 \\ 1 & \text{con probabilidad } 1/2 \end{cases} \quad (7.3)$$

El error ε_t puede tomar el valor 1 o -1 con igual probabilidad (lo que asume que la moneda es insesgada). Por lo tanto, la variable aleatoria en t aumentará o disminuirá en una unidad cada instante de tiempo, tal como se muestra en la Figura 7.1.

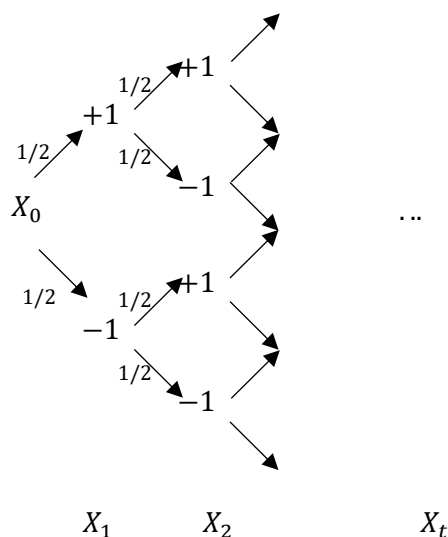


Figura 7.1. Esquema de un proceso estocástico del tipo $X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$

De esta manera, la variable puede aumentar una unidad en $t = 1$, en $t = 2$ disminuir otra y así, sucesivamente. El camino que sigue así la variable X_t es una realización posible de todos los caminos que pudieran construirse. Además:

$$E(\varepsilon_t) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot (-1) = 0 \quad (7.4)$$

$$E(X_t) = X_{t-1} \quad (7.5)$$

(7.4) establece que el valor esperado del error es cero, lo que implica que el de la variable aleatoria es el mismo valor que tiene en el instante actual, lo que es equivalente a (7.5). En otras palabras, la variable que sigue una caminata aleatoria permanecerá en valor esperado en la misma posición independientemente de cuán lejos se genere el pronóstico.

Dado que en promedio el error es cero, el proceso estocástico será tal que el mejor pronóstico para el futuro es el valor que toma la variable hoy. Si el precio de un *commodity* mineral siguiera esta distribución de probabilidad, el mejor pronóstico para el futuro coincidiría con el valor actual. Es frecuente que los pronósticos concuerden con estos valores. Sin embargo, el precio de la mayoría de los *commodities* minerales no sigue este proceso, pues no tiene la misma probabilidad de subir que de bajar. Además, depende de la etapa del ciclo económico en que se encuentre.

7.2.1 Proceso de Markov

Un proceso estocástico $\{X(t), t \in T\}$ es de Markov (o simplemente Markoviano) si:

$$P[X(t_{n+1}) | (X(t_n), X(t_{n-1}), \dots, X(t_1))] = P[X(t_{n+1}) | X(t_n)] \quad (7.6)$$

Es decir, la probabilidad de que el proceso pase de un estado x_{t_n} a un estado $x_{t_{n+1}}$ no depende del camino que haya seguido x_{t_n} desde un estado inicial x_{t_0} , sino que solo de la posición inmediatamente anterior a dar el salto (x_{t_n}). La distribución de probabilidad de todos los valores futuros del proceso dependerá así únicamente de su valor actual y no se ve afectada por sus valores pasados, ni por ninguna otra información del presente. Esto se observa en la ecuación (7.6). Por lo tanto, el valor actual del proceso es la única información necesaria para realizar la mejor estimación de su valor futuro. Se suele decir que la propiedad de Markov es aquella con la que ciertos procesos estocásticos “carecen de memoria”. La caminata aleatoria

corresponde así a un proceso de Markov, donde la manera en la que se llegó al valor presente es irrelevante para el futuro.

Una cadena de Markov corresponde a un proceso en tiempo y estado discreto que posee la propiedad Markoviana. Se habla de una cadena de Markov en tiempo continuo cuando en un proceso estocástico Markoviano solo el estado es discreto.

Una característica esencial de las cadenas de Markov en tiempo continuo es que el tiempo en que se permanece en un estado posee una distribución exponencial (que garantiza la ausencia de memoria del proceso). Dada esta base, y el hecho de que la suma de variables aleatorias exponenciales independientes (con los mismos parámetros) sigue una distribución Gamma, es posible derivar la distribución de probabilidades en el tiempo.

7.2.2 Proceso de Poisson

Sea $N(t)$ el número de eventos que ocurren en el intervalo $[0, t]$. El proceso estocástico $\{N(t), t \geq 0\}$ se denomina proceso de conteo y posee las siguientes propiedades:

- i) $N(t)$ es un número entero no negativo.
- ii) $N(t_2) - N(t_1) \geq 0$ si $t_2 > t_1 \geq 0$. Por lo tanto, la función $N(t)$ es no-decreciente.
- iii) $N(t_2) - N(t_1)$ es el número de eventos que ocurren en el intervalo (t_1, t_2) .

La función de densidad de probabilidad de la distribución de Poisson es:

$$P(N(t) = n) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda t}}{n!} ; n = 0, 1, 2 \dots \quad (7.7)$$

De esta forma, un proceso de Poisson con tasa $\lambda (> 0)$ es un proceso de conteo $\{N(t), t \geq 0\}$ que tiene incrementos independientes, que cumple además con $N(0) = 0$ y:

$$N(\tau + t) - N(\tau) \sim Poisson(\lambda t) ; \forall \tau, t \geq 0 \quad (7.8)$$

- k es el número de ocurrencias del evento o fenómeno.
- λ es un parámetro positivo que representa el número de veces que se espera que ocurra el fenómeno durante un intervalo dado.

El siguiente ejemplo se encuentra en Mascareñas (2016). Sea la variable N_t , que indica el número de saltos que pueden ocurrir en un proceso aleatorio de manera imprevista hasta el momento t . Los incrementos de N_t pueden tomar solo dos posibles valores:

$$N_t = \begin{cases} 0 & \text{es decir no hay salto y este valor tiene una gran probabilidad de ocurrencia} \\ 1 & \text{es decir, hay un salto, pero su probabilidad de ocurrencia es muy pequeña} \end{cases}$$

- 1) Durante un pequeño intervalo de tiempo (Δt), en el mejor de los casos puede ocurrir un suceso con probabilidad cercana a 1.
- 2) La información existente en el momento t no sirve para predecir si se va a producir un suceso en el siguiente instante ($t + \Delta t$). Es decir, el proceso “carece de memoria”.
- 3) Los sucesos ocurren a una tasa constante λ .

7.3 Proceso de Wiener

7.3.1 Motivación

A continuación, se presenta un ejemplo desarrollado por Lefebvre (2000). Una caminata aleatoria simétrica consiste en una cadena de Markov en tiempo discreto $\{X_n, n = 0, 1, \dots\}$, donde el espacio de estados corresponde a los enteros $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ y las probabilidades de transición de un estado a otro están dadas por:

$$p_{i,i+1} = p_{i,i-1} = \frac{1}{2}; \forall i \in \mathbb{Z} \quad (7.9)$$

Como se ve en (7.9), este caso es equivalente al caso que se expuso en el que una partícula se desplaza unitariamente. Este proceso representa, por ejemplo, el lanzamiento de una moneda.

A partir de este caso se puede obtener lo que se conoce como Movimiento Browniano, que surge al acelerar la caminata aleatoria. Los desplazamientos ocurren cada δ unidades de tiempo avanzando una distancia ε , tal que si estos valores se toman tan pequeños como sea posible, es decir, en forma diferencial, se tendrá que la partícula se mueve continuamente al desplazarse una distancia infinitesimal. Esto permite dar cumplimiento a una de las características principales del proceso de Wiener, pues este se caracteriza por ser un proceso de tiempo y estado continuo.

Sea $X(t)$ la variable que denota la posición de la partícula en un instante t y N el número de desplazamientos hacia arriba (+) que ha efectuado la partícula luego de haber realizado n desplazamientos en total. Suponiendo que en $t = 0$ la partícula se encuentra en el origen, entonces $X(t) = 0$. La posición de la partícula luego de $n\delta$ unidades de tiempo está dada por:

$$X(n\delta) = (2N - n)\varepsilon \quad (7.10)$$

Si la partícula solo se hubiese desplazado hacia arriba $N = n$, entonces la posición de ella sería $X(n\delta) = n\varepsilon$. En caso de que solo se hubiese desplazado hacia abajo $N = 0$, se tendría que $X(n\delta) = -n\varepsilon$.

Dada la analogía con el caso del lanzamiento de la moneda, cada lanzamiento es pues independiente y puede expresarse mediante el uso de la distribución binomial, cuya función de probabilidad corresponde a:

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}, \quad \forall x = \{0, 1, 2, \dots, n\} \quad (7.11)$$

No es difícil demostrar que la media y varianza de la distribución están dadas por:

$$E[X] = np \quad (7.12)$$

$$Var[X] = np(1-p) \quad (7.13)$$

En este caso se tiene que la variable aleatoria N sigue una distribución binomial, con $p = \frac{1}{2}$.

Luego:

$$E[X(n\delta)] = (2E[N] - n)\varepsilon = \left(2 \cdot \frac{n}{2} - n\right)\varepsilon = 0 \quad (7.14)$$

$$Var[X(n\delta)] = 4\varepsilon^2 Var[N] = 4\varepsilon^2 \frac{n}{4} = n\varepsilon^2 \quad (7.15)$$

Si $\delta \rightarrow 0$, entonces la caminata aleatoria pasa a ser un proceso de tipo continuo y la varianza queda expresada por:

$$Var[X(t)]|_{t=n\delta} = \frac{t}{\delta} \varepsilon^2 \quad (7.16)$$

Se deduce que $\varepsilon \rightarrow 0$ al mismo tiempo que $\delta \rightarrow 0$. Si no fuera así la varianza tendería a infinito y, en consecuencia, ε y δ tenderían a cero a la misma velocidad. Dada una constante $\sigma > 0$, esto último puede formularse de acuerdo a:

$$\varepsilon^2 = \sigma^2 \delta \leftrightarrow \varepsilon = \sigma \sqrt{\delta} \quad (7.17)$$

En base a lo obtenido antes, ya que se está trabajando con $\delta \rightarrow 0$ y $\varepsilon \rightarrow 0$, el proceso pasa a ser de estado y tiempo continuo. Su media y varianza son:

$$E[X(t)] = 0 \quad (7.18)$$

$$Var[X(t)] \rightarrow \sigma^2 t, \forall t \geq 0 \quad (7.19)$$

Si se escoge $\varepsilon = \sigma \sqrt{\delta}$, entonces $Var[X(t)] = \sigma^2 t, \forall t \geq 0$. Esto se cumplirá para todo valor positivo de δ .

Para encontrar la distribución que sigue la caminata aleatoria simétrica se aplicará el teorema de Moivre-Laplace. Este corresponde a una aplicación del teorema del límite central y permite realizar una aproximación normal a la distribución binomial:

$$P[B(n, p) = k] \sim f_z(k) \quad (7.20)$$

donde f_z corresponde a la función de densidad de la distribución normal, donde Z distribuye normal con media y varianza equivalente a la de la distribución binomial.

Aplicando lo anterior para el caso de la caminata aleatoria simétrica, se tiene que:

$$P[X(n\delta) \leq x] \approx P[N(0, n\varepsilon^2) \leq x] \quad (7.21)$$

De lo que se deduce que para $Z(t)$ tal que:

$$Z(t) = \lim_{\delta \rightarrow 0} X(t) \quad (7.22)$$

la aproximación según el teorema de Moivre-Laplace entrega:

$$P[W(t) \leq x] \approx P[N(0, \sigma^2 t) \leq x] \quad (7.23)$$

Finalmente, se obtiene que la variable aleatoria $Z(t)$ sigue una distribución normal con media cero y varianza $\sigma^2 t$, característica esencial del proceso de Wiener. A esto se suma que la

caminata aleatoria corresponde a un proceso con incrementos independientes y estacionarios y, por tanto, $Z(t)$ también cumple con estas dos características.

7.3.2 Definición del proceso de Wiener

El proceso de Wiener no es más entonces que un proceso de Markov. Un proceso de Wiener, a pesar de tener un movimiento errático e impredecible, siguen ciertas reglas subyacentes:

- Corresponde a un proceso de Markov: para conocer el movimiento de la partícula de polen es necesario conocer la posición actual, sin importar el camino que tomó para llegar a ella.
- Tiene incrementos independientes: el proceso de Wiener cumple con la siguiente relación:

$$E(\varepsilon_t \times \varepsilon_{t-1}) = 0; \forall t \quad (7.24)$$

Lo anterior establece que la distribución de probabilidades que sigue el error en $t - 1$ es distinta a la que se tiene en t , es decir, son independientes entre sí. Por lo tanto, no existe correlación entre las variables desde un punto de vista estadístico. Otra forma de explicar lo anterior es que, si la variable ha estado moviéndose aleatoriamente, el paso siguiente no depende de lo que sucedió en el instante anterior.

- Error distribuye normal: la posición en el siguiente período de tiempo estará, con mayor probabilidad, en un valor cercano al actual. Por ende, es menos probable llegar a un número extremo.

Si $z(t)$ sigue un proceso de Wiener, entonces cualquier variación en z (es decir, Δz) que tenga lugar durante un intervalo temporal Δt cumplirá las siguientes condiciones:

$$\Delta z = \varepsilon_t \sqrt{\Delta t}, \text{ donde } \varepsilon_t \sim \text{Normal}(0,1) \quad (7.25)$$

$$E(\varepsilon_t \times \varepsilon_s) = 0, \forall t \neq s \quad (7.26)$$

La condición de que el proceso de Wiener distribuya normal se asocia a la propiedad de incrementos independientes, relación que es explicada de la siguiente forma:

“El hecho de que un proceso de Wiener tenga incrementos independientes implica que se puede considerarlo como una versión en tiempo continuo de un recorrido aleatorio. A fin de cuentas, el proceso de Wiener se obtiene como el límite de la suma de variables aleatorias independientes distribuidas idénticamente; por ello, tiene una distribución normal.” (Mascareñas, 2016)

Cuando se está en el límite, es decir, cuando $\Delta t \rightarrow 0$, se obtiene que el valor del diferencial del proceso en tiempo continuo es $dz = \varepsilon_t \sqrt{dt}$. Esta igualdad establece que, al moverse en un infinitesimal un proceso de Wiener, la “distancia” recorrida es proporcional al error y a la raíz cuadrada del tiempo. Es necesario notar que las metodologías de derivación e integración cambian con respecto a lo conocido en el cálculo tradicional, ya que para este tipo de matemática se trabaja con \sqrt{dt} , mientras que antes en cálculo determinístico se trabaja con dt .

dz se puede considerar como el “ladrillo mínimo” del cálculo estocástico, aunque no es la única forma diferencial que existe. Esta base permite construir todas las “formas” que se quieran, por ejemplo: el precio del cobre, del oro o de las acciones, las que se pueden modelar en base a funciones de dicha unidad.

Conocida la forma del proceso de Wiener, es necesario analizar ciertas propiedades que permitan describir esta variable aleatoria y así poder definirla. Las más importantes corresponden a la media y a la varianza. Calculando el valor esperado de dz , se tiene que:

$$E(dz) = E(\varepsilon_t)E(\sqrt{dt}) = 0\sqrt{dt} = 0 \quad (7.27)$$

El resultado de la ecuación se basa en que el valor esperado de \sqrt{dt} es el mismo valor ya que no posee incertidumbre, mientras que el valor esperado de ε_t es cero, debido a que distribuye normal (0,1).

En cuanto a la varianza se tiene a su vez que:

$$Var(dz) = Var(\varepsilon_t \sqrt{dt}) = Var(\varepsilon_t)dt = 1dt = dt \quad (7.28)$$

RECUADRO 7.1

OPERACIONES ESTADÍSTICAS BÁSICAS

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$

$$Var(aX + bY) = a^2Var(X) + b^2Var(Y) + 2abCov(X, Y)$$

$$Cov(aX, bY) = abCov(X, Y)$$

$$Cov(X, Y) = E[(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})]$$

$$Corr(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}$$

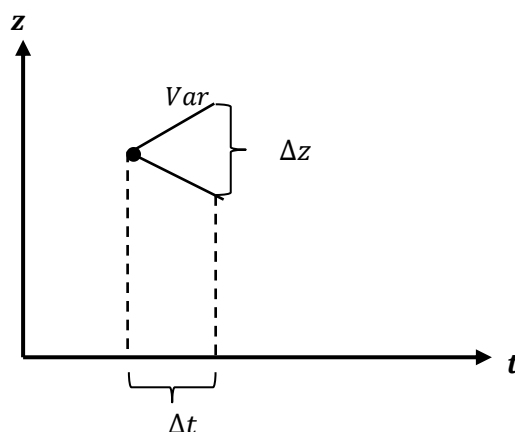


Figura 7.2. Cambio en la varianza de un proceso de Wiener con respecto al tiempo

En este caso dt se trabaja como una constante, ya que no posee incerteza, mientras que la varianza de ε_t es 1 debido a que distribuye normal $(0,1)$.

Por tanto, el resultado obtenido establece que mientras mayor sea el tiempo entre la posición actual y una futura, mayor será la varianza, tal como se puede apreciar en la Figura 7.2. La varianza de los cambios en el proceso de Wiener crece linealmente con el horizonte temporal, de manera que la mayoría de los caminos posibles están contenidos entre estos rangos. Junto a ello, se tiene además que, en la distribución del proceso de Wiener, dz distribuye normal $(0, \sqrt{dt})$.

De acuerdo a lo ya descrito, en un proceso de Wiener mientras más a futuro se realice el pronóstico, mayor será el error del pronóstico, lo que se aprecia en la Figura 7.3. Sin embargo,

en términos de valor esperado, el mejor pronóstico para el futuro es permanecer en la posición actual, debido a que la media de la variable es cero.

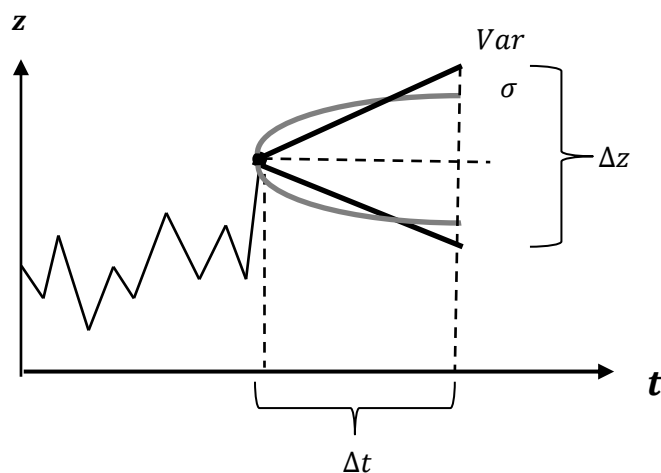


Figura 7.3. Relación entre varianza, desviación estándar σ y valor esperado de un proceso de Wiener para efectos de pronóstico

Es importante destacar que el crecimiento de la desviación estándar no es ni exponencial ni lineal, sino que crece en función de \sqrt{dt} , tal como se aprecia en la Figura 7.3. Ya que a largo plazo el proceso de Wiener tenderá a infinito, este no será estacionario.

Por ejemplo, si una variable sigue un proceso de Wiener y toma hoy un valor de 3, dentro de un año su valor estará normalmente distribuido con una media de 2 y una desviación estándar de 1. De esta manera, si $t = 10$, entonces se pueden establecer los siguientes intervalos de confianza:

- Para σ : con 66% de probabilidad la variable se encontrará entre $3 \pm \sqrt{1} = [2,4]$.
- Para 2σ : con 95% de probabilidad la variable se encontrará entre $3 \pm 2\sqrt{1} = [1,5]$.
- Para 3σ : con 99% de probabilidad la variable se encontrará entre $3 \pm 3\sqrt{1} = [0,6]$.

7.4 Movimiento Browniano con *drift*

Una variable aleatoria $x(t)$ corresponde a un Movimiento Browniano con *drift* α si satisface:

$$dx = \alpha dt + \sigma dz \quad (7.29)$$

donde dz corresponde a un diferencial de Wiener, con α y σ constantes. Esta es la generalización más simple de un Movimiento Browniano.³⁹

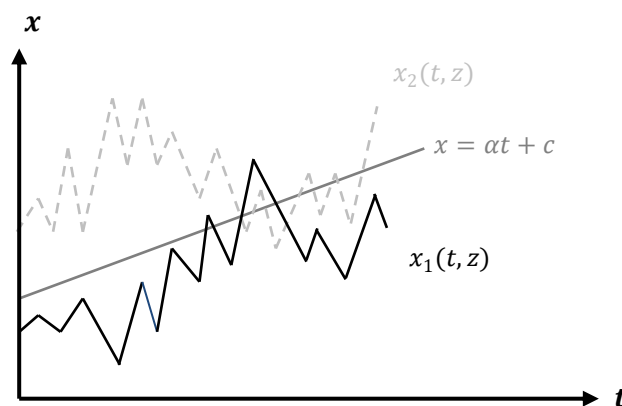


Figura 7.4. Comparación de posibles caminos para la variable aleatoria con el recorrido correspondiente a la parte determinística

En la ecuación (7.29) se puede ver que si $\sigma = 0$ entonces $x(t)$ describirá una recta, ya que corresponde a la solución de la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$dx = \alpha dt \quad (7.30)$$

Cuya solución es precisamente:

$$x(t) = x_0 + \alpha t \quad (7.31)$$

En el caso en que $\sigma \neq 0$ se tendrá que $x(t, z)$ es en general función de t y z , y, aunque tratará de comportarse como la ecuación lineal (en un sentido que se expondrá más adelante), considerará un error dado por el diferencial de Wiener. Este error hace que su camino varíe, tal como se puede ver en la Figura 7.4. Lo anterior se conoce comúnmente como “ruido”.

De esta manera, se puede entender la ecuación (7.29) como una ecuación diferencial estocástica (EDE o SDE, por sus siglas en inglés *stochastic differential equation*). Si se desea obtener el

³⁹ Es importante señalar que en algunos textos dz se denota como dB o dW .

valor de $x(t, z)$ para un cierto instante de tiempo no se puede entregar una ubicación precisa, pero sí se puede conocer su distribución de probabilidad.

Dado que $x(t, z)$ es un proceso estocástico, es posible estudiar las mismas propiedades analizadas en el caso del proceso de Wiener. Así, en el caso de la media:

$$E(dx) = E(\alpha dt + \sigma dz) = \alpha E(dt) + \sigma E(dz) = \alpha dt + 0 = \alpha dt \quad (7.32)$$

Mientras que para la varianza:

$$Var(dx) = Var(\alpha dt + \sigma dz) = Var(\alpha dt) + Var(\sigma dz) = 0 + \sigma^2 dz = \sigma^2 dz \quad (7.33)$$

Por lo tanto, en el caso del Movimiento Browniano con *drift* el valor esperado tiene un crecimiento lineal dado por α , mientras que su varianza es de carácter cuadrático y depende del valor de σ^2 . Ello lleva a que un posible camino de $x(t)$ esté en torno a αdt y sea limitado por $\sigma^2 dz$, tal como se ve en la Figura 7.5.

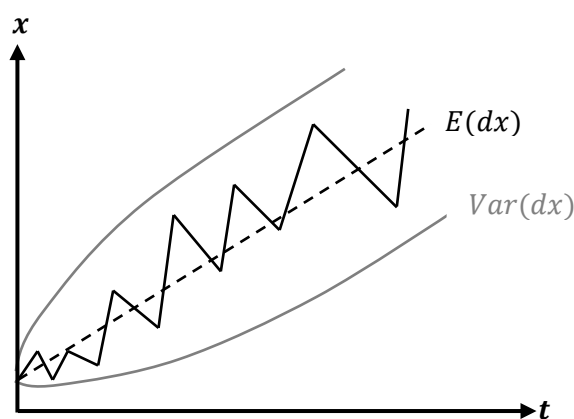


Figura 7.5. Rango en el que se mueve la trayectoria de x

En general la curva descrita por $x(t, z)$ es continua, pero no suave, ya que presenta una serie infinita de saltos. Otra forma de apreciar esto es dividiendo la ecuación (7.29) a ambos lados por dt . En este caso se tiene que:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha + \sigma \frac{dz}{dt} = \alpha + \sigma \frac{\varepsilon_t \sqrt{dt}}{dt} = \alpha + \sigma \frac{\varepsilon_t}{\sqrt{dt}} \quad (7.34)$$

Puesto que $\lim_{dt \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{dt}} = \infty$ es claro que la pendiente de la curva $x(t)$ no existe en ningún instante de tiempo, por lo que el Movimiento Browniano con *drift* no es diferenciable en ningún instante de tiempo a pesar de ser una curva continua en todo instante de tiempo.

Como ejemplo de una curva de esta naturaleza se puede tomar un gráfico de la evolución del precio del cobre en base diaria, como se aprecia en la Figura 7.6. Como queda en evidencia, esta curva siendo continua no es derivable en ningún momento.

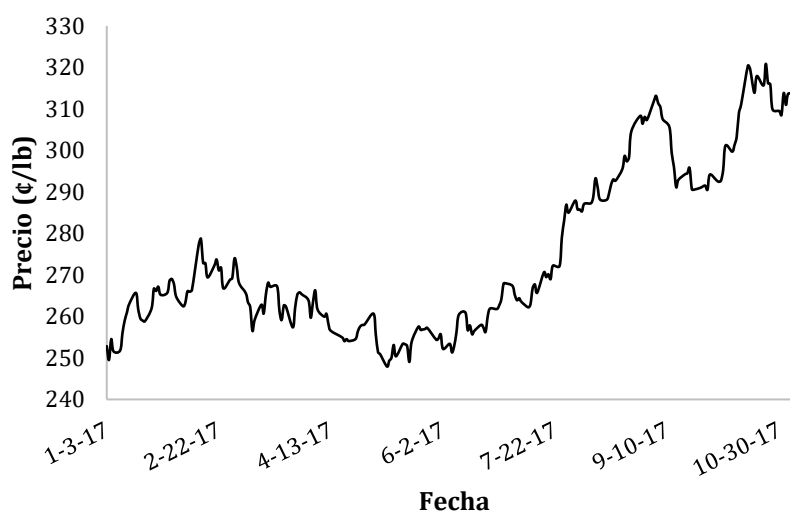


Figura 7.6. Variación del precio del cobre refinado entre 3 de enero y 9 de noviembre de 2017

Fuente: Bolsa de Metales de Londres

7.5 Cálculo estocástico de Itô

Como se mencionó anteriormente, una de las primeras aplicaciones del proceso de Wiener surge en 1900 con la publicación de la tesis *Théorie de la spéculation*, de M. L. Bachelier; tesis en la que el autor modela el precio de las acciones de la Bolsa de París. Aunque obviamente desconocido para Bachelier, su proceso coincide con lo que hoy se denomina proceso de Wiener.

El proceso $\{z(t), t \geq 0\}$ fue utilizado para describir las fluctuaciones de mercado que afectaban el precio $x(t)$ de una acción. Bachelier asumió que los incrementos infinitesimales de precio $dx(t)$ eran proporcionales a los incrementos $dz(t)$ del proceso de Wiener:

$$dx(t) = \sigma dz(t) \quad (7.35)$$

donde σ es una constante positiva. En consecuencia, el valor de una acción en el instante de tiempo t , dado un precio inicial $x(0) = x$, es el siguiente:

$$x(t) = x + \sigma z(t) \quad (7.36)$$

Sin embargo, esta proposición original no excluye el caso en el que el precio de la acción $x(t)$ pudiese tomar valores negativos, lo que evidentemente no tiene sentido. En el corto plazo, sin embargo, la fórmula es aplicable pues la probabilidad de que el precio sea negativo es despreciable. No obstante, a medida que t crece, también lo hace la probabilidad de que $x(t)$ sea negativo, alejándose de este modo de la realidad.

Con objeto de subsanar esta falencia, Bachelier observó que era el precio relativo de una acción $\frac{dx(t)}{x(t)}$ el que reaccionaba a las variaciones de mercado, de modo que la nueva relación quedaba así expresada mediante:

$$dx(t) = \sigma x(t) dz(t) \quad (7.37)$$

En términos matemáticos (7.37) corresponde también a una ecuación diferencial estocástica. En la década de 1940 el matemático japonés Kiyoshi Itô (1915-2008) derivó una solución a este problema. Para ello, reescribió el problema original en términos de ecuaciones que involucran integrales:

$$x(t) = x + \sigma \int_0^t x(t) dz(t) \quad (7.38)$$

La ecuación (7.38) se denomina integral estocástica de Itô y tiene la siguiente solución:

$$x(t) = x e^{z(t)} e^{-\frac{t}{2}} \quad (7.39)$$

7.6 Proceso de Itô

Itô desarrolló los procesos estocásticos que llevan su nombre y que cumplen con una propiedad conocida como el Lema de Itô (que se estudiará en la Sección 7.7). En general, un proceso de Itô, $x(t)$, sigue la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)dz \quad (7.40)$$

, donde dz corresponde a un diferencial de Wiener. Este es el proceso más general que se puede construir con el “ladrillo” básico dz y constituye la base del cálculo estocástico. En este, a y b son funciones que dependen del tiempo y del valor de la propia variable x . Es posible demostrar que la ecuación (7.40) representa a cualquier función estocástica continua no diferenciable.

En cuanto a propiedades de un proceso de Itô se tiene que el valor esperado corresponde a:

$$E(dx) = E(a(x, t)dt) + E(b(x, t)dz) = a(x, t)dt \quad (7.41)$$

, mientras que la varianza viene dada por:

$$Var(dx) = Var(a(x, t)dt) + Var(b(x, t)dz) = b^2(x, t)dt \quad (7.42)$$

De (7.41) y (7.42), a pesar de que un proceso de Itô posee tanto una componente determinística como una estocástica, las propiedades estadísticas base calculadas pertenecen ambas al ámbito determinístico.

Un ejemplo de un proceso de Itô es el que se muestra en la siguiente ecuación:

$$dx = -x^2 e^{-t} dt + 2xdz \quad (7.43)$$

Si el término que acompaña a dz en la ecuación anterior fuese cero, se tendría una ecuación diferencial ordinaria, que se podría resolver con el método de separación de variables. Sin embargo, este problema tiene como solución un proceso estocástico de la forma $x(t, z)$, es decir, posee una componente determinística y otra aleatoria.

Es necesario hacer notar que ejemplos como este y, por ende, su solución, son aplicables y se pueden encontrar de manera frecuente dentro del mundo de la minería. El precio de los *commodities* minerales, los costos de explotación (que en general presentan una correlación positiva con el precio), el CAPEX o los recursos del depósito mismo no se pueden describir de manera completamente determinística en la realidad.

En las siguientes subsecciones se estudian casos particulares de procesos de Itô.

7.6.1 Movimiento Geométrico Browniano

El Movimiento Geométrico Browniano es un proceso estocástico tal que $x(t)$ satisface la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dx = \alpha x dt + \sigma x dz \quad (7.44)$$

En este caso se tiene que $a(t, x) = \alpha x$ y $b(t, x) = \sigma x$. Se debe considerar que x no puede tomar valores negativos por propiedad del proceso. Dividiendo la ecuación (7.44) por x (para lo cual se asume que $x > 0$):

$$\frac{dx}{x} = \alpha dt + \sigma dz \quad (7.45)$$

En la ecuación (7.45) el cociente $\frac{dx}{x}$ corresponde a una tasa de retorno,⁴⁰ la que gráficamente puede representarse según la Figura 7.7.

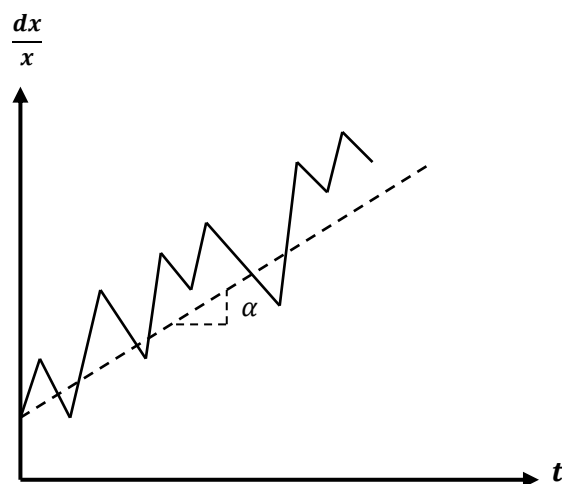


Figura 7.7. Gráfico que compara la tasa de retorno de la parte determinística con la del proceso estocástico

En cuanto al lado derecho de la ecuación (7.45), se tiene que el retorno viene dado por dos términos. En primer lugar, αdt corresponde al *drift* o pendiente y establece que el retorno tiene un valor esperado en el tiempo. Este crece a una tasa α , también conocida como tasa de rendimiento esperada por unidad de tiempo del activo. En segundo lugar, σdz es la componente estocástica, la cual distorsiona el valor esperado por medio de saltos en el tiempo, donde a σ se le conoce comúnmente como *volatilidad*.

⁴⁰ Si se toma $\Delta x/x$, que es lo mismo que $(x(t+1) - x(t))/x(t)$, se tiene el retorno de x entre t y $t+1$. Por ejemplo, si $x(t)$ corresponde al precio de una acción, $\Delta x/x$ es el retorno de dicho activo entre los instantes t y $t+1$.

Si $\sigma = 0$, es decir, si solo existiera la componente determinística, en forma gráfica se obtendría la curva que se muestra en la Figura 7.8. Es posible derivar matemáticamente dicha curva mediante:

$$\frac{dx}{x} = \alpha dt \quad / \int \quad (7.46)$$

$$\log\left(\frac{x_t}{x_0}\right) = \alpha(t - t_0) \quad (7.47)$$

$$x_t = x_0 e^{\alpha(t-t_0)} \quad (7.48)$$

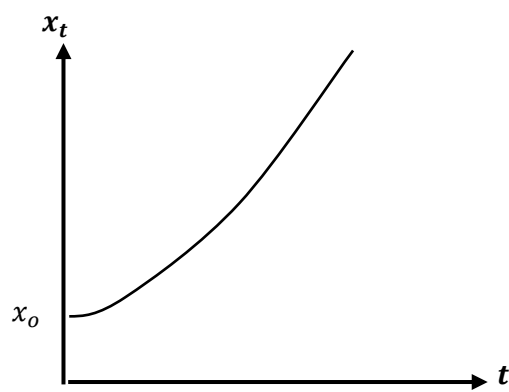


Figura 7.8. Gráfica de la solución determinística de un proceso con Movimiento Geométrico Browniano

En la literatura financiera se ha demostrado que, en general, los activos financieros satisfacen relativamente bien la ecuación de Movimiento Geométrico Browniano (MGB). Al estudiar el precio de las acciones, por ejemplo, se ve que el precio de ellas se comporta como un MGB, aunque no de forma perfecta (sí es una buena aproximación de primer orden).

En el ámbito financiero la ecuación del MGB se utiliza generalmente para modelar el comportamiento esperado del precio de las acciones y, con ello,

“Un supuesto razonable es que la variabilidad del rendimiento esperado en un corto plazo de tiempo (Δt) es la misma sin importar el precio del activo. Dicho de otra manera, desde el punto de vista del inversor, la incertidumbre sobre el rendimiento esperado es la misma tanto si el precio es de \$10 como de \$20. Esto implica que la variación del precio (dx), en un corto plazo de tiempo (dt), debe ser proporcional al propio precio de la acción.” (Mascareñas, 2016)

A continuación, se presenta un ejemplo desarrollado por Mascareñas (2016), donde se pone en práctica lo señalado previamente.

Ejemplo: Un título que no paga dividendos tiene una volatilidad del 30% anual proporcionando una rentabilidad anual esperada del 15%. El comportamiento futuro de su precio viene dado por:

$$\frac{dx}{x} = 0,15dt + 0,3dz \quad (7.49)$$

Si x es el precio del activo en el instante t y Δx es el aumento del precio durante el intervalo Δt :

$$\frac{\Delta x}{x} = 0,15\Delta t + 0,3\varepsilon\sqrt{\Delta t} \quad (7.50)$$

Si se considera que el intervalo de tiempo de una semana equivale a 0,01923 años y el precio en el momento t es de \$10:

$$\frac{\Delta x}{x} = 0,15\Delta t + 0,3\varepsilon\sqrt{\Delta t} \quad (7.51)$$

$$\frac{\Delta x}{10} = 0,15 * 0,01923 + 0,3\varepsilon\sqrt{0,01923} \quad (7.52)$$

Lo anterior equivale a:

$$\Delta x = 0,0288 + 0,04149\varepsilon \quad (7.53)$$

Dicho de otra forma, el aumento del precio en una semana es una variable aleatoria distribuida según una normal de media \$0,0288 y de desviación estándar \$0,04149. En la Figura 7.9 se presentan tres simulaciones para un precio de acción siguiendo este proceso con un valor inicial de \$13.

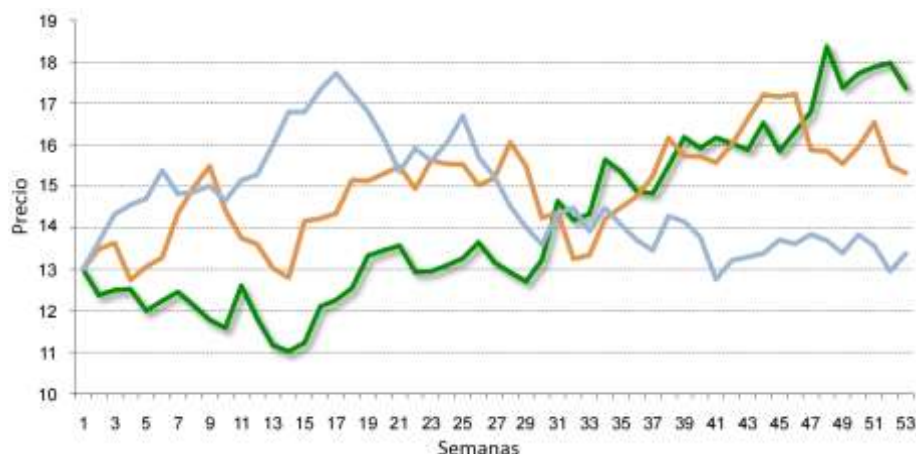


Figura 7.9. Ejemplos de comportamiento del precio de la acción durante un año

En el caso de específico de los *commodities* minerales, el precio del oro y, en menor medida, el del petróleo, sigue un proceso de Movimiento Geométrico Browniano (para una discusión más detallada véase el Capítulo 13). Lo anterior se debe a que, por un lado, el oro es en la práctica un activo financiero, mientras que el precio del petróleo posee tanto una componente financiera como una componente del mundo real (asociada a la oferta y demanda). Sin embargo, los precios de *commodities* minerales como el cobre, petróleo, potasio o litio no se comportan según este proceso de Itô.

Un caso especial que debe discutirse en un MGB es cuando $x = 0$ en algún instante de tiempo. No es difícil demostrar que cuando x_t se anula en un cierto instante de tiempo desde ese momento en adelante deberá mantenerse nulo. Esto se debe a que si $x = 0$, deberá cumplirse que x es una constante. Dado que el valor de la variable en ese instante de tiempo es cero, x_t solo puede tomar dicho valor hacia el futuro, tal como se muestra en la Figura 7.10.

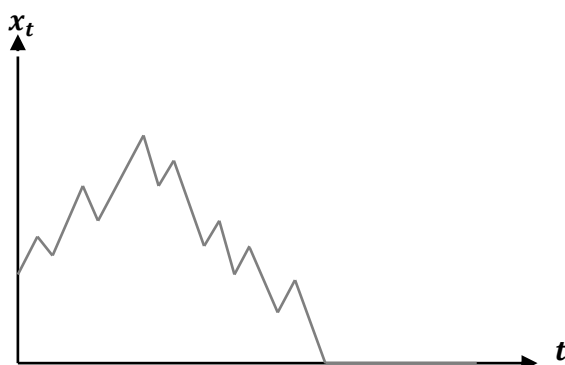


Figura 7.10. Comportamiento de un proceso Geométrico Browniano cuando toma el valor de cero

Esto tiene bastante sentido en la práctica en el caso de los activos financieros (o precios de *commodities*), pues si el precio de una acción por ejemplo llega a cero es porque la compañía ha dejado de tener valor y, a partir de ese punto, la empresa desaparecerá, por lo que no será capaz de crear valor nunca más.

7.6.2 Proceso con Reversión a la Media (RM)

Al analizar el precio de un commodity mineral, es claro que un aumento en el mismo está asociado a un déficit relativo de la oferta mientras que una disminución en el precio estará asociada a un superávit de la oferta (Tilton y Guzmán, 2016). Cuando el precio de un *commodity* mineral aumenta, en general esto provoca un crecimiento en el interés de expandir la oferta (ya sea aumentando la producción en las minas existentes o ingresando nuevas minas en el mercado, lo que también aplica para el reciclaje en ciertos casos de minerales). El aumento en la oferta hace disminuir el precio, el cual, una vez alcanzado un cierto umbral, desincentiva la entrada de nueva producción. Una baja en el precio, sin embargo, produce que algunos productores dejen el mercado por lo que llegado cierto punto el precio vuelve a subir debido a la baja en la oferta. Ambos casos se pueden apreciar en la Figura 7.11. Cabe destacar que el análisis anterior considera todas las demás variables constantes.

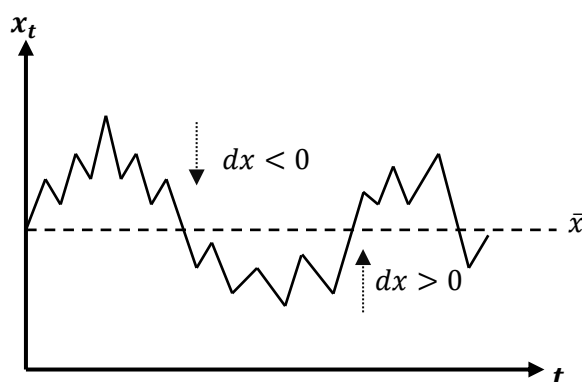


Figura 7.11. Comportamiento para un proceso con Reversión a la Media

Dado lo anterior, el comportamiento del precio de los *commodities* se mueve en torno a un valor fijo (generalmente referido como precio de *largo plazo*). En caso de excederse dicho valor se llega a un punto en donde las fuerzas de mercado lo hacen volver a la tendencia de largo plazo. Al contrario, cuando el precio se encuentra por debajo de ese valor, las mismas

fuerzas de mercado lo hacen subir. En otras palabras, la oferta y demanda están constantemente revirtiendo los precios que se encuentran por sobre o por debajo de la tendencia de largo plazo.

Si x corresponde al precio, entonces se puede expresar en lenguaje matemático la reversión así descrita como:

$$dx = \eta(\bar{x} - x)dt + \sigma dz \quad (7.54)$$

Aquí la constante \bar{x} es el precio de largo plazo. Debe notarse que este es un proceso de Itô ya que $a(t, x) = \eta(\bar{x} - x)$ y $b(t, x) = \sigma$.

En su comportamiento determinístico, el término $\eta(\bar{x} - x)$ refleja precisamente las fuerzas del balance de mercado, que contrarrestan de forma permanente cualquier desvío del precio respecto a su posición de equilibrio de largo plazo. En el caso que $\eta > 0$, cuando x toma un valor mayor que \bar{x} , la componente que acompaña a dt será negativa y dx tenderá a un valor negativo. Por lo tanto, el precio va a bajar (en valor esperado al menos). Al tomar en cuenta la componente aleatoria, sin embargo, esta es independiente de lo que suceda con la tendencia. Aunque el precio esté bajando, esta puede llevar a una subida del mismo. Sin embargo, llegará un punto en que no será capaz de mantenerse en contra de la tendencia de reversión. Cuando x llega a la zona positiva el comportamiento descrito se replica a la inversa su comportamiento.

En los parámetros de la ecuación (7.54), η se conoce como la velocidad de reversión a la media, y este valor da cuenta de cuán rápido se tiende al valor medio del proceso. En general se tiene que $0 < \eta < \infty$. En el caso de llegar η al extremo infinito, el proceso tomaría inmediatamente el valor de \bar{x} , lo que se ilustra en la Figura 7.12. En otras palabras, ante saltos hacia arriba o abajo, η llevaría rápidamente el precio al precio de equilibrio de largo plazo. La velocidad de reversión en este caso es muy rápida cuando hay poca o escasa fluctuación en torno a la media. Contrariamente, en el caso en que $\eta \rightarrow 0$, el factor de reversión desaparece, lo que implica que también se elimina la fuerza de contrarresto y de esta forma el precio tiende a divergir de su equilibrio de largo plazo.

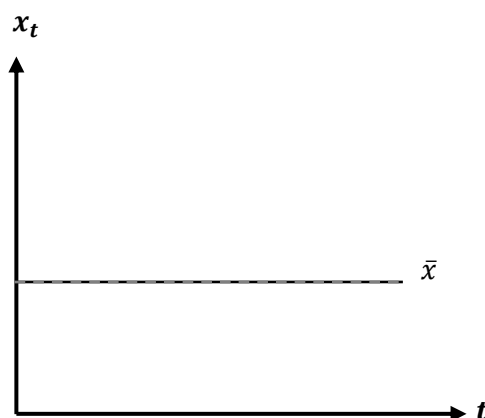


Figura 7.12. Comportamiento de un proceso con Reversión a la Media cuando $\eta = \infty$

Además de lo anterior, la velocidad de reversión posee otra propiedad interesante. El factor $\frac{1}{\eta}$ entrega el tiempo que le toma a la variable ajustarse al largo plazo. En términos de mercado, se converge a esa media cuando la oferta es capaz de seguir a la demanda (en caso de minería, esto conlleva a una inversión por parte de productores). Por ejemplo, si el precio de un *commodity* mineral sigue un proceso de Reversión a la Media y $\eta = 0,2$, se llegará entonces en 5 años al valor de largo plazo (ya que $\frac{1}{\eta} = 5$, según una base anual).

7.6.3 Proceso con Reversión a la Media con saltos

El proceso de Reversión a la Media con saltos o de Lévy, además de reflejar la tendencia de un precio a largo plazo, incluye los comportamientos abruptos que muestran ocasionalmente los precios de los *commodities* minerales. Estos cambios son producto de *shocks* del mercado, ya sea por transformaciones drásticas en la oferta o demanda del *commodity*, siendo lo más frecuente, sin embargo, cambios en la demanda (Tilton y Guzmán, 2016). Lo anterior produce que los precios suban o caigan abruptamente antes de seguir con su trayectoria de largo plazo.

Según Sánchez y Cristián (2011), la expresión que representa a un proceso de Reversión a la Media con saltos está dada por:

$$dp = \eta(\bar{p} - p)dt + \sigma dz + p d\mu \quad (7.55)$$

Con:

$$d\mu = \begin{cases} 0 & \text{con probabilidad } 1 - \lambda dt \\ \psi - 1 & \text{con probabilidad } \lambda dt \end{cases} \quad (7.56)$$

donde $d\mu$ sigue un proceso de Poisson. En este proceso λ es una constante positiva y representa la tasa media de arribo de un evento durante un tiempo infinitesimal dt . Por otro lado, ψ corresponde a la distribución de probabilidad de la magnitud del salto, donde su valor esperado es igual a $k = E(1 - \psi)$. De esta manera se pueden admitir saltos tanto positivos como negativos.

Matemáticamente, este proceso es idéntico al de Reversión a la Media, a excepción de la componente aleatoria $d\mu$. Esto posibilita modelar los cambios abruptos (discontinuos) en los precios, ya que permite que el valor salga momentáneamente de la trayectoria con tendencia a la media de largo plazo.

RECUADRO 7.2

PROCESO DE LÉVY

Existen procesos estocásticos estacionarios de tiempo continuo x en el que los incrementos en el valor del proceso no dependen de sus valores pasados, sino que son aleatorios. Este tipo de procesos fue analizado por el matemático francés Paul Lévy hacia la década de 1930, por lo que se les nombra en honor a él.

Un proceso de Lévy representa el movimiento de una partícula cuyos desplazamientos sucesivos son aleatorios e independientes, y estadísticamente tienen la misma distribución sobre diferentes intervalos de tiempo de la misma longitud. En esas condiciones, un proceso de Lévy puede verse como un análogo en tiempo continuo a lo que se definió previamente como caminata aleatoria.

De hecho, los procesos descritos anteriormente, como el de Wiener (usado para modelar el Movimiento Browniano) y el de Poisson, son casos particulares del proceso de Lévy.

Formalmente, x será un proceso de Lévy cuando:

- i) x tiene trayectorias continuas a la derecha con límite a la izquierda.
- ii) $x_0 = 0$, y tiene incrementos independientes, es decir, dados los instantes $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$, las variables aleatorias $x_{t_1}, x_{t_2} - x_{t_1}, \dots, x_{t_n} - x_{t_{n-1}}$ son independientes.

iii) La distribución del incremento $x_t - x_s$ es homogénea en el tiempo, es decir, solo depende de la diferencia $t - s$.

Cualquier proceso de Lévy puede descomponerse en la suma de un movimiento Browniano, un arrastre lineal y un proceso puro de salto (*Jump Process*), que iguala los saltos del proceso de Lévy original. Este último proceso puede considerarse como una superposición de procesos de Poisson centrados, por lo que forman un proceso de Poisson compuesto. El desarrollo de esta descomposición queda fuera del alcance de este libro, sin embargo, es un resultado matemático conocido como descomposición de Lévy–Itô.

En minería los procesos de saltos modelan de manera más realista los recursos remanentes de un depósito mineral bajo incertidumbre, ya que permiten representar el comportamiento característico de la secuencia de exploración al descubrir o validar recursos a reservas, en donde este cambio se presenta como un salto en la cantidad de recursos remanentes.

Se desarrollará un ejemplo más detallado de este tema en el apartado de ejercicios de este capítulo.

7.6.4 Proceso de Ornstein-Uhlenbeck

En 1930 Uhlenbeck y Ornstein propusieron un modelo que establece que es la velocidad de la partícula la que se ve influenciada por el choque con las partículas vecinas, la que a su vez depende de la fricción que ejerce el medio. De esta manera, el efecto de resistencia es proporcional a la velocidad.

El proceso de Ornstein-Uhlenbeck corresponde a uno de los primeros ejemplos de ecuaciones diferenciales estocásticas y se representa según:

$$dX_t = -\alpha X_t dt + \sigma dz_t \quad (7.57)$$

Una variante de este tipo de proceso se denomina proceso de Ornstein-Uhlenbeck con Reversión a la Media, el que se denota mediante la ecuación:

$$dX_t = (m - X_t)dt + \sigma dz_t \quad (7.58)$$

En esencia la mayoría de los precios de los *commodities* minerales se comporta según un proceso de este tipo, o una variante del mismo.

7.6.5 Desarrollo de los modelos de procesos en la literatura

Tal como se ha mostrado en el desarrollo de este capítulo, una de las principales aplicaciones de los modelos presentados corresponde a la modelación de la dinámica de precios de *commodities* minerales. Los primeros indicios se remontan a 1985, año en que los académicos ligados al mundo financiero M. Brennan y E. Schwartz propusieron (ver más detalles en Capítulo 16) un modelo donde el precio *spot*⁴¹ de un *commodity* S_t sigue un Movimiento Geométrico Browniano, que se representa por:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dz \quad (7.59)$$

Donde μ corresponde a un parámetro que denota el retorno neto del *commodity*, σ la volatilidad instantánea de los retornos del precio y dz un diferencial de Wiener. Al proceso denotado por la ecuación (7.59) se le realiza un ajuste para considerar el riesgo (Urzúa, 2004):

$$dS_t = (r - \delta)S_t dt + \sigma S_t dz \quad (7.60)$$

En este último caso, r corresponde a la tasa de interés instantánea y δ representa el retorno por conveniencia del *commodity*. En el caso del cobre,

“El retorno por conveniencia corresponde al flujo de beneficios que obtiene el poseedor de cobre físico que no obtiene el poseedor de un contrato de futuros de cobre. Puede considerarse como el valor que se obtiene de la posibilidad de beneficiarse de la escasez temporal de metal y es una razón para mantener inventarios de cobre aún en presencia de costos de almacenaje. Si se considera al cobre como un activo, puede pensarse en el retorno por conveniencia como un dividendo obtenido por la posesión de este activo.” (Heimlich, 2009).

Al aplicar este modelo se considera al cobre físico como un activo de transacción en el mercado, por lo que puede formar parte de un portafolio de inversión. Sin embargo, el modelo no se ajusta bien a lo que sucede en el mercado de este *commodity* pues, tal como se ha mencionado previamente, su comportamiento tiende a la reversión a la media. Según señala Heimlich (2009), “este modelo implica que la volatilidad de los precios futuros es la misma que la volatilidad de los precios *spot*, en tanto empíricamente se observa que la volatilidad disminuye con el horizonte de los futuros.”

⁴¹ Es el precio en el cual se negocia un determinado activo en el mercado contado o mercado físico.

En 1990, Gibson y Schwartz definieron un modelo que esta vez considera dos factores estocásticos: uno es el precio *spot* S_t , que sigue un Movimiento Geométrico Browniano, y el otro corresponde al retorno de conveniencia δ_t , que sigue un Proceso de Reversión a la Media del tipo Ornstein-Uhlenbeck. En consecuencia, el proceso de Gibson y Schwartz se denota de la siguiente manera:

$$dS_t = (r - \delta_t)S_t dt + \sigma_1 S_t dz_1 \quad (7.61)$$

$$d\delta_t = [\kappa(\alpha - \delta_t) - \lambda]dt + \sigma_2 dz_2 \quad (7.62)$$

Aquí λ es el premio por riesgo asociado al retorno por conveniencia y α es el nivel de largo plazo. Además, se cumple que $(dz_1)(dz_2) = \rho dt$, es decir, las perturbaciones estocásticas de ambos factores tienen una correlación instantánea ρ .

Schwartz en 1997 define dos modelos, denotados por modelo 1 y modelo 3. El primero de ellos le asigna al logaritmo del precio *spot*, $x_t = \log(S_t)$, un proceso de Reversión a la Media del tipo Ornstein-Uhlenbeck:

$$dx_t = \kappa(\alpha^* - x_t)dt + \sigma dz \quad (7.63)$$

Donde κ refleja la velocidad de ajuste de la tendencia de largo plazo $\alpha^* = \alpha - \lambda$ y λ representa el precio de mercado del riesgo asociado a x_t , el cual se considera constante y debe estimarse.

El valor esperado del precio ajustado por riesgo en un horizonte T , es decir, el precio de los futuros del *commodity*, está dado por:

$$F(S_t, T) = e^{-\kappa T} \log(S_t) + (1 - e^{-\kappa T})\alpha^* + \frac{\sigma^2}{4\kappa}(1 - e^{-2\kappa T}) \quad (7.64)$$

De la ecuación (7.64) es posible apreciar que el precio futuro puede incrementar o disminuir en relación al precio *spot*, que en el caso del cobre se ajusta a lo que sucede en el mercado.

Respecto del modelo 3, Schwartz propone una extensión del modelo que desarrolló junto a Gibson en 1990. En este caso, consideran un proceso de tipo Ornstein-Uhlenbeck para la tasa de interés instantánea r_t :

$$dS_t = (r_t - \delta_t)S_t dt + \sigma_1 S_t dz_1 \quad (7.65)$$

$$d\delta_t = \kappa(\hat{\alpha} - \delta_t)dt + \sigma_2 dz_2 \quad (7.66)$$

$$dr_t = a(m^* - r_t)dt + \sigma_3 dz_3 \quad (7.67)$$

donde $dz_1 dz_2 = \rho_1 dt$, $dz_2 dz_3 = \rho_2 dt$ y $dz_1 dz_3 = \rho_3 dt$.

7.7 Lema de Itô

7.7.1 Reglas de diferenciación estocástica y motivación al Lema de Itô

En el ámbito financiero, una de las principales herramientas matemáticas aplicables en problemas de tiempo continuo y ambiente estocástico corresponde al cálculo estocástico o cálculo de Itô. Una de sus bases es precisamente el Lema de Itô, que se utiliza para obtener diferenciales estocásticos.

Antes de introducir el Lema de Itô conviene presentar algunas definiciones. La primera de ellas es que, según el cálculo tradicional, para un diferencial dt se cumple:

$$(dt)^2 = 0 \quad (7.68)$$

Por su parte, en el caso del cálculo estocástico, si $z(t)$ corresponde a un Movimiento Browniano:

$$dz(t)^2 = dt \quad (7.69)$$

que en forma integral se expresa según:

$$\int_0^t dz(s)^2 = \int_0^t ds = t \quad (7.70)$$

Además, en base a lo anterior se cumple que:

$$dtdz(t) = dt dt^{\frac{1}{2}} = dt^{\frac{3}{2}} \quad (7.71)$$

Ya que a partir de las reglas de cálculo tradicional $dt^{\frac{3}{2}}$ es una cantidad despreciable, se cumplirá que $dt \cdot dz(t) = 0$ (de hecho, $dt^\alpha = 0$ para todo $\alpha > 1$).

En el caso particular de modelar el comportamiento del precio de un activo financiero, una de las primeras formas de abordar la problemática de una ecuación diferencial estocástica consiste en:

1. Analizar la componente determinista o de tendencia.
2. Proceder a considerar la parte estocástica o de difusión, de manera de hacer que el problema refleje lo que sucede en la realidad con los precios y sus fluctuaciones.

Un ejemplo de aplicación desarrollado por Venegas (2008), que ilustra la forma de abordar estos problemas y la necesidad de considerar el componente estocástico, es el caso de una población de parejas de animales que crece geoméricamente en tiempo discreto con una tasa constante $\mu = 2$. Si inicialmente en $t = 0$ se tiene una pareja $N_0 = 1$, luego en $t = 1$ se tendrán dos parejas descendientes más la pareja inicial, de manera que $N_1 = N_0 + \mu N_0 = 1 + 2 = 3$. Luego en $t = 2$, la población de parejas estará dada por $N_2 = N_1 + \mu N_1 = 3 + 6 = 9$. En general, el número de parejas en un instante t estará dado por:

$$N_t = N_{t-1} + \mu N_{t-1} = N_{t-1}(1 + \mu) = N_0(1 + \mu)^t \quad (7.72)$$

En términos financieros la ecuación (7.72) puede explicarse como el resultado de invertir un monto inicial N_0 durante t años a una tasa anual μ . Si ahora se considera una tasa de crecimiento compuesta n veces en cada período, la ecuación queda de la forma:

$$N_t = N_{t-1} + \mu N_{t-1} = N_{t-1}(1 + \mu) = N_0 \left(1 + \frac{\mu t}{nt}\right)^{nt} \quad (7.73)$$

Si $nt \rightarrow \infty$, se tiene que:

$$N_t = N_0 \left(1 + \frac{\mu t}{nt}\right)^{nt} \rightarrow N_0 e^{\mu t} \quad (7.74)$$

De (7.74) se obtiene que la población inicial que crecía geoméricamente a una tasa constante μ en tiempo discreto, ahora lo hace de forma exponencial en tiempo continuo a tasa constante μ . A su vez, (7.74) es solución de la siguiente ecuación diferencial de primer orden:

$$\frac{dN_t}{dt} = \mu N_t \leftrightarrow \frac{dN_t}{N_t} = \frac{1}{dt} \quad (7.75)$$

De aquí que se deduce que la tasa de crecimiento de la población por unidad de tiempo permanece constante.

Hasta este punto solo se ha considerado la componente determinística del problema del crecimiento de la población. Para adaptar este problema a lo que sucede en la realidad (con

incertidumbre), se considerará un Movimiento Browniano para agregar la componente estocástica, de manera que el problema queda reformulado de la siguiente forma:

$$\frac{dN_t}{N_t} = \mu dt + \sigma dz(t) \quad (7.76)$$

Donde σ representa un parámetro que indica la magnitud de la perturbación.

Para encontrar el valor de una variable $x(t, z)$ que sigue un proceso de Itô, se vuelve necesario integrar dicha función. Para ello hay que saber derivarla apropiadamente, por lo que se hará uso del Lema de Itô, que por analogía es la versión estocástica de la regla de la cadena. Desafortunadamente, como se vio en las secciones precedentes no es posible derivar la función debido a que en cualquier punto el comportamiento puede ser creciente o decreciente.

Kiyoshi Itô demostró la existencia de una relación entre un proceso de Itô y una función que depende de dicho proceso $F(t, x)$, función que se puede ver como una transformación de $x(t)$. Un ejemplo en minería sería tomar una función $x(t)$ que describe el precio del *commodity* mineral y $F(t, x)$ como la utilidad instantánea de una mina que extrae dicho *commodity* y que está en función del precio y el tiempo.

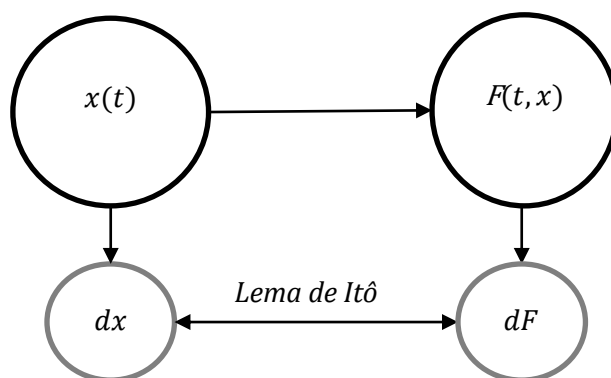


Figura 7.13. Relación entre un proceso de Itô x y una función, $F(t, x)$ que depende de ella

Gráficamente, lo expuesto se puede representar de la forma que se muestra en la Figura 7.13. En el espacio de $x(t)$ se puede asumir viven los dx , mientras que en el espacio de $F(t, x)$ se encuentran los dF . El Lema de Itô es el que relaciona a ambos diferenciales y dicha relación es la que permite resolver ecuaciones diferenciales estocásticas. La transformación de $x(t)$ en un $F(t, x)$, permite que el problema sea más sencillo de trabajar.

Itô demostró que si la función F depende tanto de x como de t , se cumple que:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} (dt)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} (dx)^2 + \dots \quad (7.77)$$

Ahora bien, para un dt pequeño $(dt)^2 = 0$. Sin embargo, como mostró Itô, no ocurre lo mismo con $(dx)^2$. Ello se debe a que si $x(t)$ es un proceso de Itô, entonces:

$$(dx)^2 = a^2(t, x)(dt)^2 + 2a(t, x)b(t, x)dtdz + b^2(t, x)(dz)^2 \quad (7.78)$$

Ya que es posible aproximar $dz = \sqrt{dt}$, y dado que dt es pequeño, la ecuación (7.63) queda entonces de la siguiente forma:

$$(dx)^2 = b^2(t, x)(dz)^2 = b^2(t, x)dt \quad (7.79)$$

Por tanto, en base al resultado anterior, el Lema de Itô establece que:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial t} dt + a(t, x) \frac{\partial F}{\partial x} dt + \frac{1}{2} b^2(t, x) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dt + b(t, x) \frac{\partial F}{\partial x} dz \quad (7.80)$$

$$dF = \left[\frac{\partial F}{\partial t} + a(t, x) \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2} b^2(t, x) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right] dt + b(t, x) \frac{\partial F}{\partial x} dz \quad (7.81)$$

La propiedad es válida para la mayoría de las funciones $F(t, x)$. A continuación se desarrollará un ejemplo para entender cuál es la ganancia en la práctica de aplicar el Lema de Itô.

Ejemplo Lema de Itô: Sea $x(t)$ el precio de un *commodity* mineral, que sigue un Movimiento Geométrico Browniano de la forma

$$dx = axdt + \sigma xdz \quad (7.82)$$

y la función $F(t, x)$ el VAN de la mina que extrae dicho mineral. Encontrar $x(t)$.

Resolviendo primero el ejercicio para el caso determinístico y luego para el caso estocástico se tiene:

1. Caso determinístico:

$$x(t) = x_0 e^{\alpha(t-t_0)} = x_0 e^{\alpha t}, \text{ considerando para este caso que } t_0 = 0. \quad (7.83)$$

2. Caso estocástico:

Al dividir la ecuación diferencial por x e integrar se tiene:

$$\frac{dx}{x} = \alpha dt + \sigma dz \quad (7.84)$$

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{x} = \int_0^t \alpha dt + \int_{z_0}^z \sigma dz \quad (7.85)$$

$$\log\left(\frac{x_t}{x_0}\right) = \alpha t + \int_0^z \sigma dz \quad (7.86)$$

$$x(t) = x_0 e^{\alpha t + \int_0^z \sigma dz} \quad (7.87)$$

Para efectos del ejemplo se considera que $z_0 = 0$. La expresión $\int_0^z \sigma dz$ recibe el nombre de integral de Itô.

Considérese pues la transformación $F(t, x) = \log(x)$. Por el Lema de Itô:

$$dF = \left[\frac{\partial F}{\partial t} + a(t, x) \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2} b^2(t, x) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right] dt + b(t, x) \frac{\partial F}{\partial x} dz \quad (7.88)$$

$$dF = \left[0 + \alpha x \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \left(-\frac{1}{x^2} \right) \right] dt + \frac{\sigma x^2}{x} dz \quad (7.89)$$

$$dF = \left[0 - \frac{1}{2} \sigma^2 \right] dt + \sigma dz \quad (7.90)$$

$$d(\log x) = \left[\alpha - \frac{1}{2} \sigma^2 \right] dt + \sigma dz \quad (7.91)$$

$$\log\left(\frac{x_t}{x_0}\right) = \left[\alpha - \frac{1}{2} \sigma^2 \right] t + \sigma(z - z_0) \quad (7.92)$$

$$x(t) = x_0 e^{(\alpha - \frac{1}{2} \sigma^2)t + \sigma z} \quad (7.93)$$

De lo anterior, si $\sigma = 0$, entonces $x(t) = x_0 e^{\alpha t}$; pero si $\sigma > 0$ entonces $x(t) = x_0 e^{(\alpha - \frac{1}{2} \sigma^2)t + \sigma z}$, donde $x_0 e^{(\alpha - \frac{1}{2} \sigma^2)t}$ es la componente determinística y $e^{\sigma z}$ la estocástica. Sin embargo, resolver la ecuación estocástica no es equivalente a solucionar la parte determinística y sumarle la componente aleatoria, tal como se muestra en la Figura 7.14.

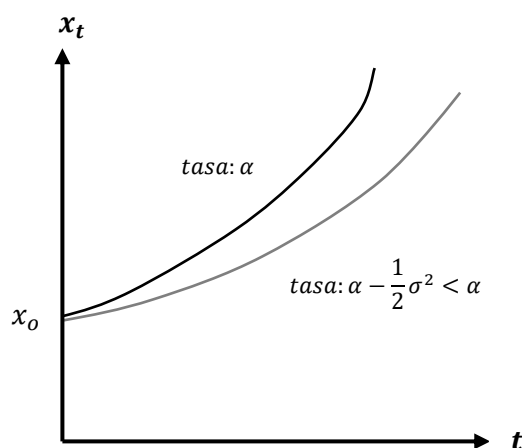


Figura 7.14. Comparación de la solución del caso estocástico con la del determinístico considerando su tasa de crecimiento

RECUADRO 7.3

CÁLCULO ESTOCÁSTICO DE STRATONOVICH

Ruslan Stratonovich (1930-1997) fue un físico, ingeniero y matemático ruso. Desarrolló alternativamente a Itô el cálculo estocástico, donde derivó modelos que aparecen de manera natural cuando se someten a leyes físicas. Stratonovich e Itô fueron los encargados de formular la noción de ecuación diferencial estocástica. De esta manera, el cálculo estocástico se puede abordar desde estos dos enfoques dependiendo de la naturaleza del problema, donde cada uno tiene sus ventajas y desventajas. Siempre es posible pasar de un problema de la forma de Itô a uno a la forma de Stratonovich, y viceversa.

Dada la naturaleza de este curso, no se verá más en profundidad el cálculo estocástico de Stratonovich. Sin embargo, para algunos casos particulares puede resultar matemáticamente más sencillo resolver un problema desde este enfoque que el de Itô. Para ello se introducirán algunos conceptos básicos.

Dado un diferencial de Itô:

$$dX_t = a(t, x)dt + b(t, x)dz_t$$

El diferencial de Stratonovich será:

$$dX_t = \frac{1}{2}b(X_t)b'(X_t)dt + b(X_t)dz_t$$

Donde la solución final es:

$$X_t = h^{-1}(z_t + h(X_0))$$

Con:

$$h(x) = \int_0^x \frac{ds}{b(s)}$$

Se desarrollará un ejemplo más detallado de este tema en el apartado de ejercicios de este capítulo para entender las diferencias entre ambos tipos de cálculos estocásticos. Para más información acerca de las diferentes herramientas que proporciona el cálculo estocástico de Stratonovich se puede consultar el libro de Martínez y Villalón (2003).

7.8 Desigualdad de Jensen

Este capítulo no estaría completo sin la presentación de una de las desigualdades de mayor relevancia para la explotación de minas bajo incertidumbre: la desigualdad de Jensen. Descubierta por el matemático danés Johan L. W. Jensen (1859-1925), esta desigualdad se relaciona directamente con el concepto de convexidad.

La desigualdad de Jensen establece que si $\varphi(x)$ es una función convexa, es decir, $\varphi''(x) > 0$, entonces se cumple que $E(\varphi(x)) \geq \varphi(E(x))$, donde $E(\cdot)$ corresponde al operador de la esperanza matemática. Cabe señalar que para el caso en que $\varphi(x)$ es cóncava, la desigualdad se invierte.

Para demostrar esta desigualdad considérese un *commodity* mineral cuyo precio es incierto a largo plazo, pero que se encuentra entre un valor a y un valor b . Dado ese conjunto de posibles precios, la función de VAN de una mina es la que se muestra en la Figura 7.15. Si se considera un precio de largo plazo incierto, asumiendo una distribución aleatoria uniforme (no es crítica para la demostración, pero sí para simplificar esta y poder utilizar los argumentos gráficos que siguen), el valor esperado del precio estará en la mitad del rango $[a, b]$ y tendrá asociado un VAN. A su vez, el VAN también seguirá una distribución uniforme, por lo cual la media de éste se encontrará en la mitad del rango analizado. Esto conlleva a que para una función de VAN convexa se cumpla que $E(VAN(p)) > VAN(E(p))$, tal como se ilustra en la Figura 7.15.

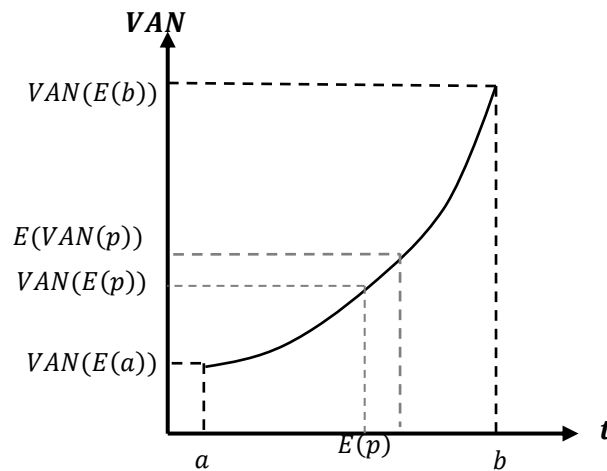


Figura 7.15. Comparación entre $E(VAN(p))$ y $VAN(E(p))$

La desigualdad de Jensen es crítica en la elaboración de planes mineros. Esto pues tradicionalmente se construye el plan minero utilizando un valor esperado del precio, obteniéndose así un VAN para la mina. Sin embargo, según la desigualdad de Jensen, dicho valor es posiblemente distinto al que se obtendría al realizar la planificación para el valor esperado del VAN del precio. De hecho, si el VAN es una función convexa para el precio de largo plazo se cumplirá que $E(VAN(p)) > VAN(E(p))$. La implicancia de ello es que si se está en un ambiente de precios estocásticos el criterio de selección debiese considerar maximizar $E(VAN(p))$ y no $VAN(E(p))$.

Cabe señalar que el único caso en que no se cumple la desigualdad de Jensen es cuando se tiene una función lineal o alguna que sea convexa y cóncava a tramos. De hecho, si $\varphi(x) = ax + b$, entonces:

$$E(\varphi(x)) = aE(x) + b = \varphi(E(x)) \quad (7.94)$$

Un ejemplo interesante y donde es simple probar que la desigualdad de Jensen se cumple se genera para $\varphi(x) = x^2$. Aquí se tiene que:

$$E(\varphi(x)) = E(x^2) \neq E^2(x) \quad (7.95)$$

$$Var(x) = E(x^2) - E^2(x) \quad (7.96)$$

$$E(x^2) = Var(x) + E^2(x), Var(x) > 0 \quad (7.97)$$

$$\rightarrow E(x^2) > E^2(x) \quad (7.98)$$

Ejemplo de resolución de un problema de cálculo estocástico: Sea $x(t)$ los flujos de caja de una mina en el instante t , y tal que se cumple:

$$dx = \alpha x dt + \sigma x dz \quad (7.99)$$

Calcular $E[\int_0^\infty x(t)e^{-rt} dt]$.

La solución para el proceso Browniano es: $x(t) = x_0 e^{(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma z}$, calculada en el ejemplo del Lema de Itô. Por tanto:

$$E[\int_0^\infty x(t)e^{-rt} dt] = E[\int_0^\infty x_0 e^{(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma z} e^{-rt} dt] = \int_0^\infty x_0 e^{(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)t} e^{-rt} E(e^{\sigma dz}) dt \quad (7.100)$$

Es necesario recalcar que por la desigualdad de Jensen $E(e^{\sigma dz}) \neq e^{E(\sigma dz)}$.

Ahora, sea la transformación $Y(t) = e^{\sigma z t}$, entonces por el Lema de Itô se tiene:

$$dY_t = \frac{\partial Y}{\partial z} dz + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Y}{\partial z^2} (dz)^2 \quad (7.101)$$

$$dY_t = \sigma e^{\sigma z} dz + \sigma^2 e^{\sigma z} dt / \int \quad (7.102)$$

$$Y_t - Y_0 = \sigma \int_0^t e^{\sigma z} dz + \frac{1}{2} \sigma^2 \int_0^t e^{\sigma z} dt / E() \quad (7.103)$$

$$E(Y_t - Y_0) = \sigma \int_0^t E(e^{\sigma z} dz) + \frac{1}{2} \sigma^2 \int_0^t E(e^{\sigma z}) dt \quad (7.104)$$

Por independencia se tiene que $E(e^{\sigma z} dz) = E(e^{\sigma z})E(dz)$, pero $E(dz) = 0$, entonces la ecuación anterior queda:

$$E(e^{\sigma z}) - Y_0 = \frac{1}{2} \sigma^2 \int_0^t E(e^{\sigma z}) dt \quad / \frac{d}{dt} \quad (7.105)$$

$$\frac{d}{dt} [E(e^{\sigma z})] = \frac{1}{2} \sigma^2 E(e^{\sigma z}) \quad (7.106)$$

$$\frac{d[E(e^{\sigma z})]}{E(e^{\sigma z})} = \frac{1}{2} \sigma^2 dt / \int \quad (7.107)$$

$$\log(E(e^{\sigma z})) = \frac{1}{2} \sigma^2 t \quad (7.108)$$

$$E(e^{\sigma z}) = Y_0 e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t} = e^{\sigma z} e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t} > 1 \quad (7.109)$$

Reemplazando el resultado anterior en la ecuación (7.100), se obtiene:

$$E\left[\int_0^\infty x(t)e^{-rt} dt\right] = E\left[\int_0^\infty x_0 e^{(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)t} e^{-rt} e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t} dt\right] \quad (7.110)$$

$$E\left[\int_0^\infty x(t)e^{-rt} dt\right] = \int_0^\infty x_0 e^{(\alpha-r)t} dt \quad (7.111)$$

$$E\left[\int_0^\infty x(t)e^{-rt} dt\right] = \frac{x_0}{\alpha-r} e^{(\alpha-r)t}, \text{ para } t = \infty \text{ y } t = 0 \quad (7.112)$$

Para que lo anterior tenga sentido se debe dar que $\alpha < r \rightarrow \frac{x_0}{r-\alpha}$, lo que lleva a que:

$$E\left[\int_0^\infty x(t)e^{-rt} dt\right] = \frac{x_0}{r-\alpha} \quad (7.113)$$

7.9 Problemas resueltos

Problema 7.1

Sea X_t un proceso Geométrico con Reversión a la Media, definido por la ecuación diferencial estocástica:

$$dX_t = \eta(\alpha - \log(X_t))X_t dt + \sigma X_t dz$$

$$X(0) = X_0 > 0$$

- Comente por qué este proceso puede representar mejor la realidad del precio del cobre, oro y petróleo en comparación con un proceso con Reversión a la Media o un Movimiento Geométrico Browniano.
- Muestre que la solución de la ecuación anterior está dada por:

$$X_t = e^{e^{-\eta t} \log X_0 + \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2\eta}\right)(1-e^{-\eta t}) + \sigma e^{-\eta t} \int_0^t e^{\eta s} dz_s}$$

- Muestre que:

$$E(X_t) = e^{\left(e^{-\eta t} \log(X_0) + \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2\eta}\right)(1-e^{-\eta t}) + \frac{\sigma^2(1-e^{-2\eta t})}{4\eta}\right)}$$

Hint: Utilizar la isometría de Itô:

$$E \left[\left(\int_0^t f_s dz_s \right)^2 \right] = E \left[\int_0^t f(s)^2 ds \right]$$

Solución

a. El Proceso Geométrico Browniano con Reversión a la Media es el que mejor modela el precio *spot* del cobre. Este ha demostrado fluctuar en torno a un valor representado por la fuerza del mercado (equilibrio de oferta y demanda).

El Movimiento Geométrico Browniano no es un buen indicador del precio del cobre, ya que tiene muchos supuestos y restricciones que lo alejan del comportamiento real. Específicamente, este modelo plantea que el precio sigue una tendencia al alza, cuando se sabe que no es así. Además, en un escenario de altos precios la oferta aumentará con la entrada de productores de mayor costo, lo que lleva a una baja en los precios. Al contrario, en un escenario de precios bajos, los productores de mayores costos podrían verse forzados a salir del mercado, lo que tiene como consecuencia un alza en el precio. Esto induciría reversión a la media en los precios del cobre.

De la ecuación se desprende que el precio futuro puede ser menor o mayor que el precio *spot*, lo que es consistente con la realidad del mercado. Además, la varianza del proceso no aumenta indefinidamente, sino que converge.

Cabe mencionar que el oro y el petróleo no se ajustan tan bien a este proceso, debido a que el precio de ambos *commodities* cuenta tanto con una componente física como una financiera, donde la última es muchas veces predominante.

b. En base a la ecuación que define el proceso se tiene que:

$$dX_t = \eta(\alpha - \log(X_t))X_t dt + \sigma X_t dz$$

Dividiendo ambos lados de la ecuación por X_t , se llega a:

$$\frac{dX_t}{X_t} = \eta(\alpha - \log(X_t))dt + \sigma dz$$

Se utilizará el Lema de Itô. En base a la construcción de la ecuación, parece conveniente utilizar la transformación $G_t = \log X_t$. De esta manera, los términos X_t y X_t^2 se eliminarán y será así posible despejar X_t cuando se integre nuevamente.

Con el Lema de Itô es posible pasar de una ecuación diferencial estocástica a una que depende tanto de X_t como del tiempo. Lo anterior se debe a que permite relacionar los diferenciales del mundo estocástico con los diferenciales de la función G_t .

Calculando las derivadas parciales respecto a t y X_t de la transformada, se obtiene:

$$\frac{\partial G}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial X_t} = \frac{1}{X_t}, \quad \frac{\partial^2 G}{\partial X_t^2} = -\frac{1}{X_t^2}$$

Además:

$$a(t, x) = \eta(\alpha - \log(X_t))X_t$$

$$b(t, x) = \sigma X_t$$

Reemplazamos cada término anterior en la ecuación del Lema de Itô:

$$dG_t = d(\log(X_t)) = \left[0 + \frac{\eta(\alpha - \log(X_t))X_t}{X_t} - \frac{1}{2}\sigma^2 X_t^2 \frac{1}{X_t^2} \right] dt + \frac{\sigma X_t}{X_t} dz$$

$$dG_t = d(\log(X_t)) = \left[\eta(\alpha - \log(X_t)) - \frac{1}{2}\sigma^2 \right] dt + \sigma dz$$

$$dG_t = d(\log(X_t)) = (\eta(\alpha - \log(X_t))dt + \sigma dz) - \frac{1}{2}\sigma^2 dt$$

Se debe notar que:

$$\frac{dX_t}{X_t} = \eta(\alpha - \log(X_t))dt + \sigma dz$$

Con lo que resulta la siguiente ecuación:

$$d(\log(X_t)) = \frac{dX_t}{X_t} - \frac{1}{2}\sigma^2 dt$$

Integrando lo anterior:

$$dG_t = \eta \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2\eta} - \log(X_t) \right) dt + \sigma dz$$

En este caso $\int \sigma dz$ se resuelve de manera tradicional. Usar el Lema de Itô permitió la aparición de dG_t . Al aplicar la integral simplemente queda G_t , es decir, $\log(X_t)$. En caso contrario se hubiera tenido que integrar por las tres variables, lo que hubiera originado una integral de Itô que no permitiría despejar G_t de manera directa.

Por tanto, dado que $G_t = \log X_t$, la ecuación anterior queda:

$$dG_t = \eta \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2\eta} - G_t \right) dt + \sigma dz$$

Ahora bien, introduciendo la variable $Y_t = e^{\eta t} G_t$ y calculando sus derivadas parciales:

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = \eta e^{\eta t} G_t, \quad \frac{\partial Y}{\partial G_t} = e^{\eta t} dG_t, \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial G_t^2} = 0$$

Se llega por el Lema de Itô a que:

$$dY_t = \eta e^{\eta t} G_t dt + e^{\eta t} dG_t$$

$$dY_t = \eta e^{\eta t} G_t dt + e^{\eta t} \left(\eta \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2\eta} - G_t \right) dt + \sigma dz \right)$$

$$dY_t = \eta e^{\eta t} G_t dt + e^{\eta t} \left(\eta \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2\eta} \right) dt - \eta G_t dt + \sigma dz \right)$$

$$dY_t = \eta e^{\eta t} G_t dt + \eta \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2\eta} \right) e^{\eta t} dt - \eta e^{\eta t} G_t dt + \sigma e^{\eta t} dz$$

Reduciendo los términos semejantes se tiene:

$$dY_t = \eta \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2\eta} \right) e^{\eta t} dt + \sigma e^{\eta t} dz$$

Ahora, integrando esta ecuación entre 0 y t para $t > 0$, se llega a la siguiente solución:

$$\int_0^t dY_s = \int_0^t \eta \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2\eta} \right) e^{\eta s} ds + \int_0^t \sigma e^{\eta s} dz_s$$

$$Y_t - Y_0 = \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2\eta} \right) (e^{\eta t} - 1) + \int_0^t \sigma e^{\eta s} dz_s$$

$$Y_t = Y_0 + \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2\eta} \right) (e^{\eta t} - 1) + \int_0^t \sigma e^{\eta s} dz_s$$

Como:

$$G_t = e^{-\eta t} Y_t$$

Multiplicando por $e^{-\eta t}$ se tiene:

$$G_t = e^{-\eta t} G_0 + \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2\eta} \right) e^{-\eta t} (e^{\eta t} - 1) + \sigma e^{-\eta t} \int_0^t e^{\eta s} dz_s$$

Llegando a:

$$G_t = e^{-\eta t} G_0 + \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2\eta} \right) (1 - e^{-\eta t}) + \sigma e^{-\eta t} \int_0^t e^{\eta s} dz_s$$

Finalmente, como:

$$G_t = \log X_t$$

Se obtiene:

$$\log X_t = e^{-\eta t} \log X_0 + \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2\eta} \right) (1 - e^{-\eta t}) + \sigma e^{-\eta t} \int_0^t e^{\eta s} dz_s$$

$$X_t = e^{e^{-\eta t} \log X_0 + \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2\eta} \right) (1 - e^{-\eta t}) + \sigma e^{-\eta t} \int_0^t e^{\eta s} dz_s}$$

c. Sabemos que la función generatriz de momentos de la distribución normal viene dada por:

$$E[e^y] = e^{E(y) + \frac{1}{2} \text{VAR}(y)}$$

Sea la variable y , definida por:

$$y = e^{-\eta t} \log X_0 + \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2\eta} \right) (1 - e^{-\eta t}) + \sigma e^{-\eta t} \int_0^t e^{\eta s} dz_s$$

Teniendo la solución de la ecuación:

$$X_t = e^y$$

El valor esperado es la componente no aleatoria:

$$E[y] = e^{-\eta t} \log X_0 + \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2\eta} \right) (1 - e^{-\eta t})$$

La varianza de y extrae la parte estocástica, por lo que queda:

$$VAR(y) = E \left[\left(\sigma e^{-\eta t} \int_0^t e^{\eta s} dz_s \right)^2 \right]$$

Esto es porque:

$$VAR(y) = E \left[\left(\sigma e^{-\eta t} \int_0^t e^{\eta s} dz_s \right)^2 \right] - \left(E \left[\left(\sigma e^{-\eta t} \int_0^t e^{\eta s} dz_s \right) \right] \right)^2$$

Y, añadiendo $E \left[\left(\sigma e^{-\eta t} \int_0^t e^{\eta s} dz_s \right) \right] = 0$, se obtiene que:

$$VAR(y) = E \left[\left(\sigma e^{-\eta t} \int_0^t e^{\eta s} dz_s \right)^2 \right] = E \left[\sigma^2 e^{-2\eta t} \left(\int_0^t e^{\eta s} dz_s \right)^2 \right]$$

Utilizando el *hint* de la isometría de Itô y reemplazando con los valores correspondientes, se llega a que:

$$\sigma^2 e^{-2\eta t} E \left[\left(\int_0^t e^{\eta s} dz_s \right)^2 \right] = \sigma^2 e^{-2\eta t} E \left[\int_0^t e^{2\eta s} ds \right]$$

Por tanto:

$$VAR(y) = \sigma^2 e^{-2\eta t} \frac{(e^{2\eta t} - 1)}{2\eta} = \frac{\sigma^2(1 - e^{-2\eta t})}{2\eta}$$

Luego:

$$\frac{1}{2} VAR(y) = \frac{\sigma^2(1 - e^{-2\eta t})}{4\eta}$$

De esta manera:

$$E[X_t] = e^{E(y) + \frac{1}{2} VAR(y)}$$

$$E(X_t) = e^{\left(e^{-\eta t} \log(X_0) + \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2\eta} \right) (1 - e^{-\eta t}) + \frac{\sigma^2(1 - e^{-2\eta t})}{4\eta} \right)}$$

Problema 7.2

Se define un proceso de salto (*jump process*) o proceso de Lévy aquel en el cual la variable x sigue una ecuación diferencial estocástica del tipo:

$$dx = f(x, t)dt + g(x, t)d\mu$$

Donde $f(x, t)$ y $g(x, t)$ son funciones conocidas (no aleatorias). Además, se cumple que:

$$d\mu = \begin{cases} 0 & \text{con probabilidad } 1 - \lambda dt \\ u & \text{con probabilidad } \lambda dt \end{cases}$$

Donde λ representa la tasa media de arribo de un evento durante un tiempo infinitesimal dt , y es una constante positiva. Por su parte, u representa el tamaño del salto x de un instante de tiempo a otro.

- ¿Por qué los procesos de saltos debiesen modelar de forma más razonable los recursos remanentes de un depósito mineral bajo incertidumbre que un proceso de Itô? Fundamente y represente gráficamente cómo se comporta este proceso respecto a uno de Itô.
- Demuestre que si $H(x, t)$ es una función diferenciable de x y t , entonces el valor esperado del diferencial de la misma, $E(dH)$, viene dado por:

$$E(dH) = \left[\frac{\partial H}{\partial t} + f(x, t) \frac{\partial H}{\partial x} \right] dt + E_u \{ \lambda [H(x + ug(x, t), t) - H(x, t)] \} dt$$

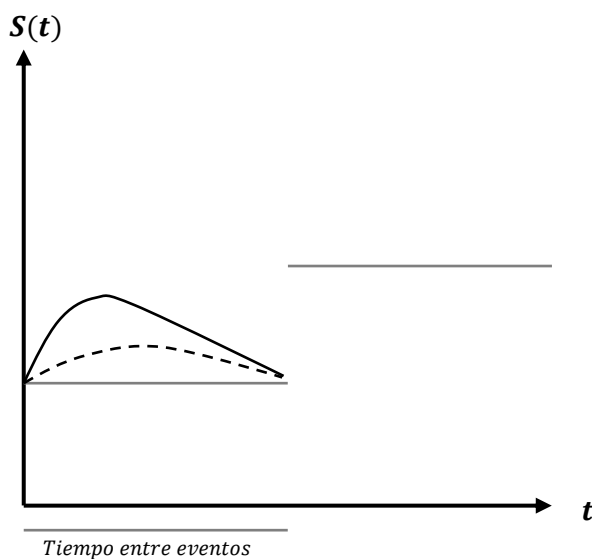
Donde $E_u\{\}$ es un operador que toma el valor esperado respecto a la variable u .

Solución

a. Un proceso de Lévy sigue una función continua en un determinado intervalo, después del cual presenta un salto.

Los procesos de saltos debiesen modelar de manera más realista los recursos remanentes de un depósito mineral bajo incertidumbre, ya que permiten representar el comportamiento característico de la secuencia exploración – descubrimiento de recursos.

La siguiente figura grafica un proceso de Lévy:



En un determinado intervalo la función es continua y diferenciable, pero al analizar el LOM de la mina se ve que es una función de carácter discontinuo.

Notar que el tiempo entre eventos tiene una distribución exponencial de parámetro λ . Por lo tanto, la probabilidad de ocurrencia de un evento distribuye Poisson con parámetro λ .

b. Expandiendo dH por Taylor se llega a que:

$$dH = \frac{\partial H}{\partial t} dt + \frac{\partial H}{\partial x} dx$$

Reemplazando dx :

$$dH = \frac{\partial H}{\partial t} dt + \frac{\partial H}{\partial x} (f(x, t)dt + g(x, t)d\mu)$$

Un cambio en x causa cambios en H de dos maneras, lo que se ve en el término que acompaña a $\frac{\partial H}{\partial x}$. Primero, $H(x, t)$ cambiará continua y de forma determinística en respuesta a la desviación en x . Esto viene dado por $f(x, t)dt$. Segundo, existe la posibilidad de que un evento de Poisson ocurra; si esto es así, x variará en una cantidad aleatoria $ug(x, t)$, y $H(x, t)$ lo hará de acuerdo a esto.

Dado que la probabilidad de que un evento Poisson ocurra en el intervalo dt es λdt , se tiene:

$$E \left[\frac{\partial H}{\partial x} g(t, x) d\mu \right] = E_u \{ \lambda [H(x + ug(x, t), t) - H(x, t)] \} dt$$

Entonces, la esperanza de un diferencial de H estará dada por:

$$E[dH] = \left[\frac{\partial H}{\partial t} + f(x, t) \frac{\partial H}{\partial x} \right] dt + E_u \{ \lambda [H(x + ug(x, t), t) - H(x, t)] \} dt$$

Se puede usar la ecuación anterior de igual manera que el Lema de Itô cuando se trabaja con procesos continuos.

Problema 7.3

Sea P el precio de un *commodity* mineral en un instante de tiempo, el cual queda determinado por un Movimiento Geométrico Browniano:

$$dP = \alpha P dt + \sigma P dz$$

Con α y σ positivos. Sea $F(P) = P^\theta$ (para $\theta > 0$) el flujo de caja de una mina en un instante cualquiera y r la tasa de descuento de la empresa que controla la operación. Considere el LOM infinito.

- a. Encuentre el VAN esperado de la mina dado por:

$$E \left[\int_0^\infty e^{-rt} F(P(t)) dt \right]$$

- b. Si $\theta = 1$, ¿Cómo se modifica el VAN esperado al variar σ ?

Solución

a. Se tiene que:

$$E \left[\int_0^{\infty} e^{-rt} F(P(t)) dt \right] = \left[\int_0^{\infty} e^{-rt} E[F(P(t))] dt \right]$$

En este caso, $a(P, t) = \alpha P$ y $b(P, t) = \sigma P$.

Además, considerando la función $F(P) = P^{\theta}$, por el Lema de Itô:

$$dF = \left[\frac{\partial F}{\partial t} + \alpha P \frac{\partial F}{\partial P} + \frac{1}{2} \sigma^2 P^2 \frac{\partial^2 F}{\partial P^2} \right] dt + \sigma P \frac{\partial F}{\partial P} dz$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial P} = \theta P^{\theta-1}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial P^2} = \theta(\theta - 1)P^{\theta-2}$$

Reemplazando las derivadas parciales, se tiene que:

$$dF = \left[\alpha P \theta P^{\theta-1} + \frac{1}{2} \sigma^2 P^2 \theta(\theta - 1) P^{\theta-2} \right] dt + \sigma P \theta P^{\theta-1} dz$$

$$dF = \left[\alpha \theta P^{\theta} + \frac{1}{2} \sigma^2 \theta(\theta - 1) P^{\theta} \right] dt + \sigma \theta P^{\theta} dz$$

Sustituyendo P^{θ} por F :

$$dF = \left[\alpha \theta F + \frac{1}{2} \sigma^2 \theta(\theta - 1) F \right] dt + \sigma \theta F dz$$

$$\frac{dF}{F} = \left[\alpha \theta + \frac{1}{2} \sigma^2 \theta(\theta - 1) \right] dt + \sigma \theta dz$$

Se aplica la función valor esperado:

$$E \left[\frac{dF_t}{F_t} \right] = E \left[\left(\alpha \theta + \frac{1}{2} \sigma^2 \theta(\theta - 1) \right) dt \right] + E[\sigma \theta dz]$$

Se debe notar que $E[\sigma \theta dz] = \sigma \theta E[dz] = 0$. Los términos que están dentro del primer término del lado derecho son constantes, por lo que el valor esperado es el mismo. Por lo tanto, dado lo anterior, queda lo siguiente:

$$E \left[\frac{dF_t}{F_t} \right] = \left(\alpha\theta + \frac{1}{2} \sigma^2 \theta(\theta - 1) \right) dt$$

Integrando:

$$\int_0^t E \left[\frac{dF_t}{F_t} \right] = \int_0^t \left(\alpha\theta + \frac{1}{2} \sigma^2 \theta(\theta - 1) \right) dt$$

$$\ln(E[\frac{F}{F_0}]) = \left(\alpha\theta + \frac{1}{2} \sigma^2 \theta(\theta - 1) \right) t$$

Como F_0 es constante puede salir fuera del valor esperado:

$$\frac{E[F]}{F_0} = e^{\left(\alpha\theta + \frac{1}{2} \sigma^2 \theta(\theta - 1) \right) t}$$

De aquí:

$$E[F] = F_0 e^{\left(\alpha\theta + \frac{1}{2} \sigma^2 \theta(\theta - 1) \right) t}$$

Luego, reemplazando en el VAN:

$$VAN = \int_0^{\infty} e^{-rt} E[F(P(t))] dt = \int_0^{\infty} e^{-rt} F_0 e^{\left(\alpha\theta + \frac{1}{2} \sigma^2 \theta(\theta - 1) \right) t} dt$$

$$VAN = \frac{F_0 e^{\left(\alpha\theta + \frac{1}{2} \sigma^2 \theta(\theta - 1) - r \right) t}}{\alpha\theta + \frac{1}{2} \sigma^2 \theta(\theta - 1) - r} \Big|_0^{\infty}$$

Dado que $\alpha\theta + \frac{1}{2} \sigma^2 \theta(\theta - 1) \leq r$, la solución converge a:

$$VAN = \frac{F_0}{r - \left(\alpha\theta + \frac{1}{2} \sigma^2 \theta(\theta - 1) \right)}$$

b. Si $\theta = 1$, entonces el $VAN = \frac{F_0}{r - \alpha}$

El VAN no depende de σ y, por lo tanto, no se modifica al variar este parámetro. Ello implica que, si el flujo de caja es igual P , el valor de la mina no dependerá de la desviación que se debe a la componente aleatoria del precio.

Problema 7.4

Sea P el precio de un *commodity* mineral en un instante cualquiera de tiempo. Este sigue un proceso con Reversión a la Media dado por:

$$dP = \eta(\bar{P} - P)dt + \sigma dz$$

donde \bar{P} corresponde a una constante, que representa el precio de largo plazo. Si η y σ son ambas constantes positivas, determinar:

- El valor esperado del precio en cada instante de tiempo t .
- La varianza del precio en cada instante de tiempo t .
- ¿Cuál es el impacto sobre el valor esperado y varianza del precio si η crece?

Hint 1: El proceso de Ornstein-Uhlenbeck es el proceso de Reversión a la Media más sencillo que existe de resolver matemáticamente, ya que su solución es análoga a la solución de una ecuación diferencial no homogénea de primer orden. Luego, $f(P, t) = Pe^{\eta t}$.

Hint 2:

$$E[(\int_0^t X_s dz_s)^2] = E[\int_0^t X_s^2 ds] \text{ con } dz \text{ undiferencial de Wiener}$$

Solución

a. Se considera la transformada $f(P, t) = Pe^{\eta t}$. Además, para este caso:

$$a(P, t) = \eta(\bar{P} - P)$$

$$b(P, t) = \sigma$$

Por Lema de Itô se tiene que:

$$df = \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \eta(\bar{P} - P) \frac{\partial f}{\partial P} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 f}{\partial P^2} \right] dt + \sigma \frac{\partial f}{\partial P} dz$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \eta P e^{\eta t}, \quad \frac{\partial f}{\partial P} = e^{\eta t}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial P^2} = 0$$

Reemplazando las derivadas parciales en la fórmula queda:

$$df = [\eta P e^{\eta t} + \eta(\bar{P} - P)e^{\eta t}]dt + \sigma e^{\eta t} dz$$

$$df = [\eta P e^{\eta t} + \eta \bar{P} e^{\eta t} - \eta P e^{\eta t}]dt + \sigma e^{\eta t} dz$$

$$df = \eta \bar{P} e^{\eta t} dt + \sigma e^{\eta t} dz$$

Resolviendo la ecuación diferencial estocástica:

$$\int_0^t df = \int_0^t \eta \bar{P} e^{\eta s} ds + \int_0^t \sigma e^{\eta s} dz_s$$

$$P_t e^{\eta t} - P_0 = \bar{P} \int_0^t \eta e^{\eta s} ds + \int_0^t \sigma e^{\eta s} dz_s$$

$$P_t e^{\eta t} = P_0 + \bar{P}(e^{\eta t} - 1) + \int_0^t \sigma e^{\eta s} dz_s$$

$$P_t = P_0 e^{-\eta t} + \bar{P}(1 - e^{-\eta t}) + \int_0^t \sigma e^{\eta s - \eta t} dz_s$$

Dado que $E[dz_s] = 0$, se tiene que:

$$E\left[\int_0^t \sigma e^{\eta s - \eta t} dz_s\right] = \int_0^t \sigma e^{\eta s - \eta t} E[dz_s] = 0$$

Por tanto, al aplicar la esperanza a toda la expresión se obtiene:

$$E[P_t] = P_0 e^{-\eta t} + \bar{P}(1 - e^{-\eta t})$$

b. Por definición:

$$VAR[P_t] = E[(P_t - E[P_t])^2]$$

Utilizando lo resuelto en a):

$$VAR[P_t] = E[(P_t - E[P_t])^2] = E\left[\left(\int_0^t \sigma e^{\eta s - \eta t} dz_s\right)^2\right]$$

$$VAR[P_t] = E[(\sigma^2 e^{-2\eta t} (\int_0^t e^{\eta s} dz_s)^2)] = \sigma^2 e^{-2\eta t} E[(\int_0^t e^{\eta s} dz_s)^2]$$

Resolviendo la integral estocástica y usando el *hint* 2, se obtiene:

$$VAR[P_t] = \sigma^2 e^{-2\eta t} E[(\int_0^t e^{\eta s} dz_s)^2] = \sigma^2 e^{-2\eta t} E[\int_0^t e^{2\eta s} ds]$$

Luego,

$$VAR[P_t] = \sigma^2 e^{-2\eta t} E\left[\int_0^t e^{2\eta s} ds\right] = \frac{\sigma^2}{2\eta} e^{-2\eta t} (e^{2\eta t} - 1) = \frac{\sigma^2}{2\eta} (1 - e^{-2\eta t})$$

c. El parámetro η controla el tamaño o la velocidad de ajuste hacia el nivel de largo plazo, y se denomina parámetro de reversión a la media o velocidad de ajuste. De este modo, el crecimiento de η permite acercarse al valor del precio en el largo plazo \bar{P} . En el caso de la varianza, permite aproximarse a la varianza estacionaria $\frac{\sigma^2}{2\eta}$.

Problema 7.5

- a. Para un proceso de Itô X_t e Y_t , demostrar la integración por partes:

$$\int_0^t X_s dY_s = X_t Y_t - X_0 Y_0 - \int_0^t Y_s dX_s - \int_0^t dX_s dY_s$$

- b. Mostrar el caso cuando $X_t = f_t$ e $Y_t = b_t$ donde, además, f_t y b_t son independientes (asuma que $b_0 = 0$).

Solución

- a. Usando la regla del producto estocástico se tiene:

$$d(X_t Y_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t + dX_t dY_t$$

$$X_t dY_t = d(X_t Y_t) - Y_t dX_t - dX_t dY_t$$

Integrando:

$$\int_0^t X_s dY_s = \int_0^t d(X_t Y_t) - \int_0^t Y_t dX_t - \int_0^t dX_t dY_t$$

$$\int_0^t X_s dY_s = X_t Y_t - X_0 Y_0 - \int_0^t Y_s dX_s - \int_0^t dX_s dY_s$$

b. Reemplazando $X_t = f_t$ e $Y_t = b_t$, la proposición queda:

$$\int_0^t f_s db_s = f_t b_t - \int_0^t f_s db_s - \int_0^t df_s db_s$$

Con $b_0 = 0$. Por la regla de cálculo de Itô, $dt * db_t = 0$, con lo que la última integral desaparece. En tanto, dado que db_t no está en df_t (son independientes), el resultado es:

$$\int_0^t f_s db_s = f_t b_t - \int_0^t b_s df_s$$

Esto es lo que ocurre cuando se integra por partes y las dos funciones son independientes.

Problema 7.6 (Puente Browniano)

a. Verificar que el proceso:

$$Y_t = A(1-t) + Bt + (1-t) \int_0^t \frac{db_s}{1-s}, \quad 0 \leq t < 1$$

es una solución de:

$$dY_t = \frac{B - Y_t}{1-t} dt + db_t, \quad 0 \leq t < 1, Y_0 = A$$

b. Mostrar que $\lim_{t \rightarrow 1} Y_t = B$ con probabilidad 1.

c. Encontrar la media y covarianza de Y_t para $A = B = 0$.

d. Verificar que

$$X_t := b_t - tb_1, \quad 0 \leq t < 1$$

tiene la misma distribución que Y_t .

Hint: Utilice la isometría de Itô:

$$E \left[\left(\int_0^t f_s dz_s \right)^2 \right] = E \left[\int_0^t f(s)^2 ds \right]$$

Solución

a. Diferenciando la primera ecuación, se tiene:

$$dY_t = Ad(1-t) + Bdt + d\left((1-t) \int_0^t \frac{db_s}{1-s}\right), \quad 0 \leq t < 1$$

$$dY_t = -Adt + Bdt + d\left((1-t) \int_0^t \frac{db_s}{1-s}\right), \quad 0 \leq t < 1$$

$$dY_t = (B-A)dt + d\left((1-t) \int_0^t \frac{db_s}{1-s}\right), \quad 0 \leq t < 1$$

Usando la regla de producto estocástico, se requiere tomar la derivada de la integral. En primera instancia se pensaría en usar el segundo teorema fundamental del cálculo, sin embargo, no se sabe cómo aplicar a una integral estocástica. Por ello, se procede a aplicar integración por partes (notar que $b_0 = 0$). Esto es en forma genérica cuando son independientes:

$$\int_0^t f_s db_s = f_t b_t - \int_0^t b_s df_s$$

Aquí $f(s) = (1-s)^{-1}$. Diferenciando queda $df_s = \frac{ds}{(1-s)^2}$.

Entonces, reemplazando se obtiene:

$$\int_0^t \frac{db_s}{1-s} = \frac{b_t}{1-t} - \int_0^t \frac{b_s ds}{(1-s)^2}$$

Luego, diferenciando la ecuación anterior:

$$d \int_0^t \frac{db_s}{1-s} = d \frac{b_t}{1-t} - d \int_0^t \frac{b_s ds}{(1-s)^2}$$

$$d \int_0^t \frac{db_s}{1-s} = \frac{db_t}{1-t} + \frac{b_t dt}{(1-t)^2} + db_t dt - \frac{b_t dt}{(1-t)^2} = \frac{db_t}{1-t}$$

Recordar que $db_t dt = 0$. Por tanto, regresando a Y_t se tiene:

$$dY_t = (B - A)dt + d\left((1-t) \int_0^t \frac{db_s}{1-s}\right), \quad 0 \leq t < 1$$

Se debe notar que la diferencial del producto es:

$$d\left((1-t) \int_0^t \frac{db_s}{1-s}\right) = -dt \int_0^t \frac{db_s}{1-s} + (1-t)d \int_0^t \frac{db_s}{1-s} - dt d\left(\int_0^t \frac{db_s}{1-s}\right)$$

Por lo tanto:

$$dY_t = (B - A)dt - dt \int_0^t \frac{db_s}{1-s} + (1-t)d \int_0^t \frac{db_s}{1-s} - dt d\left(\int_0^t \frac{db_s}{1-s}\right)$$

$$dY_t = (B - A)dt - dt \int_0^t \frac{db_s}{1-s} + (1-t) \frac{db_t}{1-t} - dt \frac{db_t}{1-t}$$

Dado que $dt db_t = 0$, lo anterior corresponde a:

$$dY_t = (B - A)dt - dt \int_0^t \frac{db_s}{1-s} + db_t$$

$$dY_t = \left((B - A) - \int_0^t \frac{db_s}{1-s}\right)dt + db_t$$

Lo que se requiere demostrar es:

$$dY_t = \frac{B - Y_t}{1-t} dt + db_t$$

Entonces:

$$B - A - \int_0^t \frac{db_s}{1-s} = \frac{B - Y_t}{1-t}$$

Multiplicando la ecuación por $(1-t)$:

$$B(1-t) - A(1-t) - (1-t) \int_0^t \frac{db_s}{1-s} = B - Y_t$$

Lo que es equivalente a:

$$B(1-t) - A(1-t) - (1-t) \int_0^t \frac{db_s}{1-s} = B - A(1-t) - Bt - (1-t) \int_0^t \frac{db_s}{1-s}$$

Lo que demuestra que Y_t es solución de la ecuación diferencial estocástica.

b. Considerando:

$$Y_t = A(1-t) + Bt + (1-t) \int_0^t \frac{db_s}{1-s}$$

Se tiene:

$$\lim_{t \rightarrow 1} Y_t = Bt + (1-t) \lim_{t \rightarrow 1} \int_0^t \frac{db_s}{1-s}$$

Para que $(1-t) \lim_{t \rightarrow 1} \int_0^t \frac{db_s}{1-s}$ sea 0, debe cumplirse que:

$$\left| \int_0^t \frac{db_s}{1-s} \right| < \infty$$

Regresando a la ecuación del límite se tiene:

$$\lim_{t \rightarrow 1} Y_t = Bt + \lim_{t \rightarrow 1} \int_0^t \frac{(1-t)db_s}{1-s}$$

Considerando la varianza para analizar la convergencia, se llega a:

$$VAR(Y_t) = \left(\int_0^t \frac{(1-t)db_s}{1-s} \right)^2$$

Identificando f_s como:

$$f_s = \frac{1-t}{1-s}$$

$$VAR(Y_t) = E\left[\left(\int_0^t \frac{(1-t)db_s}{1-s}\right)^2\right] = E[(1-t)^2 \left(\int_0^t \frac{db_s}{1-s}\right)^2]$$

Por la isometría de Itô:

$$E[(1-t)^2 \left(\int_0^t \frac{db_s}{1-s}\right)^2] = E[(1-t)^2 \int_0^t \frac{ds}{(1-s)^2}]$$

Por cálculo elemental esto es equivalente a:

$$E\left[(1-t)^2 \int_0^t \frac{ds}{(1-s)^2}\right] = (1-t)^2 \frac{t}{1-t} = t(1-t) < \infty$$

Entonces se comprueba que:

$$\lim_{t \rightarrow 1} Y_t = Bt + (1-t) \lim_{t \rightarrow 1} \int_0^t \frac{db_s}{1-s}$$

$$\lim_{t \rightarrow 1} Y_t = B$$

c. En este caso:

$$Y_t = (1-t) \int_0^t \frac{db_s}{1-s}$$

La varianza se obtiene de b), la que corresponde a:

$$E[Y_t^2] - E[Y_t]^2 = E[Y_t^2] = t(1-t)$$

En cuanto a la media, esta es cero por proposición.

Ahora, asumiendo sin pérdida de generalidad que $s \leq t$, y que con la clave de separar la integral de 0 a t a una integral de 0 a s y otra de s a t , se tiene que la covarianza corresponde a:

$$Cov(Y_t, Y_s) = E[Y_t Y_s] - E[Y_t] * E[Y_s]$$

Notar que $E[Y_t] = 0$. Dado esto, lo anterior queda:

$$Cov(Y_t, Y_s) = E[Y_t Y_s]$$

Notar que como $s \leq t$, para la primera integral se toma $E \left[\left(\int_0^s \frac{db_u}{1-u} \right)^2 \right]$. Esto es porque en la covarianza se considera el mínimo valor, y luego queda $E \left[\int_0^s \frac{db_u}{1-u} \right] E \left[\int_0^t \frac{db_v}{1-v} \right]$.

$$E[Y_t Y_s] = (1-s)(1-t) E \left[\left(\int_0^s \frac{db_u}{1-u} \right)^2 \right] + (1-s)(1-t) E \left[\int_0^s \frac{db_u}{1-u} \right] E \left[\int_0^t \frac{db_v}{1-v} \right]$$

Recordar que $E \left[\int_0^x f_k db_k \right] = 0$. Entonces, se tiene:

$$E[Y_t Y_s] = (1-s)(1-t) E \left[\left(\int_0^s \frac{db_u}{1-u} \right)^2 \right]$$

Por isometría de Itô:

$$E \left[\left(\int_0^t \frac{db_u}{1-u} \right)^2 \right] = E \left[\int_0^s \frac{du}{(1-u)^2} \right] = \frac{s}{1-s}$$

Luego se tiene:

$$E[Y_t Y_s] = (1-s)(1-t) \frac{s}{1-s} = s(1-t)$$

Notar que para $s = t$ se recupera la varianza que fue obtenida usando Isometría de Itô.

d. Para la media se tiene:

$$E[X_t] = E[b_t - tb_1] = 0 - t0 = 0$$

Para la covarianza, se recuerda que:

$$Cov[b_s b_t] = E[b_s b_t] - E[b_s] E[b_t] = E[b_s b_t] = \min(s, t)$$

Resolviendo, se llega a:

$$E[X_t X_s] = E[(b_s - sb_1)(b_t - tb_1)]$$

$$E[X_t X_s] = E[b_s b_t - tb_1 b_s - sb_1 b_t + stb_1^2]$$

$$E[X_t X_s] = E[b_s b_t] - E[tb_1 b_s] - E[sb_1 b_t] + E[stb_1^2]$$

$$E[X_t X_s] = \min(s, t) - t \min(s, 1) - s \min(t, 1) + st$$

$$E[X_t X_s] = \min(s, t) - ts - st + st$$

$$E[X_t X_s] = \min(s, t) - 2st + st$$

$$E[X_t X_s] = \min(s, t) - st$$

Ahora si $s \leq t$, entonces:

$$s - st = (1 - t)$$

Se obtiene el mismo resultado que el hallado en la parte c).

Problema 7.7

Resuelva la siguiente ecuación diferencial estocástica no lineal (caso particular):

$$dX_t = -\frac{1}{2}\alpha^2 X_t dt + \alpha \sqrt{1 - X_t^2} dz$$

Solución

Sea la ecuación:

$$dX_t = -\frac{1}{2}\alpha^2 X_t dt + \alpha \sqrt{1 - X_t^2} dz$$

Considerando que la ecuación de Stratonovich corresponde a:

$$dX_t = \frac{1}{2}b(X_t)b'(X_t)dt + b(X_t)dz$$

se establecen las siguientes relaciones entre la igualdad original y la de Stratonovich, teniendo entonces lo siguiente:

$$dX_t = \frac{1}{2}\alpha \sqrt{1 - X_t^2} \alpha \frac{\frac{1}{2}(-2X_t)}{\sqrt{1 - X_t^2}} dt + \alpha \sqrt{1 - X_t^2} dz$$

En base a ello, considerando que $b(X_t) = \alpha \sqrt{1 - X_t^2}$, se obtiene que la ecuación de Stratonovich tiene la siguiente solución:

$$X_t = h^{-1}(W_t + h(0))$$

Con:

$$h(x) = \int_0^x \frac{ds}{b(s)}$$

$$h(x) = \int_0^x \frac{ds}{\alpha \sqrt{1 - X_s^2}}$$

Por tanto, dado que lo anterior corresponde a una integral trigonométrica inversa, se llega a:

$$h(x) = \frac{1}{\alpha} \text{sen}^{-1}(x)$$

Para el caso que $x = x_0$ queda:

$$h(x_0) = \frac{1}{\alpha} \text{sen}^{-1}(x_0)$$

Entonces, regresando a la solución:

$$X_t = h^{-1}(W_t + h(0))$$

$$X_t = h^{-1}\left(\frac{1}{\alpha} \text{sen}^{-1}(W_t + \frac{1}{\alpha} \text{sen}^{-1} x_0)\right)$$

Se debe considerar que el -1 del superíndice anterior es una función inversa y no un elevado a -1. Finalmente, reordenando la solución resulta:

$$X_t = \alpha \text{sen}\left(W_t + \frac{1}{\alpha} \text{sen}^{-1} x_0\right)$$

Problema 7.8

Sea la ecuación diferencial estocástica no lineal:

$$dX_t = \left(-X_t^3 + \left(\alpha + \frac{1}{2}\sigma^2 \right) X_t \right) dt + \sigma X_t dz$$

$$X(0) = X_0 > 0$$

- En base a su forma funcional, ¿a qué fenómenos podría corresponder dicha ecuación?
- Represente gráficamente un camino aleatorio que se derive de esta ecuación, mencionando explícitamente el significado de las constantes α y σ^2 .
- Verifique que:

$$X_t = \frac{X_0 e^{\alpha t + \sigma z}}{\sqrt{1 + 2X_0^2 \int_0^t e^{2\alpha t + 2\sigma z} ds}}$$

es solución de la ecuación.

Solución

- Se tiene la ecuación:

$$dX_t = \left(-X_t^3 + \left(\alpha + \frac{1}{2}\sigma^2 \right) X_t \right) dt + \sigma X_t dz$$

La forma funcional de la expresión anterior corresponde a un proceso de Itô, específicamente a un Movimiento Browniano con Reversión a la Media.

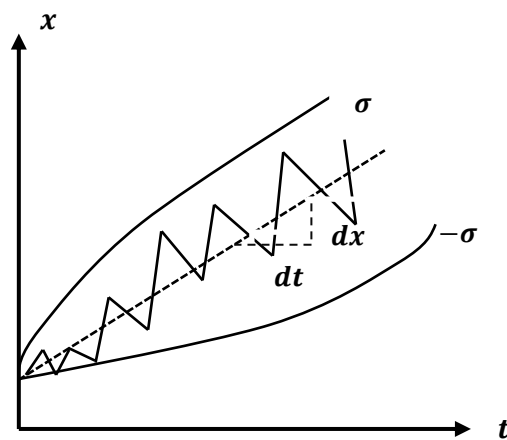
- Para este caso se tiene que:

$$\bar{x} = \alpha + \frac{1}{2}\sigma^2 = \text{constante}$$

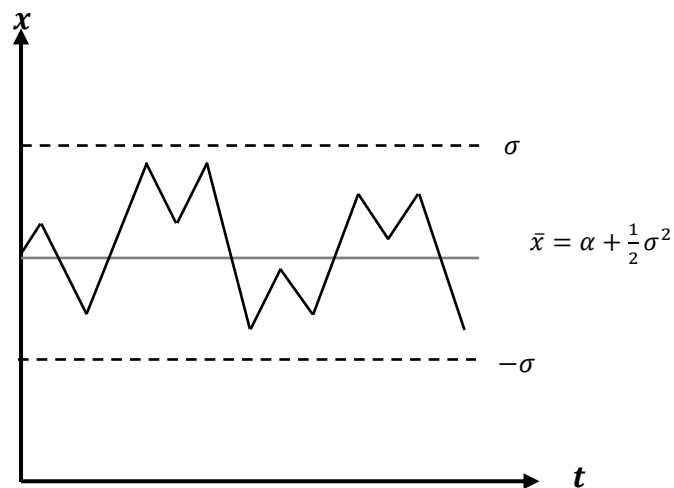
De lo anterior se presenta:

- α : velocidad de reversión.
- σ^2 : varianza de la componente estocástica ($\pm\sigma$ indica los límites superior e inferior del Movimiento Browniano con Reversión a la Media).
- α : tasa de variación de x respecto a t , es decir, $\alpha = \frac{dx}{dt}$.

Gráficamente lo anterior se puede ver de la siguiente forma:



Como \bar{x} es constante, se tiene:



Por tanto, un movimiento Browniano con reversión a la media puede describir comportamientos de precios de *commodities* en el tiempo (con ajuste).

c. Sea la forma general:

$$dX_t = a(t, X)dt + b(t, X)dz$$

En este caso:

$$a(t, X) = -X_t^3 + \left(\alpha + \frac{1}{2}\sigma^2\right)X_t$$

$$b(t, X) = \sigma X_t$$

Se tiene por el Lema de Itô que:

$$dF_t = \left[\frac{\partial F}{\partial t} + a(t, X) \frac{\partial F}{\partial P} + \frac{1}{2} b(t, X)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial P^2} \right] dt + b(t, X) \frac{\partial F}{\partial P} dz$$

Considerando la transformada $F_t = \ln(X_t^2)$ y reemplazando en la ecuación anterior, se tiene:

$$dF_t = \left[0 + (-X_t^3 + (\alpha + \frac{1}{2}\sigma^2)X_t) \frac{2}{X_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 X_t^2 \frac{-2}{X_t^2} \right] dt + \sigma X_t \frac{2}{X_t} dz$$

Simplificando queda:

$$dF_t = \left[-2X_t^2 + 2\left(\alpha + \frac{1}{2}\sigma^2\right) - \sigma^2 \right] dt + 2\sigma dz$$

$$dF_t = [-2X_t^2 + 2\alpha + \sigma^2 - \sigma^2] dt + 2\sigma dz$$

$$dF_t = [-2X_t^2 + 2\alpha] dt + 2\sigma dz$$

$$d(\ln(X_t^2)) = 2(-X_t^2 + \alpha) dt + 2\sigma dz$$

Integrando se obtiene:

$$\int_0^t d(\ln(X_s^2)) = \int_0^t 2(-X_s^2 + \alpha) ds + \int_0^t 2\sigma dz$$

$$\ln(X_t^2) - \ln(X_0^2) = \int_0^t -2X_s^2 ds + 2 \int_0^t \alpha ds + \int_0^t 2\sigma dz$$

$$\ln\left(\frac{X_t^2}{X_0^2}\right) = \int_0^t -2X_s^2 ds + 2\alpha t + \int_0^t 2\sigma dz$$

Exponenciando resulta:

$$e^{\ln\left(\frac{X_t^2}{X_0^2}\right)} = e^{\int_0^t -2X_s^2 ds + 2\alpha t + \int_0^t 2\sigma dz}$$

$$\frac{X_t^2}{X_0^2} = e^{-\int_0^t 2X_s^2 ds} e^{2\alpha t + \int_0^t 2\sigma dz}$$

$$X_t^2 e^{\int_0^t 2X_s^2 ds} = X_0^2 e^{2\alpha t + 2\sigma z}$$

Multiplicando y dividiendo por 2, para que quede la derivada de $e^{\int_0^t 2X_s^2 ds}$, se tiene:

$$\frac{1}{2} (2X_t^2 e^{\int_0^t 2X_s^2 ds}) = X_0^2 e^{2\alpha t + 2\sigma z}$$

Integrando la ecuación para poder despejar X_t se llega a:

$$\frac{1}{2} \int_0^t 2X_s^2 e^{\int_0^t 2X_s^2 ds} ds = \int_0^t X_0^2 e^{2\alpha s + 2\sigma z} ds$$

$$e^{\int_0^t 2X_s^2 ds} - 1 = 2X_0^2 \int_0^t e^{2\alpha s + 2\sigma z} ds$$

$$e^{\int_0^t 2X_s^2 ds} = 1 + 2X_0^2 \int_0^t e^{2\alpha s + 2\sigma z} ds$$

Aplicando el logaritmo natural a la ecuación:

$$\ln e^{\int_0^t 2X_s^2 ds} = \ln \left(1 + 2X_0^2 \int_0^t e^{2\alpha s + 2\sigma z} ds \right)$$

$$\int_0^t 2X_s^2 ds = \ln \left(1 + 2X_0^2 \int_0^t e^{2\alpha s + 2\sigma z} ds \right)$$

Luego, derivamos la ecuación:

$$2X_t^2 = \frac{2X_0^2 e^{2\alpha t + 2\sigma z}}{1 + 2X_0^2 \int_0^t e^{2\alpha s + 2\sigma z} ds}$$

$$X_t^2 = \frac{X_0^2 e^{2(\alpha t + \sigma z)}}{1 + 2X_0^2 \int_0^t e^{2\alpha s + 2\sigma z} ds}$$

Finalmente, aplicando raíz se obtiene la solución $X_t = \frac{X_0 e^{(\alpha t + \sigma z)}}{\sqrt{1 + 2X_0^2 \int_0^t e^{2\alpha s + 2\sigma z} ds}}$.

Capítulo 8: Optimización dinámica estocástica

En el mundo real, y particularmente en la explotación de minas, existen una gran cantidad de problemas de optimización que dependen de variables inciertas en el tiempo (estocásticas) o que en la práctica se comportan como tales. Ejemplos de estas son el porcentaje de recuperación metalúrgica, el tipo de cambio, el monto de inversión, la ley del recurso, la ocurrencia de eventos geomecánicos, los precios de los insumos, y por sobre todos estos el precio de venta del *commodity* mineral a explotar. Este último es el componente de riesgo más importante en una operación minera, en términos de explicar la mayor cantidad de varianza del *VAN* (Rendu, 2002).

Por esto, es esencial considerar la incertidumbre en la búsqueda de una solución óptima al problema de la explotación de los recursos minerales, sea este el encontrar el LOM, la forma de la envolvente económica o la cantidad y lugar desde donde extraer los recursos en el tiempo. De lo contrario, se podrían estar tomando riesgos desconocidos (o al menos no cuantificados), alejándose así de la solución óptima en términos del *VAN* esperado.

En este capítulo se estudiarán los métodos principales para resolver problemas de optimización dinámica estocástica. Estos métodos toman como base el cálculo estocástico estudiado en el capítulo anterior, y el principio de optimalidad de Bellman (estudiado en el Capítulo 5), así como con el principio del máximo de Pontryagin (estudiado en el Capítulo 6). Debe notarse

que el cálculo de variaciones estocástico se encuentra mucho menos desarrollado en la literatura, razón por la que se excluye en este capítulo.

8.1 Planteamiento del problema

Al estudio de las decisiones óptimas realizadas bajo incertidumbres se le conoce también como programación estocástica. El término se relaciona con la programación matemática y los procedimientos de optimización algorítmica (Birge y Louveaux, 2011). En otras palabras, es un problema que trata de resolver la maximización o minimización de una función objetivo que actúa sobre una variable de control, que es definida sobre varios periodos y que está sujeta a restricciones de estado y/o de borde. El problema se puede escribir de forma general como:

$$\max_u E \left(\int_0^T g(t, x, u) dt + h(T, x(T)) \right) \quad (8.1)$$

s. a.

$$dx = a(t, x, u)dt + b(t, x, u)dz \quad (8.2)$$

$$x(0) = x_0 \quad (8.3)$$

Donde:

- $g(t, x, u)dt$: es la función de beneficio.
- $h(T, x(T))$: corresponde al valor residual.
- $dx = a(t, x, u)dt + b(t, x, u)dz$: es la ecuación de estado de la variable de estado x , que depende de una función $a(t, x, u)$ y de $b(t, x, u)$, la última sujeta a una aleatoriedad definida por el Movimiento Browniano Geométrico dz .
- $x(0) = x_0$: corresponde al valor inicial de la variable de estado x .

En este caso el funcional objetivo es el valor esperado de la suma de los beneficios en cada instante de tiempo. Nótese que necesariamente se requerirá el uso de un operador estadístico (en este caso el valor esperado) para transformar de esta forma los múltiples valores que toma el funcional en el caso estocástico en un valor único.

Un aspecto relevante del problema (8.1)-(8.3) se refiere a que en este caso el agente que debe resolverlo (típicamente la empresa minera dueña del recurso) deberá tomar en consideración la exposición al riesgo que el proyecto genera, y su propia aversión al riesgo. En teoría de la decisión, en el caso en el que el agente económico sea neutral al riesgo éste siempre optará por la opción que maximiza el valor esperado, independiente de la dispersión de la solución. Sin embargo, en la práctica, las compañías tienden a ser aversas al riesgo. En este caso, el funcional del problema será una combinación entre la maximización del valor esperado y la minimización de varianza de la distribución del VAN. Así por ejemplo, Roques (2008) postula que un funcional más realista debiera considerar una combinación entre el valor esperado y alguna medida de la dispersión así como la aversión al riesgo del agente maximizador. Un ejemplo sería el siguiente:

$$\max_u E(J(f(x, u))) - \lambda \text{Var}(J(f(x, u))) \quad (8.4)$$

Donde λ es una constante que multiplica a la varianza del funcional objetivo J y que depende del nivel de aversión al riesgo del cliente, de modo que a mayor varianza y a mayor λ positivo, menor será el estadístico a maximizar.

Un segundo elemento de interés, y que suele aparecer en los problemas de optimización dinámica estocástica en minería, se refiere a que cuando se trabaja con variables estocásticas es común plantear restricciones que definan los cambios en las variables principales del problema de la mina, como en los siguientes casos:

$dP = \alpha dt + \sigma dz$: Define el cambio de precio de un *commodity* mineral en el tiempo con un componente estocástico.

$dS = -qdt + \sigma dz$: Define las reservas remanentes, que se reducen según una tasa de producción q , pero que además pueden crecer como resultado de la exploración, o, por el contrario, disminuir como resultado de estudios geológicos que ajusten o descarten la presencia de reservas. Estos resultados se comportan de manera aleatoria y no se conocen sino hasta el periodo t , por lo que es necesario incorporarlos como objetos aleatorios al modelo.

Para la resolución de un problema de esta naturaleza se puede ocupar cálculo variacional estocástico, programación dinámica estocástica o control óptimo estocástico. En este capítulo, sin embargo, se explicarán solamente el control óptimo estocástico y la programación dinámica estocástica, por ser técnicas con mayor desarrollo a nivel teórico. Si el lector se encuentra interesado en estudiar las bases del cálculo de variaciones estocástico se recomienda la lectura de Cresson y Darses (2007).

A continuación, se presenta un caso práctico de uso de control óptimo en finanzas, que explica cómo las herramientas de matemática financiera podrían haber evitado la mala calificación de deuda en la crisis *subprime*. Además, se muestra de forma general cómo definir la razón de deuda óptima que maximiza el valor neto con los métodos estudiados en el capítulo.

RECUADRO 8.1

APLICACIONES PRÁCTICAS DE CONTROL OPTIMO ESTOCÁSTICO

Quizás los campos de aplicación más fértiles para el estudio y aplicación de control óptimo estocástico en los últimos años son la ingeniería matemática y las finanzas. En este apartado se estudiará la crisis *subprime* que explotó en 2007 con las herramientas de control óptimo estocástico.

Como se menciona en Stein (2009), la crisis *subprime* fue una crisis financiera que ocurrió principalmente en EE.UU. y Europa como consecuencia de la desconfianza crediticia generada cuando los mercados se dan cuenta de la gran cantidad de hipotecas basura o de alto riesgo que los agentes económicos habían adquirido creyendo en los ratings que las agencias calificadoras de riesgo les asignaban, pero que muchas veces estaban mal calculados y que en realidad resultaban tener altas probabilidades de impago. Fue tanto el desajuste que, al revisarlos, algunos activos calificados como AAA fueron rebajados a bonos basura en solo días. Esto ocurrió porque el riesgo de la deuda se calculó muchas veces como una estimación de la distribución de probabilidad acumulada de los flujos futuros basados en las medias y varianzas históricas, o con el método de *Value at Risk*. Ambos métodos son cuestionables e ignoran que las rentabilidades entre empresas están altamente correlacionadas porque suelen poseer grandes participaciones de otras empresas.

Por el contrario, las matemáticas financieras intentan modelar los precios de acciones o bolsas que se comportan de forma aleatoria como Movimientos Brownianos Geométricos. Se proponen varios

modelos que maximizan el valor de un portafolio de acciones en un tiempo definido y generan alarmas (*Early Warning Signals*) ante las cuales se deben desechar acciones que parezcan nocivas.

Un modelo propuesto es el de Jerome Stein (2009). A continuación, se explica en detalle.

Sean:

$X(t)$ = Valor neto financiero

$K(t)$ = Activos

$L(t)$ = Deuda

$P(t)$ = Precio de los activos

$Q(t)$ = Cantidad de activos

Se puede definir el valor financiero como:

$$X(t) = K(t) - L(t) = P(t)Q(t) - L(t)$$

En este la variable de control es la razón de deuda:

$$f(t) = \frac{L(t)}{X(t)}$$

Y la función a optimizar es:

$$W^*(X, t) = \max_f E \left(\ln \left(\frac{X(t)}{X(0)} \right) \right)$$

$$E(X(t)) = X(0)e^{z(X,t)}$$

Así, se busca el nivel óptimo de apalancamiento para maximizar el crecimiento del valor esperado. A continuación, se calcula dX .

$$dX(t) = dK(t) - dL(t) = dP(t)Q(t) + P(t)dQ(t) - dL(t)$$

Además, la inversión puede escribirse como:

$$I(t) = P(t)dQ(t)$$

Por lo que la derivada se reescribe como:

$$dX(t) = K(t)dP(t)/P(t) + I(t) - dL(t)$$

Además, la deuda se define como los gastos menos los ingresos, el consumo se denota $C(t)$, el ingreso $Y(t) = \beta(t)K(t)$, que es el producto de la productividad $\beta(t)$ y el capital $K(t)$. Los gastos se definen como la deuda a una tasa de interés $i(t)$. De esta forma:

$$dL(t) = i(t)L(t) + P(t)dQ(t) - \beta(t)K(t)$$

En consecuencia:

$$dX(t) = K(t) \left[\frac{dP(t)}{P(t)} + \beta(t)dt \right] - i(t)L(t)dt - C(t)dt$$

Considere entonces el problema de escoger la razón de deuda como una función de los valores pasados del precio $P(t)$, de la tasa de interés $i(t)$ y de la productividad de capital para maximizar el valor esperado del logaritmo del valor neto según los siguientes criterios:

$$\max_{f(t)} E[\ln(X(T))]$$

s.a.

$$X(0) = 1$$

La decisión del problema debe ser encontrar un $X(t)$ que sea solución de

$$dX(t) = X(t)[(1 + f(t))a(t) + (\beta(t) - i(t))f(t)]dt + X(t)(1 + f(t))\sigma dz(t)$$

Utilizando los resultados de Itô:

$$d \ln(X(t)) = [(1 + f(t))a(t) + (\beta(t) - i(t))f(t) + (1 + f(t))\sigma dz(t) - \left(\frac{1}{2}\right)(1 + f(t))^2 \sigma^2 dt]$$

O en su forma integral:

$$\begin{aligned} \ln(X(t)) = \ln(X(0)) + \int \left\{ (1 + f(\tau))a(\tau) + (\beta(\tau) - i(\tau))f(\tau) - \left(\frac{1}{2}\right)(1 + f(\tau))^2 \sigma^2 \right\} dt \\ + \int (1 + f(\tau))\sigma dz(\tau) \end{aligned}$$

Luego, el valor esperado de la ecuación es:

$$E[\ln(X(t))] = \ln(X(0)) + E\left[\int \left\{ (1 + f(\tau))a(\tau) + (\beta(\tau) - i(\tau))f(\tau) - \left(\frac{1}{2}\right)(1 + f(\tau))^2 \sigma^2 \right\} dt\right]$$

Y el integrando es maximizado cuando:

$$a(t) + \beta(t) - i(t) - (1 + f(t))\sigma^2 = 0$$

Así, la razón de deuda óptima resulta ser:

$$f^*(t) = \frac{[a(t) + \beta(t) - i(t) - \sigma^2]}{\sigma^2}$$

8.2 Programación dinámica estocástica

A continuación se caracteriza el funcional objetivo $J(t, x)$ mediante programación dinámica para luego derivar la ecuación diferencial parcial de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB). En lugar de tratar de encontrar el u que minimiza o maximiza el problema se busca determinar el valor del funcional $J^*(t, x)$, donde u^* es la variable de control.

Es decir, se buscará resolver el siguiente problema:

$$J^*(t, x) = \max_u E \left(\int_0^T g(t, x, u) dt + h(T, x(T)) \right) \quad (8.5)$$

A este problema se le aplican los mismos principios que se utilizan en programación dinámica determinística, con la salvedad de que, en este caso, al diferenciar aparecerá un término adicional como consecuencia de la aplicación del Lema de Itô. Ahora, por el principio de optimalidad de Bellman, obviando por el momento el valor residual (más adelante se corrige esto), y recordando que para que u^* sea un óptimo a lo largo de la trayectoria se requiere que sea un óptimo cualquiera independiente del momento desde el cual se empieza a analizar la trayectoria. En particular, si se empieza el análisis en el instante presente se debe optimizar el presente más todo el intervalo de tiempo que siga de ahí en adelante. Esto se puede apreciar en la Figura 8.1, donde se observa el principio de optimalidad, donde la función $u(t)$ es el control óptimo como una función del tiempo. Si $u(t)$ es óptima comenzando en t , es claro que también lo es empezando en t_1 .

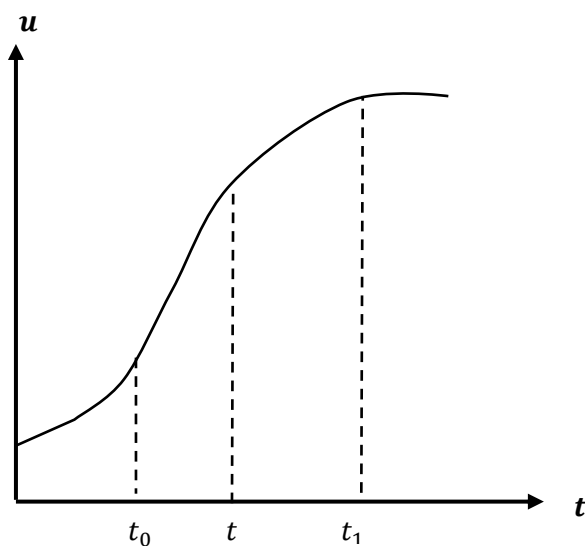


Figura 8.1. Principio de optimalidad.

Entonces, el funcional óptimo $J^*(t, x)$, debe satisfacer la siguiente igualdad:

$$J^*(t, x) = \max_u E \left(\int_0^T g(t, x, u) dt + J^*(t + dt, x + dx) \right) \quad (8.6)$$

La única diferencia con la ecuación derivada en el Capítulo 5 para un escenario determinístico es que se adiciona el operador de valor esperado $E(\cdot)$, y dado que la ecuación de estado dx es estocástica, en particular, x debe ser también considerada estocástica.

A continuación, se expandirá la expresión utilizando el teorema de Taylor, aplicando el Lema de Itô como sigue:

$$J^*(t, x) = \max_u E \left(g(t, x, u) dt + J^*(t, x) + J_t^*(t, x) dt + J_x^*(t, x) dx + \frac{1}{2} J_{xx}^*(t, x) (dx)^2 \right) \quad (8.7)$$

En el siguiente paso, como el valor esperado es un operador lineal se puede reescribir (8.7) de la siguiente forma:

$$J^*(t, x) = \max_u \left(\begin{array}{l} E(g(t, x, u) dt) + E(J^*(t, x)) \\ + E(J_t^* dt) + E(J_x^* dx) + E\left(\frac{1}{2} J_{xx}^* (dx)^2\right) \end{array} \right) \quad (8.8)$$

Además, en el presente se conocen $g(t, x, u)$, $J^*(t, x)$ y sus derivadas, por lo que sus valores esperados son idénticos a ellos mismos. Sin embargo, a partir de la ecuación de estado se obtiene que dx depende de dz , por lo que es necesario calcularlo. De esta forma:

$$J^*(t, x) = \max_u \left(g(t, x, u)dt + J^*(t, x) + J_t^* dt + J_x^* E(dx) + \frac{1}{2} J_{xx}^* E(dx)^2 \right) \quad (8.9)$$

Finalmente, como el valor esperado de dz es cero se tiene que:

$$E(dx) = a(t, x, u)dt \quad (8.10)$$

Así, el valor del funcional se convierte en:

$$J^*(t, x) = \max_u \left(g(t, x, u)dt + J^*(t, x) + J_t^* dt + J_x^* a(t, x, u)dt + \frac{1}{2} J_{xx}^* (a(t, x, u)dt + E(b(t, x, u)dz))^2 \right) \quad (8.11)$$

Pero como dt es infinitesimal entonces $(dt)^2$ puede despreciarse, y como $E(dz)$ es cero, utilizando los resultados de la derivación de la ecuación en los capítulos pasados, queda simplemente:

$$J^*(t, x) = \max_u \left(g(t, x, u)dt + J^*(t, x) + J_t^* dt + J_x^* a(t, x, u)dt + \frac{1}{2} J_{xx}^* b^2(t, x, u)dt \right) \quad (8.12)$$

Ahora, se pueden extraer del maximizando todos aquellos elementos que no dependen de u . Además, en esta ecuación se encuentra $J^*(t, x)$ a ambos lados, por lo que se elimina y J_t^* pasa al otro lado, quedando:

$$-J_t^* dt = \max_u \left(g(t, x, u)dt + J_x^* a(t, x, u)dt + \frac{1}{2} J_{xx}^* b^2(t, x, u)dt \right) \quad (8.13)$$

Por último, se puede dividir a ambos lados por dt , resultando:

$$-J_t^* = \max_u \left(g(t, x, u) + J_x^* a(t, x, u) + \frac{1}{2} J_{xx}^* b^2(t, x, u) \right) \quad (8.14)$$

La ecuación (8.14) se conoce como la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) para problema estocástico, y permite derivar J^* . La única diferencia con la HJB determinística es el tercer término del maximizando, que aquí aparece porque x sigue un proceso de Itô. La

ecuación (8.14) corresponde a una ecuación diferencial parcial de segundo orden, que se denomina parabólica y que se comporta como la ecuación del calor (Evans, 2010).

Ahora, para derivar (8.14) se obvió el valor residual de la ecuación y para agregarlo a la solución basta con considerar la siguiente condición de borde:

$$J^*(T, x(T)) = h(T, x(T)) \quad (8.15)$$

Debido a la necesidad de estudiar ecuaciones diferenciales parciales de primer y segundo orden para resolver la HJB determinística y estocástica, respectivamente, a continuación se presenta un breve resumen de dicha teoría.

8.2.1 Ecuaciones diferenciales parciales (EDP)

Las ecuaciones diferenciales son una herramienta muy utilizada en ciencias e ingeniería porque son las que representan el cambio en los procesos del mundo físico y teórico. En términos teóricos estas representan la relación válida en cierto intervalo entre una variable y sus derivadas.

Algunos ejemplos notables de su aplicación son la ley de enfriamiento de Newton, los modelos de propagación de enfermedades e incluso la predicción de la batalla de Iwo Jima con el modelo lanchesteriano de combate (Braun, 1983). Su historia comienza de forma independiente con los trabajos de Gottfried Leibniz e Isaac Newton. Este último clasifica en 1736 las ecuaciones diferenciales de primer orden en 3 clases: las primeras dos corresponden a ecuaciones con derivadas ordinarias de uno o más variables dependientes con su respectiva variable independiente y la tercera clase involucra lo que hoy se conoce como ecuación diferencial parcial (Sasser, 1992).

Una ecuación diferencial parcial (EDP o PDE por sus siglas en inglés partial differential equations) se diferencia de una ordinaria porque a diferencia de esta última las incógnitas son funciones de diversas variables, donde figuran dichas ecuaciones y sus derivadas. En este caso una EDP debe tener como incógnita una función de al menos dos variables independientes (Mijáilov, 1978). Estas ecuaciones se emplean en formulación de procesos de la física distribuidos en espacio y tiempo, como la propagación del sonido o calor.

Estas ecuaciones, para la función $u(x_1, \dots, x_n)$, tienen la forma general:

$$F\left(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial}{\partial x_1} u, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} u, \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_1} u, \frac{\partial}{\partial x_1 x_2} u, \dots\right) = 0 \quad (8.16)$$

Donde la EDP es lineal si F es una función lineal de u y sus derivadas como se muestra:

$$F(\lambda u + \mu w) = \lambda F(u) + \mu F(w) \quad (8.17)$$

Un ejemplo de ecuación diferencial parcial es:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 0 \quad (8.18)$$

Y su solución general es:

$$u(x, y) = f(y) \quad (8.19)$$

Generalmente la solución de una EDP no es única, por lo que son necesarias condiciones adicionales para definir un resultado único. Las condiciones iniciales necesarias dependerán del tipo de ecuación que se está considerando. A continuación, se retomará el problema (8.14)-(8.15) mediante ecuaciones diferenciales parciales, como ejemplo de una resolución de estas.

Existen diferentes métodos para resolver estas de ecuaciones, los cuales dependen del tipo de EDP que se quiera encontrar (Kurmyshev y Sánchez-Yáñez, 2003), entre los cuales destacan:

- Integración.
- Transformadas integrales de Fourier y Laplace.
- Separación de variables.
- Funciones de Green.

A continuación, se explicará qué es una ecuación diferencial parcial y cómo resolverla.

Como ejemplo, si en la ecuación (8.14) se introduce: $g = 0$, $a = \alpha x$ y $b = \sigma x$ se obtiene:

$$-J_t^*(t, x) = \max_u \left\{ \alpha x J_x^*(t, x) + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 J_{xx}^*(t, x) \right\} \quad (8.20)$$

Y como lo que se busca maximizar no depende de u , el operador máximo sale de la ecuación, quedando:

$$-J_t^*(t, x) = \alpha x J_x^*(t, x) + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 J_{xx}^*(t, x) \quad (8.21)$$

Que se puede identificar como una ecuación diferencial parcial de orden 2, donde J^* es la incógnita. Es decir, J^* se encuentra derivada dos veces con respecto a las variables de las cuales es dependiente.

En general, una ecuación diferencial parcial de segundo orden se puede escribir como:

$$u(x, y) = Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu + G \quad (8.22)$$

Además, cuando la ecuación (8.22) es idéntica a cero se denomina homogénea, mientras que en el caso contrario es denominada ecuación diferencial parcial no homogénea. Esta ecuación es tan conocida que recibe distintos nombres de acuerdo a los parámetros A, B, C, D, E y F que la acompañan. Para esto se define el discriminante:

$$\Delta = B^2 + 4AC \quad (8.23)$$

Dependiendo del valor de este se tiene el tipo del comportamiento que satisfará la solución:

- Si $\Delta < 0$, la ecuación parcial de segundo orden se denomina elíptica.
- Si $\Delta = 0$, la ecuación parcial de segundo orden se denomina parabólica.
- Si $\Delta > 0$, la ecuación parcial de segundo orden se denomina hiperbólica.

Así por ejemplo, una ecuación diferencial parcial de tipo elíptica se puede obtener mediante: $A = 1, B = 0, C = 1$ y $\Delta < 0$. En este caso:

$$\Delta u(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (8.24)$$

Esta ecuación (conocida como ecuación de Laplace) describe, entre muchos otros fenómenos, la distribución estacionaria de la temperatura en una placa bidimensional.

Un ejemplo de ecuación parabólica clásica es la ecuación del calor o difusión, donde $A = 1, B = 0, C = 0$ y $\Delta = 0$ viene dada por:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} k \quad (8.25)$$

Donde $u(t, x)$ representa la temperatura del punto x en el instante u y $k > 0$ es una constante proporcional a la conductibilidad e inversamente proporcional a la densidad y al calor específico. Para determinar la solución en este caso es necesario contar con una condición

inicial de la distribución de temperatura, $u(0, x)$, junto con las condiciones de borde (Aranda, 2011).

Un ejemplo conocido de ecuación hiperbólica es la ecuación de onda, con $a = 1$, $b = 0$, $c = -1$ y $\Delta = 4 > 0$ es:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (8.26)$$

En este caso $u(t, x)$ representa el desplazamiento vertical del punto de abscisa x en el instante t . Para determinar la evolución concreta es necesario determinar la posición y distribución de velocidades verticales en instante inicial, es decir, $u(0, x)$ y $u_t(0, x)$, también se debe considerar que la cuerda permanece fija en sus extremos $u(t, 0) = u(t, L) = 0$ (Aranda, 2011).

8.2.2 Resolución ecuación HJB estocástica por EDP

En base a lo estudiado en la sub-sección anterior, la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman para el problema estocástico (8.14) posee los siguientes coeficientes.

$$A = \frac{\sigma^2 x^2}{2} > 0, \quad B = 0, \quad C = 0 \quad (8.27)$$

De aquí: $\Delta = 0$. Así, la HJB es una ecuación diferencial parcial del tipo parabólica.

Un método para resolver este tipo de ecuaciones es el llamado “de separación de variables”. En este caso se parte construyendo una función $J(t, x)$ que consiste en el producto de dos funciones, $u(t)$ y $v(x)$, una estrictamente dependiente de t y otra de x :

$$J(t, x) = u(t) v(x) \quad (8.28)$$

Derivando para encontrar las derivadas parciales de J que aparecen en la ecuación:

$$J_t = u'(t) v(x) \quad (8.29)$$

$$J_x = u(t) v'(x) \quad (8.30)$$

$$J_{xx} = u(t) v''(x) \quad (8.31)$$

Así, reemplazando las derivadas anteriores en (8.14) se obtiene:

$$-u'(t) v(x) = \alpha x u(t) v'(x) + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 u(t) v''(x) \quad (8.32)$$

La ecuación (8.32) se divide luego por $u(t)v(x)$, obteniéndose:

$$\frac{u'(t)}{u(t)} + \alpha x \frac{v'(x)}{v(x)} + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{v''(x)}{v(x)} = 0 \quad (8.33)$$

Nótese que en esta ecuación existe un primer término que depende exclusivamente de t , mientras que el segundo y tercer término dependen solo de x . De aquí, se puede definir las ecuaciones:

$$f(t) = \frac{u'(t)}{u(t)} \quad (8.34)$$

$$g(x) = \alpha x \frac{v'(x)}{v(x)} + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{v''(x)}{v(x)} \quad (8.35)$$

La única forma de que la suma de $f(t)$ y $g(x)$ sea nula es que tanto $f(t)$ como $g(x)$ sean idénticas a una constante $-\mu$ y su inversa aditiva, respectivamente. De esta manera se pueden reescribir estas funciones como:

$$f(t) = -\mu, \quad g(x) = +\mu \quad (8.36)$$

De esta forma, se logra transformar una ecuación diferencial parcial de segundo orden en dos ecuaciones diferenciales ordinarias, la primera de orden 1 y la segunda de orden 2, lo cual es más sencillo de resolver.

Ahora, al reemplazar las ecuaciones en (8.33) e integrando a ambos lados se obtiene:

$$u(t) = c e^{-\mu t} \quad (8.37)$$

$$v(x) = c_1 x^{\frac{-2\alpha + \sigma^2 - \sqrt{\gamma}}{2\sigma^2}} + c_2 x^{\frac{-2\alpha + \sigma^2 + \sqrt{\gamma}}{2\sigma^2}} \quad (8.38)$$

Con $\gamma = 4\alpha^2 - 4\alpha\sigma^2 + 8u\sigma^2 + \sigma^4$.

De aquí se obtiene que para $g = 0$, $a = \alpha x$ y $b = \sigma x$:

$$J^*(t, x) = c e^{-\mu t} \left(c_1 x^{\frac{-2\alpha + \sigma^2 - \sqrt{\gamma}}{2\sigma^2}} + c_2 x^{\frac{-2\alpha + \sigma^2 + \sqrt{\gamma}}{2\sigma^2}} \right) \quad (8.39)$$

En minería, para encontrar el VAN óptimo $J^*(t, x)$, muchas veces se tendrán que imponer condiciones a la ecuación para que esta tenga sentido técnico-económico.

Una condición que puede imponerse, si x corresponde a los recursos remanentes y t al tiempo, es que $J^*(t, 0) = 0$, es decir, que el VAN cuando no quedan recursos remanentes debe ser cero. Esta condición inmediatamente pone restricciones sobre las constantes. Reemplazando en la ecuación (8.39) se puede observar que:

$$c e^{-\mu t} \left(c_1 0^{\frac{-2\alpha + \sigma^2 - \sqrt{\gamma}}{2\sigma^2}} + c_2 0^{\frac{-2\alpha + \sigma^2 + \sqrt{\gamma}}{2\sigma^2}} \right) = 0 \quad (8.40)$$

Con restricciones como estas se pueden obtener los valores de las constantes. En este caso en particular si $\frac{-2\alpha + \sigma^2 - \sqrt{\gamma}}{2\sigma^2} < 0$, se deberá cumplir que $c_1 = 0$.

8.3 Control óptimo estocástico

A continuación se desarrollará el principio del máximo para el caso del control óptimo, método que fue analizado previamente en el Capítulo 6 para el caso determinístico. En dicho capítulo se tenía que en el caso determinístico el problema era de la siguiente forma:

Para introducir el caso estocástico lo más simple es recordar el caso determinístico. En este caso el problema es:

$$\max_u \int_0^T g(x, u) dt \quad (8.41)$$

s. a.

$$dx = a(x, u) dt \quad (8.42)$$

$$x(0) = x_0 \quad (8.43)$$

En este caso el Hamiltoniano puede escribirse como:

$$H = g(x, u) + va(x, u) \quad (8.44)$$

Para el caso estocástico se tiene que el problema es de la forma:

$$\max_u E \left(\int_0^T g(x, u) dt \right) \quad (8.45)$$

s. a.

$$dx = a(x, u)dt + b(x, u)dz \quad (8.46)$$

$$x(0) = x_0 \quad (8.47)$$

De ahí surge que para el caso estocástico hay que sumar al Hamiltoniano un último término, que es el que le aporta la estocasticidad. Así, el Hamiltoniano estocástico queda como sigue:

$$H = g(x, u) + v(t)a(x, u) + w(t)b(x, u) \quad (8.48)$$

En primer lugar se revisará el caso en el que $b(x, u)$ depende de x , y no de u , y luego se demostrará por qué el problema con b dependiendo de u no es válido.

El principio del máximo es entonces el siguiente:

- Primera condición (máximo):

$$\max_u H(u, x, t, w) \quad (8.49)$$

Se debe recordar que en el caso de que $H(u, x, v, w)$ sea una función cóncava, esta condición es equivalente a que:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = H_u = 0 \quad (8.50)$$

Si $H_{uu} < 0$ se puede encontrar un máximo en el intervalo, si por el contrario $H_{uu} = 0$, la solución debe encontrarse en los límites.

- Segunda condición (ecuación de estado):

Es la ecuación de estado y corresponde a la primera restricción del problema, esto es:

$$dx = a(x, u)dt + b(x)dz \quad (8.51)$$

Esto es equivalente a escribir:

$$dx = \frac{\partial H}{\partial v} dt + \frac{\partial H}{\partial w} dz \quad (8.52)$$

Nótese que la ecuación de estado estocástica es simplemente la ecuación de estado determinística sumado a una componente estocástica, tal como en la condición anterior.

- Tercera condición (ecuación adjunta):

La ecuación adjunta está dada por:

$$dv = -\frac{\partial H}{\partial x} dt - w dz \quad (8.53)$$

- Las condiciones de transversalidad e iniciales siguen siendo equivalentes al caso no estocástico (ver Capítulo 6).

La parte más moderna de este libro en términos de contenidos matemáticos es precisamente el control óptimo estocástico y este caso en particular se conoce desde 1965. El caso en el que b depende de u se conoce solo desde 1995 y hoy no más de un centenar de personas en el mundo se han especializado en la resolución de dicho caso.

Algo importante para recordar es que en control óptimo v depende del tiempo, al igual que w , por lo que ambas son funciones.

8.3.1 Caso en que $b(x, u)$ no depende de u

A continuación se demuestra que estas ecuaciones no son válidas cuando b depende de u . Para esto se considera el siguiente problema:

$$\min_u E \left(\int_0^1 \left(x^2 - \frac{u^2}{2} \right) dt + x(1)^2 \right) \quad (8.54)$$

s. a.

$$-1 \leq u \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (8.55)$$

$$dx = u dz \quad (8.56)$$

$$x(0) = x_0 \quad (8.57)$$

Cualquier curva $u(t)$, como la representada en la Figura 8.2, en la medida en que esté contenida entre 1 y -1, y esté graficada para todo el intervalo de 0 a 1, es un candidato a solución del problema. Para verificar si una curva $u(t)$ es efectivamente solución al problema (8.54)-(8.57) debe integrarse la restricción de la ecuación de estado $dx = u dz$, para luego con esta solución resolver la integral estocástica del funcional. Evidentemente esto es extremadamente complejo, así que se presenta a continuación una alternativa más simple, que incluye el uso de la isometría de Itô, la que se introducirá en la próxima sub-sección.

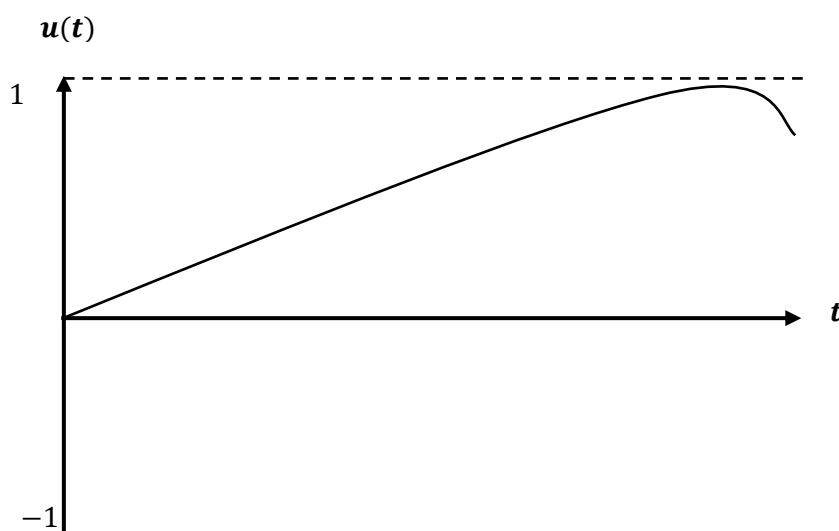


Figura 8.2. Curva $u(t)$ factible para problema (8.54)-(8.57)

8.3.2 Isometría de Itô

A continuación se revisará la isometría de Itô y su demostración, que será de gran utilidad en la búsqueda de soluciones para las ecuaciones estudiadas en el capítulo.

Sea $x(s)$. Entonces la isometría de Itô establece que:

$$E \left(\int_0^T x(s) dZ_s \right)^2 = E \left(\int_0^T x^2(s) ds \right) \quad (8.58)$$

La demostración está basada en la presentada por Almarza (2011). Sean pues:

- $\varphi(s, w) = \sum_j e_j(w) \chi_{[s_j, s_{j+1}]}$.
- (Ω, Σ, P) un espacio de probabilidad.
- $(\mathcal{H}_t)_{t \geq 0} \subseteq \Sigma$ la filtración generada por un proceso de Wiener $(Z_s)_{s \geq 0}$.
- $\Delta Z_j = Z_{s_{j+1}}(w) - Z_{t_j}(w)$.
- $\int_0^T x(s) dZ_s = \sum_j e_j(w) \Delta Z_j$.

Nótese en primer lugar que:

$$E[e_j e_i \Delta Z_j \Delta Z_i] = \delta_j^i E[e_j^2] (t_{j+1} - t_j) \quad (8.59)$$

Si $i \neq j$, sin pérdida de generalidad es posible suponer que $i > j$ y entonces, como el proceso tiene incrementos independientes, ΔZ_i es independiente de \mathcal{H}_{s_i} y por esto también independiente de $e_j e_i \Delta Z_j$, que son todos \mathcal{H}_{s_i}). Luego:

$$E[e_j e_i \Delta Z_j \Delta Z_i] = E[e_j e_i \Delta Z_j] E[\Delta Z_i] = 0 \quad (8.60)$$

Debido a que $E[\Delta Z_i] = 0$. En el caso $i = j$, se tiene que $E[(\Delta Z_j)^2] = t_{j+1} - t_j$ y que ΔZ_j es independiente de e_j por ser independiente de \mathcal{H}_{s_j} , de donde se obtiene la ecuación (8.59).

Expandiendo en la definición y usando lo anterior:

$$\begin{aligned} E\left(\int_0^T x(s) dZ_s\right)^2 &= E\left[\sum_{j,i} e_j e_i \Delta Z_j \Delta Z_i\right] = \sum_{j,i} \delta_i^j E[e_j^2] (s_{j+1} - s_j) = E\left[\sum_j e_j^2 (s_{j+1} - s_j)\right] = \\ &= E\left(\int_0^T x^2(s) ds\right) \end{aligned} \quad (8.61)$$

La primera es una integral estocástica, por lo que en general será compleja de resolver. No obstante, el lado derecho de (8.61) en cambio no es estocástico ya que depende solamente de s , por lo que su integral sigue las reglas básicas del cálculo de integrales.

Cabe señalar que la isometría de Itô, junto con el Lema de Itô, es la base del cálculo estocástico.

8.3.3 Solución problema (8.54) - (8.57)

Lo que se hará para solucionar el problema asociado a la ecuación (8.58) será ocupar la isometría de Itô para transformar el ejemplo en una versión más sencilla que haga evidente la solución al problema, para luego ocupar control óptimo estocástico para demostrar que con este método es imposible llegar a la solución, con lo que se demostraría que b no depende de u .

Al integrar la ecuación de estado (8.56) se llega a que:

$$x(t) = \int_0^t u(s) dz(s) \quad (8.62)$$

Ahora, se reemplaza la ecuación (8.62) en (8.54), obteniéndose:

$$E\left(\int_0^1 \left(\left(\int_0^t u(s) dz(s)\right)^2 - \frac{u^2}{2}\right) dt + \left(\int_0^1 u(s) dz(s)\right)^2\right) \quad (8.63)$$

Como el operador valor esperado es lineal, la expresión anterior es equivalente a:

$$E \int_0^1 \left(\left(\int_0^t u(s) dz(s) \right)^2 - \frac{u^2}{2} \right) dt + E \left(\int_0^1 u^2(s) dz(s) \right) \quad (8.64)$$

Ahora, se observa que en el segundo término se puede utilizar la isometría de Itô. Así:

$$E \int_0^1 \left(\left(\int_0^t u(s) dz(s) \right)^2 - \frac{u^2}{2} \right) dt + E \left(\int_0^1 u^2(s) ds \right) \quad (8.65)$$

Con respecto al primer término, se observa que puede descomponerse como:

$$\int_0^1 \left(E \left(\int_0^t u(s) dz(s) \right)^2 - E \int_0^1 \frac{u^2}{2} dt \right) dt + E \left(\int_0^1 u^2(s) ds \right) \quad (8.66)$$

Nuevamente, por la isometría de Itô se obtiene:

$$\int_0^1 \left(E \left(\int_0^t u^2(s) ds \right) dt - E \int_0^1 \frac{u^2}{2} dt \right) dt + E \left(\int_0^1 u^2(s) ds \right) \quad (8.67)$$

Luego, se extrae del operador de valor fuera de la integral, quedando la expresión como sigue:

$$E \left(\int_0^1 \int_0^t u^2(s) ds dt - \int_0^1 \frac{u^2}{2} dt + \int_0^1 u^2(s) ds \right) \quad (8.68)$$

A partir de esto se obtiene que:

$$0 \leq s \leq t \quad (8.69)$$

$$0 \leq t \leq 1 \quad (8.70)$$

Esta región se puede reescribir como sigue:

$$0 \leq s \leq 1 \quad (8.71)$$

$$s \leq t \leq 1 \quad (8.72)$$

Lo que se observa gráficamente en la Figura 8.3, a continuación:

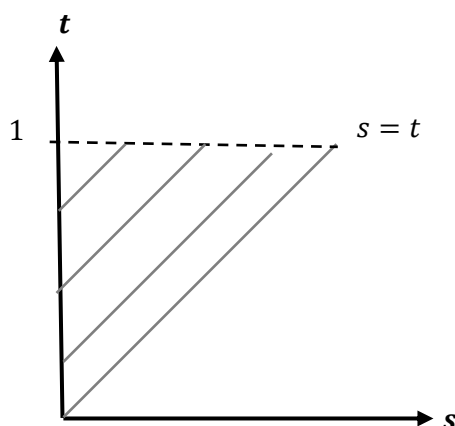


Figura 8.3. Región definida por (8.71)-(8.72)

Así, se puede reescribir lo anterior como:

$$E\left(\int_0^1 \int_s^1 u^2(s) dt ds - \int_0^1 \frac{u^2}{2} dt + \int_0^1 u^2(s) ds\right) \quad (8.73)$$

Sin embargo, $u^2(s)$ no depende de t por lo que sale de la primera integral como constante, quedando:

$$E\left(\int_0^1 u^2(s)(1-s) ds - \int_0^1 \frac{u^2}{2} dt + \int_0^1 u^2(s) ds\right) \quad (8.74)$$

Además, se pueden intercambiar las variables s por t en las integrales sin cambiar el significado de ellas, resultando:

$$E\left(\int_0^1 u^2(1-t) dt - \int_0^1 \frac{u^2}{2} dt + \int_0^1 u^2 dt\right) \quad (8.75)$$

Reordenando la ecuación (8.75), se obtiene:

$$E\left(\int_0^1 \left(u^2(1-t) - \frac{u^2}{2} + u^2\right) dt\right) = E\left(\int_0^1 \left(\frac{3}{2} - t\right) u^2 dt\right) \quad (8.76)$$

Así, se transformó un funcional estocástico que dependía de x , u y t en uno simple que depende sólo de u y t , reemplazando el valor de x que se obtiene a partir de la ecuación de estado.

De la última expresión es trivial mostrar que la solución al problema de:

$$\min_u E\left(\int_0^1 \left(\frac{3}{2} - t\right) u^2 dt\right) \quad (8.77)$$

Es $u^* = 0 \quad \forall t \in 0 \dots 1$.

En ese caso, como $dx = u^* dz = 0$, se obtiene que $x^* = cte = c_0$.

Ahora, volviendo al problema original de la ecuación (8.77), se utilizará el principio del máximo para encontrar los resultados obtenidos. De esta forma, el Hamiltoniano (con $a = 0$ y $b = u$) es:

$$H = \left(\frac{3}{2} - t\right) u^2 + w u \quad (8.78)$$

Como el Hamiltoniano es convexo en u para encontrar la función u que minimiza H basta hacer $\frac{\partial H}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{3}{2} - t\right) u^2 + w u = 0$, de donde se obtiene que:

$$\left(\frac{3}{2} - t\right) 2u + w = 0 \quad (8.79)$$

Y al resolver (8.79) para despejar u óptimo se obtiene que:

$$u^* = -\frac{w}{2\left(\frac{3}{2}-t\right)} \neq 0 \quad (8.80)$$

En consecuencia, el principio del máximo conlleva a una conclusión errónea. Es por tanto necesario recordar que el principio puede utilizarse si y sólo si b no depende de la variable de control u .

8.4 Problemas resueltos

Problema 8.1

Resuelva:

$$\max_u E \left[- \int_0^{\infty} e^{-rt} (ax^2 + u^2) dt \right]$$

$$\text{s. a } dx_t = u dt + \gamma x_t dz$$

Donde dz sigue un proceso de Wiener y $a, r > 0, \gamma$ constante.

Ansatz: Pruebe con una solución de la forma $J(t, x) = Kx^2$, donde K es una constante que debe ser determinada.

Solución

Por la ecuación de HJB para un problema estocástica se tiene que:

$$rJ(t, x) = \max_u \left[-(ax^2 + u^2) + J_t + J_x u + \frac{1}{2} J_{xx} (\gamma x_t)^2 \right]$$

Como es un problema de horizonte finito y autónomo la función que se está descontando a tiempo continuo, no depende explícitamente de t . Por lo tanto, la ecuación estará dada por:

$$rJ(x) = \max_u \left[-(ax^2 + u^2) + J'(x)u + \frac{1}{2} J''(x)(\gamma x_t)^2 \right]$$

Derivando para encontrar un óptimo:

$$-2u + J'(x) = 0$$

Y por la condición de segundo orden, $-2 < 0$, esta solución lleva a un máximo. Entonces se tiene:

$$u^* = \frac{J'(x)}{2}$$

Sustituyendo u^* en el problema, se obtiene:

$$0 = -rJ(x) - ax^2 + \frac{1}{4} (J'(x))^2 + \frac{1}{2} (\gamma x_t)^2 J''(x)$$

Luego, utilizando el *hint*:

$$0 = -rKx^2 - ax^2 + \frac{4K^2x^2}{4} + \frac{2K(\gamma x)^2}{2}$$

Factorizando por x^2 :

$$0 = x^2(-rK - a + K^2 + \gamma^2 K) = x^2 g(K)$$

Por lo tanto, es necesario $g(K) = 0$. Resolviendo, se obtiene:

$$K = \frac{(r - \gamma^2) \pm \sqrt{(\gamma^2 - r)^2 + 4a}}{2}$$

Entonces:

$$K_1 = \frac{(r - \gamma^2) + \sqrt{(\gamma^2 - r)^2 + 4a}}{2}$$

$$K_2 = \frac{(r - \gamma^2) - \sqrt{(\gamma^2 - r)^2 + 4a}}{2}$$

Además, por (8.74) y la primera derivada de la función dada en el *ansatz*:

$$u^* = Kx$$

Basta reemplazar valores de k en para obtener la solución.

Problema 8.2

Encontrar la función $C(t)$ tal que:

$$\max_{C(t)} \int_0^{\infty} e^{-rt} C^a(t) dt$$

$$\text{s. a } dx = (bx - c)dt + hxdz$$

$$x(0) = x_0 > 0$$

Ansatz: Pruebe que con una solución de la forma $J(t, x) = Kx^a$.

Solución

Por la ecuación de HJB para un problema estocástica se tiene que:

$$rJ(t, x) = \max_u \left[C^a(t) + J_t + J_x(bx - c) + \frac{1}{2} J_{xx}(hx)^2 \right]$$

Como es un problema de horizonte finito y autónomo la función que se está descontando a tiempo continuo, no depende explícitamente de t . Por lo tanto, la ecuación estará dada por:

$$rJ(x) = \max_{C(t)} \left[C(t)^a + J'(x)(bx - c) + \frac{1}{2}J''(x)(hx)^2 \right]$$

Derivando para encontrar $C(t)$ óptimo:

$$aC(t)^{a-1} - J'(x) = 0$$

Entonces, resolviendo:

$$C^*(t) = \left(\frac{J'(x)}{a} \right)^{\frac{1}{a-1}}$$

Al sustituir C :

$$rJ(x) = \left(\frac{J'(x)}{a} \right)^{\frac{a}{a-1}} + J'(x) \left[bx - \left(\frac{J'(x)}{a} \right)^{\frac{1}{a-1}} \right] + \frac{1}{2}(hx)^2 J''(x)$$

Al utilizar el *ansatz* se obtiene:

$$J(x) = Kx$$

$$J'(x) = aKx^{a-1}$$

$$J''(x) = a(a-1)Kx^{a-2}$$

Reemplazando en la ecuación de HJB:

$$rKx^a = K^{\frac{a}{a-1}}x^a + abKx^a - aK^{\frac{1}{a-1}}x^a + \frac{1}{2}h^2a(a-1)Kx^a$$

Dividiendo la expresión anterior por k y x^a :

$$r = K^{\frac{1}{a-1}} + ab - aK^{\frac{1}{a-1}} + \frac{1}{2}h^2a(a-1)$$

Y al despejar K :

$$K = \left[\frac{r - ab - \frac{1}{2}h^2a(a-1)}{1-a} \right]^{a-1}$$

Por otro lado:

$$C^*(t) = (Kx^{a-1})^{\frac{1}{a-1}} = K^{a-1}x$$

Reemplazando entonces K en $C^*(t)$, se obtiene el control óptimo pedido:

$$C^*(t) = \left[\frac{r-ab}{1-a} + \frac{1}{2}h^2a \right] x$$

Problema 8.3

Dado el siguiente problema:

$$\max \int_0^T -u_t^2 + x(T)^2$$

$$dx_t = u_t dt + \sigma x_t dz_t$$

- Plantee las ecuaciones de control óptimo estocástico.
- Si el funcional objetivo es $J = \phi(t) * x_t^2$, encuentre u_t y x_t .

Solución

En primer lugar se plantea el Hamiltoniano:

$$H = -u_t^2 + v(t)u_t + w(t)\sigma x_t$$

Las condiciones del principio del máximo son entonces:

- $\max_u H = -2u + v(t) = 0, v(t) = 2u_t.$
- $dx_t = \frac{dH}{dv} dt + \frac{dH}{dw} dz_t = u_t dt + \sigma x_t dz_t.$
- $dv = -\frac{dH}{dx} dt - w dz_t = -w(t)\sigma dt - w(t) * dz_t.$
- $v(T) = 2x(T).$

Como $J_x = v = 2\phi(t)x_t$:

$$dv = 2\phi'(t)dt + 2\phi(t)dx_t = 2\phi'(t)dt + 2\phi(t)(u_t dt + \sigma x_t dz_t)$$

$$dv = 2\phi'(t)dt + 2\phi(t)dx_t = (2\phi'(t) + 2\phi(t)u_t)dt + 2\phi(t)\sigma x_t dz_t$$

Con la ecuación 4):

$$dv = -w(t)\sigma dt - w(t)dz_t$$

Igualando los términos que acompañan a dt y dz_t :

$$-w(t)\sigma = 2\phi'(t) + 2\phi(t)u_t$$

$$-w(t) = 2\phi(t)\sigma x_t$$

Reemplazando $-w(t)$ se obtiene:

$$2\phi(t)\sigma^2 x_t = 2\phi'(t) + 2\phi(t)u_t$$

$$\frac{\phi(t)\sigma^2 x_t - \phi'(t)}{\phi(t)} = u_t$$

Con la primera condición del Hamiltoniano:

$$v(t) = 2u_t = 2\phi(t)x_t$$

$$u_t = \phi(t)x_t$$

Reemplazando u_t :

$$\phi(t)\sigma^2 x_t - \phi'(t) = \phi(t)^2 x_t$$

De donde se obtiene finalmente:

$$x_t = \frac{\phi'(t)}{\phi(t)\sigma^2 - 2\phi(t)^2}$$

$$u_t = \frac{\phi'(t)}{\sigma^2 - 2\phi(t)}$$

Parte III | Problemas
Determinísticos

Capítulo 9: El mundo de Hotelling

En este capítulo se describe el planteamiento del problema de optimización económica de la explotación de un recurso mineral no renovable, según fue introducido por el economista americano Harold Hotelling (1895-1973) en un artículo seminal de 1931 (Hotelling, 1931).⁴² En primer lugar, se presentarán los seis supuestos que gobiernan el mundo presentado por Hotelling, que algunos autores han tildado de “mundo ideal de Hotelling” (Tilton, 2003). Una vez discutido este “mundo ideal” (o más bien “mundo idealizado”) se mostrará cómo resolver la problemática planteada a través de las herramientas matemáticas desarrolladas en la Parte II. Posteriormente se muestra que en el mundo ideal de Hotelling en equilibrio se maximiza el bienestar social. Además, se desarrolla el cálculo del precio de equilibrio para diversas funciones de demanda y se relajan ciertos supuestos del “mundo ideal de Hotelling” para dar un mayor realismo al problema enfrentado por una mina o empresa minera. Finalmente se analizan ciertas críticas que se realizan al modelo planteado por Hotelling, explicando la dificultad de resolverlas en la práctica.

9.1 Supuestos del mundo de Hotelling

Harold Hotelling fue un estadístico y economista, pero en ningún caso estuvo relacionado con la minería. Esto explica el que su teoría presente una visión ideal del problema minero de la

⁴² Para mayores antecedentes históricos y conceptuales el lector puede consultar Devarajan y Fisher (1981).

explotación óptima de minas basado en la teoría económica. Esta visión descansa en seis supuestos fundamentales, los cuales por las razones que se explican en esta sección son, sin embargo, poco representativos de la vida real. A partir de estos supuestos se deriva la regla de Hotelling, elemento clave de la economía de los recursos agotables (Kneese y Sweeney, 1991). Los seis supuestos en los que descansa el mundo de Hotelling se describen a continuación.

9.1.1 Competencia perfecta

Este supuesto consiste en que ninguna firma posee poder de mercado, es decir, los productores no pueden manipular el precio de algún bien por lo que las decisiones de los competidores no afectan la demanda total. Así, los productores son simplemente tomadores de precios (*pricetakers*). Por otro lado, lo opuesto a competencia perfecta es precisamente competencia imperfecta y, para este caso, los productores son hacedores de precios (*pricemakers*).⁴³

En la actualidad una parte de los mercados de minerales pueden ser considerados para efectos de modelación como perfectamente competitivos, porque hay muchos actores y cada uno controla un porcentaje suficientemente reducido del total de recurso. Este es el caso de mercados como el del plomo, carbón, plata y oro. En estos mercados, ningún productor tiene más del 5% del mercado y existe una gran cantidad de productores que extraen pequeñas fracciones. Aun en estos casos, sin embargo, se debe tener en cuenta que el supuesto de competencia perfecta es válido sólo para efectos de la modelación, ya que desde el punto de vista teórico ningún mercado real (con un número finito de productores y elasticidades precios de la demanda acotadas) es perfectamente competitivo y es probable que todos los mercados presenten pequeñas o minúsculas variaciones debido a la influencia de cada uno de los productores.

Por otro lado, existe un conjunto de mercados que son conocidamente imperfectamente competitivos, donde el productor principal posee 30% o más de participación en la producción total del mercado. Un ejemplo de una industria imperfectamente competitiva es el niobio, que tiene más del 90% de sus reservas en Brasil (donde es explotado por una única empresa) y aproximadamente un 5% en Canadá.

⁴³ Para una revisión en detalle de las políticas asociadas a la competencia perfecta e imperfecta y el poder de mercado mencionado anteriormente, el lector puede consultar Tilton y Guzmán (2016).

Cabe destacar que la concentración en las industrias minerales no es estática (Tilton y Guzmán, 2016). Por ejemplo, hace cien años existían pocos productores de cobre, mientras que en la actualidad se cuentan alrededor de mil productores.

La mayoría de los mercados de minerales se encuentran en una situación intermedia entre competencia perfecta e imperfecta, lo que dificulta sustentar el mercado de competencia perfecta en los mercados de minerales. Es por esta razón que no se considera en la realidad el supuesto de competencia perfecta sea razonable como regla general en las industrias de minerales.

9.1.2 Recurso homogéneo

Hotelling, al construir su modelo, asumió dos simplificaciones respecto a la distribución espacial del *commodity* de interés en un depósito. La primera consiste en asumir una cantidad finita de recurso mineral en un depósito (por lo que el recurso podía considerarse *agotable*). La segunda se refiere a que este recurso era homogéneo, es decir, al tomar dos muestras de mineral del mismo depósito y provenientes de distintos lugares de la zona mineralizada estas serían idénticas. En la práctica esto implica que un depósito posee leyes y otras propiedades constantes en el espacio.

Este supuesto, básico en el mundo de Hotelling, es simplemente inaceptable en el mundo minero. De hecho, contradice completamente a la práctica de la planificación minera, que puede ser entendida precisamente como la ciencia de tomar ventaja de la heterogeneidad *in situ* de el o los elementos de interés en un depósito.

9.1.3 Certidumbre

Otro supuesto considerado por Hotelling es que el recurso es conocido desde el inicio en su totalidad. Esto lleva a que no sea necesario realizar esfuerzos en exploración. Además, se asume que tampoco existe incertidumbre en los precios de los *commodities*, por lo que se suponen conocidos para el futuro.

En definitiva, este supuesto establece que no existe incertidumbre de ningún tipo en los ámbitos del mercado, la geología, metalurgia o cualquier otra. Evidentemente este supuesto tampoco es realista debido a que en todas las áreas antes mencionadas existe incertidumbre, lo que será descrito en detalle en la Parte IV.

9.1.4 Costos de extracción nulos

Este supuesto sostiene que la mina posee la capacidad de extraer, procesar y vender todo su producto a costo cero. Evidentemente este supuesto es poco realista en el mundo real. No solo existen costos de explotación, procesamiento y venta, sino que además dichos costos no necesariamente permanecen constantes en el tiempo y muchas veces dependen de las variables de control o estado del problema. Así, por ejemplo, a menor cantidad de recursos remanentes en una mina a rajo se tendrán que extraer reservas a mayor profundidad, aumentando así el costo de transporte de mineral.

Cabe señalar que Hotelling también supone que los costos de extracción marginales son independientes de las tasas de extracción (Kneese y Sweeney, 1993), lo que asume implícitamente costos marginales constantes.

9.1.5 Sin cambio tecnológico

Este supuesto señala que una mina explotará sus recursos utilizando la misma tecnología y/o técnicas durante todo su periodo de operación. Es decir, no existirán cambios tecnológicos que produzcan variaciones en la forma en que se explotan los recursos en el tiempo.

Este supuesto tampoco es realista si se considera un periodo suficientemente largo de tiempo, lo que en muchas minas es razonable suponer (por ejemplo, la mayoría de las minas de cobre o hierro poseen vidas superiores a los 30 años). A pesar de ello en la actualidad se elaboran los planes mineros sin considerar cambios tecnológicos o en las técnicas, lo que se traduce en que el costo no depende del tiempo. Lo anterior también se puede traducir en que no existiría aprendizaje en la explotación de una mina, lo que tampoco parece un supuesto realista.

9.1.6 Sin restricciones de capacidad

Hotelling supone que una mina podría producir de forma instantánea el nivel que desee, es decir, cualquier nivel de producción entre cero y los recursos totales contenidos en el depósito. Sin embargo, una mina real presenta restricciones importantes de capacidad (tanto a nivel de mina, planta o ventas). La minería es una industria que puede ser considerada como intensiva en capital (no así en mano de obra), por lo que típicamente no será óptimo instalar una capacidad de producción suficientemente alta como para mantener una flexibilidad productiva que le permita a la empresa materializar cualquier nivel productivo. Aun así, en algunas industrias de minerales la intensidad de capital es más alta que en otras.

Un ejemplo de una industria con capacidad altamente costosa es la del cobre, razón por la cual, salvo raras excepciones, las minas en esta industria generalmente producen a máxima capacidad (es muy costoso generar *capacidad ociosa*). Por su parte, industrias como el hierro o el potasio poseen intensidades de capital intermedias, y no es extraño por lo mismo ver utilizaciones de capacidad de entre 80% a 90%. Finalmente, algunos minerales como los diamantes poseen intensidades de capital relativamente bajas, lo que les permite absorber niveles productivos que en algunos periodos pueden alcanzar apenas al 50% de la capacidad instalada.⁴⁴

Aunque el mundo ideal de Hotelling podría sugerir que la resolución de este problema no tiene mayor relevancia, lo cierto es que esto dista de ser verdad. Más bien, su resolución permitirá introducir un elemento inédito que será clave para entender las condiciones de optimalidad de la explotación de minas.

A partir de estos seis supuestos, se presentará a continuación el problema de la mina utilizando la perspectiva del mundo de Hotelling. Luego se relajarán estos supuestos para así lograr modelar de manera más realista el problema minero. Aun así, en los restantes capítulos se relajarán todos estos supuestos con objeto de entender de mejor forma cómo varía la solución de Hotelling en un mundo más real.

9.2 Problema de la mina en el mundo de Hotelling

El problema de la mina consiste en encontrar la función de producción $q(t)$ que maximiza el VAN. La variable $q(t)$ debe ser entendida como la cantidad del producto mineral extraído en el tiempo t , la que podría corresponder a toneladas de mineral o toneladas del *commodity* de interés. Las restricciones para este problema son la condición de agotabilidad de los recursos y que las reservas remanentes y la cantidad de producto que se vende deben ser no-negativas. El problema puede entonces formularse matemáticamente como:

$$\max_{q(t)} \int_0^T e^{-rt} P(t) q(t) dt \quad (9.1)$$

⁴⁴ Otra razón para que un productor mantenga capacidad ociosa es con objeto de desincentivar la entrada de nuevos productores. Para que este sea el caso, sin embargo, se requiere el productor posea poder de mercado y la amenaza de inundar el mercado sea creíble.

s. a.

$$\dot{S} = -q \quad (9.2)$$

$$S(0) = S_0 \quad (9.3)$$

$$S(t), q(t) \geq 0 \quad (9.4)$$

Para este problema, $P(t)$ corresponde al precio del producto o *commodity* que vende la mina en el instante de tiempo t y generalmente corresponde a una función independiente de la producción de la mina (bajo el supuesto de competencia perfecta). El parámetro T , por su parte, corresponde al LOM (*life of mine*) o vida de la mina.

En este problema se puede apreciar el cumplimiento de los seis supuestos del mundo de Hotelling descritos en la sección anterior:

1. Existe **competencia perfecta** dado que el precio es exógeno y no depende de la producción, es decir, la mina es tomadora de precios.
2. Los **recursos son homogéneos**, ya que no hay diferenciación en la calidad del recurso. Se asume que todo lo extraído tiene las mismas propiedades. No existen leyes o recuperaciones metalúrgicas distintas.
3. **No existe incertidumbre**, ya que todas las variables son determinísticas. No se incluyen valores esperados ni ecuaciones estocásticas en el problema.
4. **No existen costos de extracción** asociados a la producción en el problema. Solo se pueden apreciar los ingresos en el funcional, es decir, no hay costos de extracción, procesamiento o venta.
5. **No existe cambio tecnológico**, ya que no se aprecian en el problema funciones del tiempo que den mejores herramientas para extraer el recurso, como por ejemplo que el costo de procesamiento disminuya en el tiempo o que la cantidad de recurso a la cual puede acceder el productor aumente en el tiempo.
6. **No existen restricciones de capacidad**, ya que en cada instante de tiempo se puede extraer todo el recurso o no extraer nada porque la producción sólo está limitada a ser positiva.

En las siguientes secciones se resuelve el problema de la mina planteado anteriormente para encontrar la solución óptima. Para este fin, y con objeto de aplicar todo lo aprendido en la Parte II, se utilizan las tres herramientas de la optimización dinámica discutidas: cálculo variacional,

control óptimo y programación dinámica. El uso de las tres herramientas para la derivación de la solución al problema de Hotelling es, según el conocimiento del autor, inédita en la literatura.

9.2.1 Resolución mediante cálculo de variaciones

En este caso el problema puede representarse como:

$$\max_{q(t)} \int f(t, -S, -\dot{S}) = \max_{q(t)} \int e^{-rt} P(t) q(t) dt \quad (9.5)$$

s. a.

$$\int q(t) dt = S_0 \quad (9.6)$$

$$S(0) = S_0 \quad (9.7)$$

$$S(t), q(t) \geq 0 \quad (9.8)$$

El que corresponde a un problema isoperimétrico, ya que el funcional está sujeto a la condición de agotabilidad (nótese que esta condición se escribió explícitamente en su forma integral). Se construye así el Lagrangeano:

$$L = e^{-rt} P(t) q(t) + \lambda(-q(t)) \quad (9.9)$$

Mediante la utilización de la ecuación de Euler-Lagrange:

$$L_{-S} - \frac{d}{dt} [L_{-\dot{S}}] = L_{-S} - \frac{d}{dt} [L_q] = 0 \quad (9.10)$$

$$0 - \frac{d}{dt} [e^{-rt} P(t) - \lambda] = 0 \quad (9.11)$$

Luego, se integra respecto al tiempo en ambos lados de la ecuación, obteniéndose:

$$e^{-rt} P(t) - \lambda = C \quad (9.12)$$

Como λ es una constante, al ser sumada a C , da como resultado una nueva constante C_1 .

$$P(t) = C_1 e^{rt} \quad (9.13)$$

Esta constante puede ser determinada con una condición inicial (en este caso $P(0) = C_1$). Reemplazando en $t = 0$ se obtiene el precio inicial. Por lo tanto, se obtiene la función del precio en el tiempo:

$$P(t) = P_0 e^{rt} \quad (9.14)$$

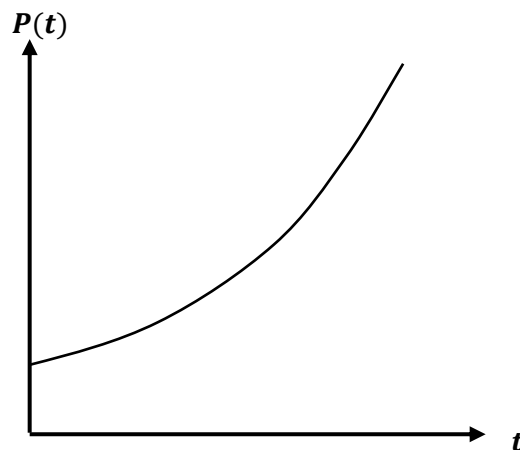


Figura 9.1. Gráfico de función del precio

A partir de este resultado se puede construir la regla de Hotelling que se obtiene cuando la mina resuelve el problema minero con los supuestos mencionados, donde r corresponde a la tasa de descuento del mercado:

$$\frac{P'(t)}{P(t)} = r \quad (9.15)$$

Esta ecuación es conocida como el “teorema fundamental de la economía de los recursos agotables” (Chao, 1981). De acuerdo con este teorema, el precio de equilibrio del recurso debe crecer exponencialmente a una tasa idéntica a la tasa de interés del mercado. Es decir, en un mercado donde el productor está vendiendo un recurso que es agotable para que el productor tenga incentivos a producir el precio del *commodity* debe crecer a una tasa proporcional a la tasa de interés del mercado.

Debe recordarse que la regla de Hotelling se deriva a partir de las reglas del mundo ideal de Hotelling, las cuales en muchos casos se alejan bastante de la realidad. De hecho, Gaudet menciona que en la vida real “*es muy difícil detectar alguna tendencia en los niveles de precios actuales de los recursos y ciertamente no el tipo de tendencia positiva que se sigue en la declaración de la regla de Hotelling*” (Gaudet, 2007).

Existen dos casos alternativos que es posible generar al teorema fundamental de la economía de los recursos agotables.

El primero se refiere a:

$$\frac{P'(t)}{P(t)} > r \quad (9.16)$$

En este caso el precio de este *commodity* crece más rápido que la tasa de interés. Esto implica que los productores no extraerán nada y esperarán solo hasta el último periodo para producir todo el recurso remanente, pues de esta forma el precio de venta será más alto que el castigo que impone la tasa de descuento por esperar a dicho periodo (Kneese y Sweeney, 1991).

El segundo caso establece que:

$$\frac{P'(t)}{P(t)} < r \quad (9.17)$$

En este caso los productores tratarán de vender todo el recurso en el instante inicial para colocar el dinero en el banco lo antes posible para de esta forma invertir en el mercado de capitales, ya que la tasa de interés del banco r es mayor, por lo que producir y vender en el futuro genera pérdidas (Kneese y Sweeney, 1991).

La Tabla 9.1 muestra un resumen de la dependencia de la producción en el tiempo en la medida que se cumplen la regla de Hotelling o las dos alternativas antes mencionadas.

Tabla 9.1. Dependencia de la extracción respecto a la tasa de crecimiento del precio

$\frac{P'(t)}{P(t)} = r$	$\frac{P'(t)}{P(t)} > r$	$\frac{P'(t)}{P(t)} < r$
Productores extraen en todos los periodos hasta agotar las reservas	Productores esperan hasta el último periodo para extraer	Productores extraen todas sus reservas en el instante inicial

Por lo tanto, la regla de Hotelling se comporta como una ecuación de equilibrio o de arbitraje que incentiva a los productores a producir. Si no se cumple esta regla se producirán incentivos en el mercado para no producir nada o producirlo todo de una sola vez, lo que en definitiva genera una singularidad de mercado que no es razonable esperar en un mercado de minerales.

Cabe señalar que, aunque la regla de Hotelling no ha logrado explicar exitosamente el crecimiento de los precios de los *commodities* (fundamentalmente porque en la vida real el mundo no es ideal como requiere su derivación), más que para ciertos periodos particulares de

tiempo, el concepto asociado a la solución es potente, ya que debe haber una condición de equilibrio para que el mercado funcione en todo periodo.

Cabe destacar una propiedad notable de la regla de Hotelling. Esta se refiere a que como parte de los supuestos utilizados para su derivación, el costo de producción se asumió nulo. Bajo competencia perfecta la teoría microeconómica tradicional (aplicable a los recursos no agotables) establece que el precio debería ser idénticamente nulo (por la conocida regla de que el precio en un mercado perfectamente competitivo debe ser idéntico al costo marginal de producción). La regla de Hotelling, por su parte, establece que incluso en un mercado perfectamente competitivo y con costo nulo de producción, el precio de un recurso agotable no será igual al costo marginal de producción.

Lo anterior es, a simple vista, una aparente contradicción con la teoría microeconómica. Este problema ocurre porque en microeconomía se asume que el mercado de un bien es infinito y no agotable. Si se pudiera producir todo lo que se quisiera, el precio deberá ser cero, porque si es mayor a cero habría una cantidad infinita de producción disponible y deseosa de entrar en el mercado, lo que no permitiría sostener un nivel no nulo en el precio.

La explicación de esta aparente paradoja es que en el caso de un bien agotable, al producir hoy se reduce la producción que es posible vender en el futuro, por lo que existe un costo de uso u oportunidad de la producción presente, que corresponde precisamente a un *costo de oportunidad del mercado*. Dicho de otra forma, en un mercado de un bien agotable como el de un recurso mineral si hoy se produce una tonelada de mineral *nunca* más se podrá volver a extraer y usufructuar de dicho recurso.

La gran contribución de Hotelling debe entenderse entonces no como la de derivar una regla para pronosticar que el precio de los *commodities* minerales (como parece ser el caso de la lectura de varios artículos en los cuales se busca establecer el cumplimiento de la regla de Hotelling en distintos precios de *commodities* minerales), sino más bien como la de reconocer la existencia de un costo no observable, pero aun así relevante, para la toma de decisiones en la explotación de un recurso minero. Este costo no es reconocido en un principio por la mina, pero es crucial para derivar un óptimo dinámico.

Hotelling en 1931 introdujo así el concepto de costo de oportunidad, el que es independiente de la existencia de costos reales de producción. Esto es equivalente a lo realizado por Kenneth Lane en 1964, pero en el mundo minero. “El costo de oportunidad se refiere a un *trade-off*

entre los flujos de caja presentes y los futuros, es por esto que el costo de oportunidad debe influenciar cualquier decisión en el plan de producción que afecte la tasa de extracción y la vida del recurso” (Lane, 1988).

Por lo tanto, Hotelling y Lane deben entenderse como dos caras de una misma moneda, siendo Lane la cara minera y Hotelling la cara económica.

9.2.2 Resolución mediante control óptimo

El planteamiento se puede reescribir en este caso:

$$\max_{q(t)} \int e^{-rt} P(t) q(t) dt \quad (9.18)$$

s. a.

$$\dot{S}(t) = -q(t) \quad (9.19)$$

$$S(0) = S_0 \quad (9.20)$$

$$S(t), q(t) \geq 0 \quad (9.21)$$

De esta forma se escribe el Hamiltoniano:

$$H = e^{-rt} P(t) q(t) + v(t)(-q(t)) \quad (9.22)$$

, y se utiliza el principio del máximo para resolver:

i) Condición del máximo:

$$\max_{q(t)} H \quad (9.23)$$

ii) Ecuación de estado:

$$\dot{S} = -q \quad (9.24)$$

iii) Ecuación adjunta:

$$\dot{v} = -\frac{\partial H}{\partial S} = 0 \quad (9.25)$$

Para resolver i) debe notarse que el Hamiltoniano se puede escribir de la siguiente forma:

$$H = (e^{-rt} P(t) - v(t)) q(t) \quad (9.26)$$

Es posible apreciar que H es lineal en $q(t)$, por lo que hay tres casos posibles para maximizar el Hamiltoniano:

$$(e^{-rt}P(t) - v(t)) > 0 \rightarrow q^*(t) = 0 \quad (9.27)$$

$$(e^{-rt}P(t) - v(t)) < 0 \rightarrow q^*(t) = S_0 \quad (9.28)$$

$$(e^{-rt}P(t) - v(t)) = 0 \rightarrow q^*(t) \in [0, S_0] \quad (9.29)$$

Si se analiza el primer caso, éste se descarta porque si no se está produciendo no hay oferta, por lo que no existe mercado. En el segundo caso si se produce todo hoy ese mercado no funcionará dado que es agotable. Por lo tanto, el único caso relevante desde el punto de vista del equilibrio se da cuando es indiferente la cantidad a producir en cada instante de tiempo. Es decir:

$$P(t) = v(t)e^{rt} \quad (9.30)$$

A partir de la ecuación adjunta se obtiene:

$$v(t) = \text{Constante} = C$$

Por lo tanto:

$$P(t) = Ce^{rt} \quad (9.31)$$

Y en particular en $t = 0$ esa constante tendrá el valor de P_0 , de donde se obtendrá:

$$P(t) = P_0 e^{rt} \quad (9.32)$$

Se deriva así la regla de Hotelling a partir del método de control óptimo:

$$\frac{P'(t)}{P(t)} = r \quad (9.33)$$

9.2.3 Resolución mediante programación dinámica

Se escribe el problema de la siguiente forma:

$$J^*(t, S) = \max_{q(t)} \int_0^T e^{-rt} P(t) q(t) dt \quad (9.34)$$

s. a.

$$\dot{S}(t) = -q(t) \quad (9.35)$$

$$S(0) = S_0 \quad (9.36)$$

$$S(t), q(t) \geq 0 \quad (9.37)$$

Se reescribe el funcional utilizando el principio de optimalidad de Bellman, el que establece que cualquiera que sea el tiempo desde el que se comience el análisis de la solución, de ahí en adelante la solución debe seguir siendo siempre óptima. Matemáticamente:

$$J^*(t, s) = \max_{q(t)} \{P(t)q(t)dt + J^*(t + dt, S + dS)e^{-rdt}\} \quad (9.38)$$

Efectuando la expansión de Taylor de primer orden de la función exponencial:

$$e^{-rdt} = (1 - rdt) \quad (9.39)$$

y despejando la condición de agotabilidad se tiene:

$$\dot{S} = -q \quad (9.40)$$

$$dS = -qdt \quad (9.41)$$

Se resuelve así por programación dinámica:

$$J^*(t, S) = \max_{q(t)} \{P(t)q(t)dt + J^*(t + dt, S - q(t)dt) * (1 - rdt)\} \quad (9.42)$$

Utilizando la expansión de Taylor:

$$J^*(t, S) = \max_{q(t)} \{P(t)q(t)dt + [J^*(t, S) + J_t^*(t, S)dt + J_S^*(t, S)(-q(t)dt)](1 - rdt)\} \quad (9.43)$$

$$J^*(t, S) = \max_{q(t)} \{P(t)q(t)dt + J^*(t, S) - rJ^*(t, S)dt + J_t^*(t, S)dt - q(t)J_S^*(t, S)dt\} \quad (9.44)$$

$$0 = \max_{q(t)} \{P(t)q(t)dt - rJ^*(t, S)dt + J_t^*(t, S)dt - q(t)J_S^*(t, S)dt\} \quad (9.45)$$

Se obtiene así la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) al dividir la ecuación por dt .

Reordenando:

$$rJ^*(t, S) - J_t^*(t, S) = \max_{q(t)} \{P(t)q(t) - q(t)J_S^*(t, S)\} \quad (9.46)$$

Se desarrolla el lado derecho de la ecuación:

$$\max_{q(t)} \{[P(t) - J_S^*(t, S)]q(t)\} \quad (9.47)$$

Pero no se puede derivar respecto a $q(t)$ e igualar a 0, ya que es lineal en $q(t)$, por lo que existen tres casos:

$$P(t) - J_S^*(t, S) > 0 \rightarrow q^*(t) = S_0 \quad (9.48)$$

$$P(t) - J_S^*(t, S) = 0 \rightarrow q^*(t, S) \in [0, S_0] \quad (9.49)$$

$$P(t) - J_S^*(t, S) < 0 \rightarrow q^*(t) = 0 \quad (9.50)$$

Se analiza el caso donde es indiferente la cantidad a producir en cada instante de tiempo, ya que es el único relevante para que el mercado se desarrolle en el tiempo. Se obtiene de esta forma en el óptimo:

$$P(t) = J_S^*(t, S) \quad (9.51)$$

Por lo tanto, al volver a la ecuación de HJB, se obtiene que la ecuación diferencial parcial que debe satisfacer el funcional J en el óptimo será:

$$r J^*(t, S) = J_t^*(t, S) \quad (9.52)$$

Se resuelve así la ecuación diferencial parcial utilizando el método de separación de variables.

$$J^*(t, S) = u(t)v(S) \quad (9.53)$$

$$J_t^*(t, S) = u'(t)v(S) \quad (9.54)$$

$$r u(t)v(S) = u'(t)v(S) \quad / \quad \frac{1}{u(t)v(S)} \quad (9.55)$$

$$r = \frac{u'(t)}{u(t)} \quad (9.56)$$

La solución a esta ecuación diferencial ordinaria (9.56) viene dada por:

$$u(t) = C e^{rt} \quad (9.57)$$

Por lo que el funcional en el óptimo será:

$$J^*(t, s) = C e^{rt} v(S) \quad (9.58)$$

De donde se tiene que:

$$P(t) = J_S^*(t, S) \quad (9.59)$$

$$J_S^*(t, s) = C e^{rt} v'(S) \quad (9.60)$$

$$P(t) = C e^{rt} v'(S) \quad (9.61)$$

$$P'(t) = r C e^{rt} v'(S) \quad (9.62)$$

De donde se deriva la regla de Hotelling a partir del método de programación dinámica:

$$\frac{P'(t)}{P(t)} = r \quad (9.63)$$

Como nota final a la regla de Hotelling, considérese que es común en Estados Unidos, Australia, Canadá e incluso en Chile, que existan minas generalmente de tamaño pequeño o mediano que produzcan en base a cómo evoluciona el precio del mercado. Esas minas tienen recursos acotados, por lo que es común que operen cuando el precio está alto y se mantengan cerradas cuando el precio se encuentra bajo, en la medida que puedan cerrar y reabrir pagando un bajo costo. Esto es factible en minas pequeñas y medianas, pero es difícil que se cumpla en la minería a gran escala pues los costos de cierre y reapertura son generalmente muy altos.

9.3 Precio de equilibrio en el mundo ideal de Hotelling

Para que el precio de equilibrio derivado por la regla de Hotelling quede derivado completamente, se deben incorporar funciones de demanda en el problema.

A continuación, se procederán a analizar dos ejemplos de derivación del precio de equilibrio en el mundo ideal de Hotelling para distintas funciones inversas de demanda. La función inversa de demanda se define como el precio al que es posible vender una cierta cantidad producida.

- Ejemplo 1: Se considera una función inversa de demanda lineal, dada por:

$$P(q) = a - bq \quad (9.64)$$

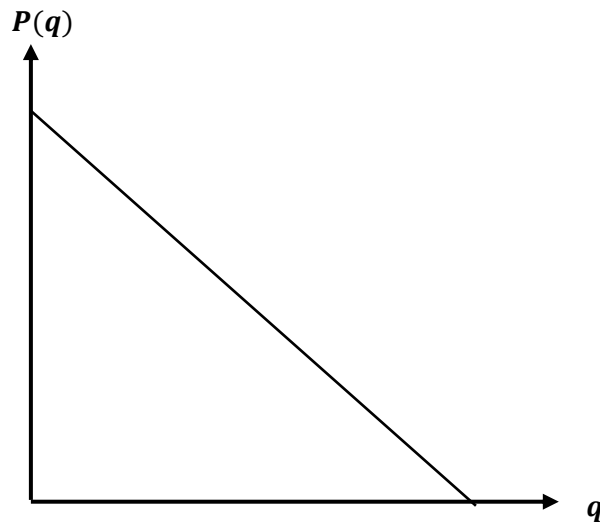


Figura 9.2. Variación de la cantidad extraída en función del precio del *commodity*

En este caso la relación entre el precio y la cantidad es lineal. En este punto cabe preguntarse cómo sería el equilibrio de mercado, es decir, la producción y el precio que debería existir en cada instante de tiempo en el mundo de Hotelling donde la demanda sigue una función lineal. Se incorporará entonces al mundo ideal de Hotelling el conocimiento respecto de la función de demanda.

El mundo ideal de Hotelling establece que el precio deberá crecer según la tasa de interés del mercado. Por lo tanto:

$$P(t) = P(0)e^{rt} \quad (9.65)$$

Por otro lado, la función inversa de demanda satisface la ecuación (9.64). Al despejar $q(t)$ se obtiene entonces:

$$q(t) = \frac{a - P(t)}{b} = \frac{a - P(0)e^{rt}}{b} \quad (9.66)$$

Luego, se define la cantidad ofertada y demandada en el mercado bajo el supuesto de que existe un equilibrio entre ambas variables, para el caso en que se comercialice un bien agotable que satisfaga los supuestos de Hotelling.

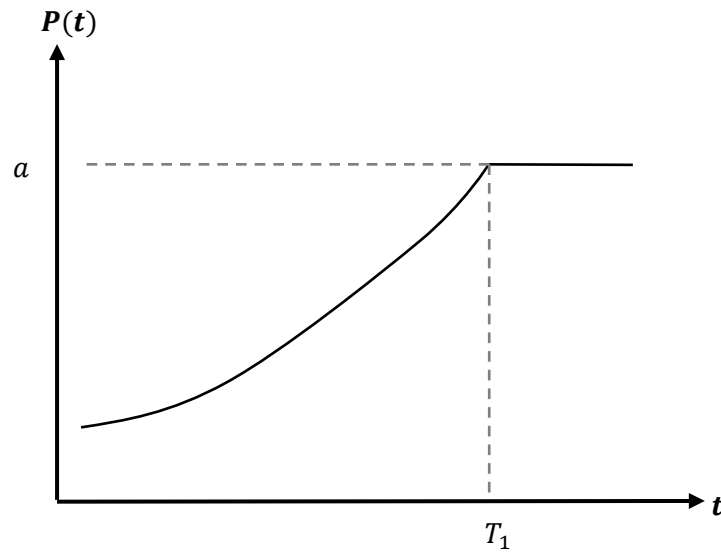


Figura 9.3. Comportamiento del precio en función del tiempo

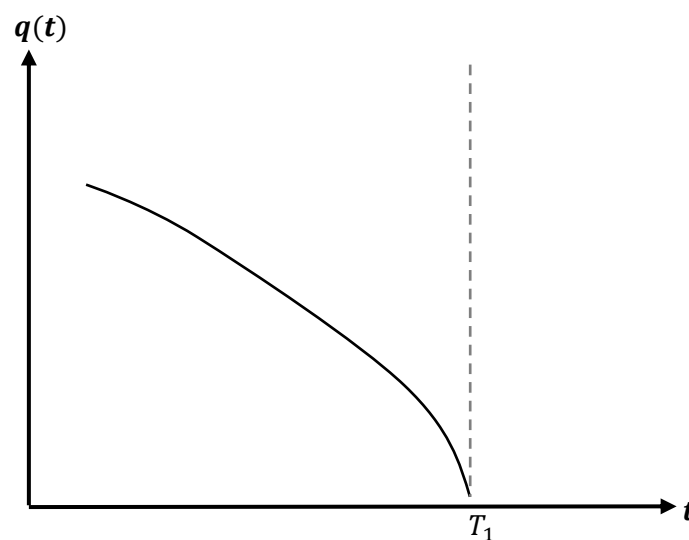


Figura 9.4. Comportamiento de la cantidad extraída en función del tiempo

Así, la cantidad ofertada y demandada en el mercado disminuirá en el tiempo hasta que llegue a cero, lo que ocurre en el tiempo T_1 . En este instante de tiempo ningún productor querrá explotar el recurso porque el precio está acotado superiormente por la demanda. Así, se debe satisfacer que:

$$a - P(0)e^{rT_1} = 0 \quad (9.67)$$

$$T_1 = \frac{1}{r} \log\left(\frac{a}{P(0)}\right) \quad (9.68)$$

Por otro lado, el precio de mercado crece de forma exponencial hasta el punto en donde la demanda cae a cero. Si la demanda es cero, el precio es igual al valor a . Este corresponde al valor máximo al cual un consumidor está dispuesto a comprar una unidad de este *commodity*.

De las Figura 9.3 y 9.4 se observa que en un mercado con esta función de demanda, y bajo las condiciones del mundo ideal de Hotelling, es posible encontrar tanto la cantidad producida como el precio de mercado.

También se puede relacionar el precio de equilibrio con las condiciones iniciales de este mercado a través de la ecuación de agotabilidad:

$$\int_0^{T_2} q(s) ds = S_0 \quad (9.69)$$

$$\int_0^{T_2} \frac{a-P(0)e^{rs}}{b} ds = S_0 \quad (9.70)$$

$$\frac{a*T_2}{b} - \frac{P(0)}{b} \int_0^{T_2} e^{rs} ds = S_0 \quad (9.71)$$

$$\frac{a*T_2}{b} - \frac{P(0)}{b} \left(\frac{e^{rT_2}-1}{r} \right) = S_0 \quad (9.72)$$

De esta ecuación se puede despejar T_2 , que corresponde al tiempo en el cual se agota el recurso al ser consumido a esa tasa de explotación, mediante técnicas numéricas (debido a que la ecuación es no-lineal en términos de esta variable).

Se tienen así dos tiempos: el de agotamiento del atractivo económico de explotar el recurso (T_1) y el tiempo de agotamiento del recurso (T_2). En la práctica, el tiempo relevante para efectos de este mercado es T^* , que es el tiempo en el cual el mercado se extingue y no hay más oferta ni demanda. Este tiempo viene dado por:

$$T^* = \min \{T_1, T_2\} \quad (9.73)$$

Dado lo anterior, el equilibrio de este mercado vendrá dado por:

$$\begin{cases} P(t) = P(0)e^{rt} \\ q(t) = \frac{a-P(0)e^{rt}}{b} \end{cases}, \text{ si } t \in [0, T^*) \quad (9.74)$$

$$\begin{cases} P(t) = P(0)e^{rT^*} \\ q(t) = 0 \end{cases} \text{ si } t \geq T^* \quad (9.75)$$

Nótese que después de T^* hay un quiebre en el equilibrio de este mercado.

- Ejemplo 2: Se considera la siguiente función de demanda (nótese que esta está escrita de forma tal que se refiere a la demanda y no el precio, razón por la cual no se hace referencia a la misma como función inversa de demanda):

$$q(t) = (P(t))^{-1/\alpha} \quad (9.76)$$

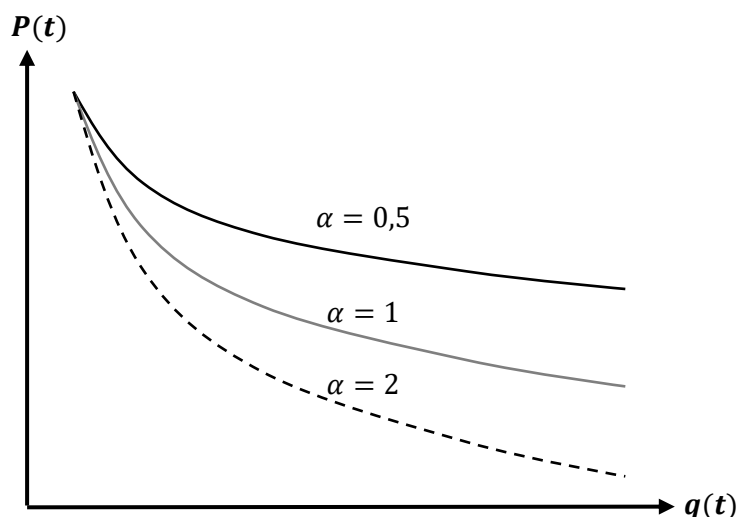


Figura 9.5. Función de demanda para distintos valores de α

Esta corresponde a una función de demanda no lineal que tiene una cierta curvatura que depende del parámetro $\alpha > 0$. Esta función de demanda es muy popular en la modelación económica, pues posee una propiedad notable referida a su elasticidad precio de la demanda, la que se deriva a continuación.

Para derivar esta propiedad se calcula la elasticidad de la demanda:

$$\varepsilon_d = -\frac{\partial q}{\partial P} \frac{P}{q} \quad (9.77)$$

$$\varepsilon_d = -\left(-\frac{1}{\alpha} P^{-\frac{1}{\alpha}-1}\right) \frac{P}{P^{-\frac{1}{\alpha}}} = \frac{1}{\alpha} > 0 \quad (9.78)$$

De esta forma, la función de demanda dada siempre satisface que su elasticidad precio de demanda es constante, razón por lo que se conoce a esta demanda como isoelástica. En economía de minerales es muy frecuente que cuando se estiman funciones de demanda para una *commodity* se trate de relacionar $q(t)$ con $P(t)$ de esta forma y, utilizando modelos

econométricos, se busque el valor de α . Por ejemplo, en el mercado del cobre distintos estudios han mostrado que la elasticidad de la demanda podría ir de 0,05 a 0,2 por lo que α podría ir entre 5 y 20. Estos valores se estiman de datos históricos, observando el comportamiento de la demanda y el precio en el pasado, y con una regresión se ajustan esos puntos a una curva de esa naturaleza.

En general la elasticidad de la demanda de *commodities*, como el petróleo, es bastante menor e incluso hay estudios que indican que la elasticidad en el corto plazo podría ser casi cero y en el mejor de los casos cercana a 0,05. Esto implica que si el precio varía considerablemente la demanda prácticamente no se verá afectada. Cuando ese es el caso se dice que la demanda es inelástica. Cuando existe una gran sensibilidad de la demanda al cambio de precios se dice que la demanda es elástica.⁴⁵

Como se sabe en el mundo de Hotelling, independiente de la función de demanda, se cumple que:

$$P(t) = P(0)e^{rt} \quad (9.79)$$

Con esto se puede obtener la cantidad demandada en equilibrio de mercado:

$$q(t) = P(0)^{\frac{1}{\alpha}} e^{-\frac{rt}{\alpha}} \quad (9.80)$$

Además, se puede ocupar la condición agotabilidad de los recursos para relacionarla con la cantidad demandada:

$$\int_0^T P(0)^{\frac{1}{\alpha}} e^{-\frac{rt}{\alpha}} dt = S_0 \quad (9.81)$$

Si se conoce la función de demanda y el hecho de que se satisfacen las condiciones del mundo ideal de Hotelling, se puede determinar el precio inicial al que se comienza a transar el *commodity* en el mercado:

$$P(0) = \left[\frac{\frac{S_0 r}{\alpha}}{1 - e^{-\frac{rT}{\alpha}}} \right]^{-\alpha} \quad (9.82)$$

⁴⁵ Formalmente si $\alpha < 1$ se dice que la demanda es elástica, mientras que para $\alpha > 1$ se considera a la demanda como inelástica.

De esta forma, conocido el precio inicial se podrá conocer el precio de mercado en cada instante de tiempo. Nótese que el precio inicial depende de los recursos iniciales, de la tasa de interés del mercado y de α que está relacionado con la elasticidad de la demanda, todos parámetros conocidos.

Si T tiende al infinito, se puede despejar el precio inicial:

$$P(0) = \left[\left(\frac{S_0 r}{\alpha} \right) \right]^{-\alpha} \quad (9.83)$$

Si los recursos son infinitos, el precio inicial sería cero y el precio a través del tiempo será también nulo. Por lo tanto, la ecuación (9.83) es un caso general del conocido mantra de la microeconomía bajo competencia perfecta “precio igual a costo marginal”.

Si α tiende a cero la elasticidad de la demanda tenderá a infinito, lo que significa una demanda perfectamente elástica. Esto implica que el precio inicial está indeterminado, por lo que podrá tomar cualquier valor. Por su parte, si α tiende a infinito la elasticidad de la demanda tenderá a cero, lo que implicará una demanda perfectamente inelástica vertical y el precio tenderá a infinito. Esto tiene sentido porque si se tiene un recurso agotable se preferirá explotar al mayor precio posible.

9.4 Regla de Hotelling como maximizador del bienestar social

Hotelling mostró también en su artículo seminal que el equilibrio que satisface su regla es eficiente desde el punto de vista social. Es decir, el precio de mercado que se deriva de la regla de Hotelling maximiza el bienestar social.

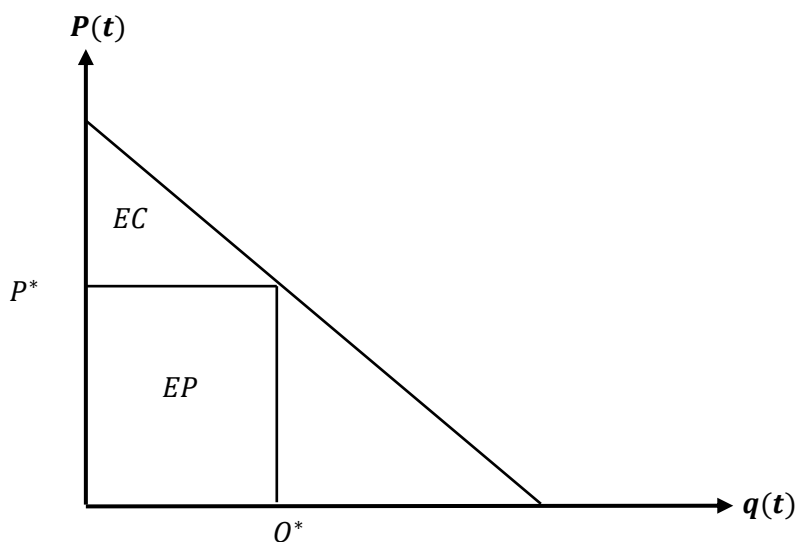


Figura 9.6. Excedente del Productor (EP) y del Consumidor (EC) para un P^* y Q^*

De la Figura 9.6 se desprende el precio de equilibrio de mercado es P^* , dada una función de demanda y costos marginales de producción nulos. La diferencia entre lo que los consumidores están dispuestos a pagar y lo que finalmente pagaron es conocido en economía como el Excedente del Consumidor (EC). Por su parte, la diferencia entre lo que productores reciben como precio y el costo de la explotación (en este caso nulo) corresponde al Excedente del Productor (EP).

El bienestar social, W (de *welfare*, como se conoce en inglés), es la suma del excedente del consumidor con la del excedente del productor. Matemáticamente, esto se puede escribir como el área bajo la curva de demanda.⁴⁶

$$W = \int_0^{Q^*} P(Q)dQ \quad (9.84)$$

Por lo general no será posible derivar la primitiva de W en (9.84), salvo que se defina la función inversa de demanda $P(Q)$. Sin embargo, es posible establecer lo siguiente en general:

$$W = \int_0^{Q^*} P(Q)dQ = U(Q^*) \quad (9.85)$$

⁴⁶ Cuando existen costos marginales de producción, dados por $C'(Q)$, entonces el bienestar social vendrá dado por:

$$W = \int_0^{Q^*} (P(Q) - C'(Q))dQ$$

Aquí, $U(Q^*)$ es la utilidad que depende de la cantidad demandada en equilibrio.

Considérese entonces un planificador social que busca maximizar precisamente el bienestar social. Asígnese además que se busca maximizar el bienestar en el largo plazo (en la práctica se reemplaza T por infinito), descontando las utilidades instantáneas en el tiempo por medio de la utilización de una tasa de descuento r (del planificador social). De esta forma el planificador social resolverá:

$$\max_{Q(t)} \int_0^{\infty} e^{-rt} u(Q(t)) \partial t \quad (9.86)$$

El problema anterior se puede resolver mediante los tres métodos de optimización dinámica estudiados en la Parte II. Sin embargo, a continuación, se resolverá mediante cálculo variacional. De aquí:

$$L = e^{-rt} u(Q(t)) \quad (9.87)$$

La ecuación de Euler-Lagrange será entonces:

$$L_S - \frac{\partial}{\partial t} (L_Q) = 0 \quad (9.88)$$

Resolviendo:

$$0 - \frac{\partial}{\partial t} [e^{-rt} u'(Q)] = 0 \quad (9.89)$$

Integrando respecto al tiempo:

$$e^{-rt} u'(Q) = C \quad (9.90)$$

De donde se obtiene que:

$$u'(Q) = C e^{rt} \quad (9.91)$$

Es decir, la utilidad marginal debe ser igual a una constante multiplicada por e^{rt} . Para obtener la utilidad marginal ($u'(Q)$) se debe resolver la siguiente igualdad:

$$u(Q) = \int_0^Q P(s) \partial s \quad (9.92)$$

Lo anterior se resuelve aplicando la regla de Leibnitz, que establece lo siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{f(\alpha)}^{g(\alpha)} h(\alpha, x) dx = h(\alpha, g(\alpha))g'(\alpha) - h(\alpha, f(\alpha))f'(\alpha) + \int_{f(\alpha)}^{g(\alpha)} \frac{\partial h}{\partial \alpha}(\alpha, x) dx \quad (9.93)$$

Así:

$$u'(Q) = P(Q) \frac{\partial Q}{\partial Q} - P(0) \frac{\partial 0}{\partial Q} + \int_0^Q \frac{\partial P(s)}{\partial Q} ds \quad (9.94)$$

De donde se obtiene que:

$$\dot{u}(Q) = P(Q) \quad (9.95)$$

Reemplazando (9.91) en (9.95) se obtiene:

$$P(Q) = C e^{rt} \Rightarrow P(t) = P_0 e^{rt} \quad (9.96)$$

De esta forma se demuestra que la explotación óptima en términos sociales se obtiene precisamente mediante la utilización de la regla de Hotelling. De esta forma, Hotelling (1931) demuestra que la introducción de la agotabilidad del recurso no genera distorsiones en el mercado, y por tanto la competencia perfecta en este caso sigue siendo socialmente óptima.

Cabe destacar que la microeconomía clásica asociada a la explotación de recursos no agotables dicta que para que la sociedad maximice su bienestar social el precio debe ser igual al costo marginal, porque de esa forma los consumidores quedarán mejor. Con recursos agotables, sin embargo, la regla de Hotelling establece que el precio debe ser más alto. Pese a esto, la solución sigue siendo óptima desde el punto de vista social.

La justificación de lo anterior se basa en que, mientras para un consumidor miope sería mejor comprar en un instante de tiempo pagando un precio nulo, en el largo plazo esto lo excluiría de la posibilidad de que el mismo u otro consumidor puedan acceder a ese *commodity*. Además, dado que los consumidores tienen una disposición a pagar por este *commodity*, es decir que lo valoran, ellos preferían pagar un precio un poco más alto con tal de que a futuro este *commodity* esté disponible.

Así, en el mundo ideal de Hotelling que el precio crezca a la tasa de interés del mercado no solo maximiza la utilidad de la empresa productora, sino que maximiza además el VAN del bienestar social. Por lo tanto, en este tipo de mercado la sociedad encontraría deseable que el precio crezca a la tasa de interés.

Cabe señalar que existe una corriente de pensamiento conservacionista que considera que el mercado perfectamente competitivo conlleva a una extracción más rápida del recurso. Esto debido a que las tasas de interés de las firmas productoras son en general distintas a las de la

sociedad. No obstante esto, ha sido demostrado que aunque estas diferencias producen ineficiencias, reducirlas – al contrario de la creencia conservacionista – produciría un aumento en vez de una reducción en la extracción de los recursos naturales (Gordon, 1966).

Respecto a la tasa de interés y el agotamiento de recursos naturales, se conoce que, a pesar de su amplia aceptación en la literatura, la proposición básica de que una reducción (aumento) en la tasa de interés conduce a una mayor conservación (agotamiento más rápido) de un recurso agotable no es válida en general. En efecto, Farzin (1984) demuestra que en dos ocasiones sucede lo contrario a esta regla general. Estos casos corresponden a:

- Si la suma de los valores presentes de capital requeridos en el sustituto y los sectores de recursos exceden el valor presente de los recursos remanentes.
- Si el *stock* de recursos es suficientemente pequeño o es suficientemente grande.

9.5 Relajación de los supuestos de Hotelling

Tal como se ha explicado anteriormente, los supuestos de Hotelling son muy restrictivos ya que son idealistas y poco factibles en la realidad minera. Por ello se procederá a relajar estos supuestos de manera tal que se pueda modelar el problema minero de una forma más realista. Nótese que en los capítulos siguientes se procederá a relajar cada uno de los aspectos del mundo ideal de Hotelling en un nivel de detalle mayor. Por lo tanto, debe entenderse esta sección como una discusión inicial solamente al efecto que introducen las relajaciones en el mundo ideal de Hotelling.

De los párrafos anteriores se puede observar cómo algunos de ellos son simples de modificar y otros requieren de un mayor esfuerzo para lograr adaptar el problema. También se analizará cómo los resultados varían (o no) al cambiar los supuestos en los que se basó Hotelling.

9.5.1 Relajación del supuesto de competencia perfecta

A continuación, se procederá a relajar el supuesto de competencia perfecta. Este supuesto se abordará al suponer que existe un único productor (monopolio), que es lo opuesto de

competencia perfecta.⁴⁷ Para esto el supuesto fundamental es que el precio de mercado P depende de la cantidad producida por la empresa productora $q(t)$, es decir, $P(q(t))$.

Así, el problema del monopolista se puede escribir matemáticamente:

$$\max_{q(t)} \int_0^{\infty} P(q(t))q(t)e^{-rt} dt \quad (9.97)$$

s. a.

$$\int_0^{\infty} q(t) dt = S_0 \quad (9.98)$$

$$\dot{S}(t) = -q(t) \quad (9.99)$$

Debe notarse que el intervalo de tiempo en la integral de (9.97) no debe ser necesariamente infinito, sino que ha sido supuesto esto solo con el objetivo de simplificar el análisis.

Para resolver el problema así definido se utilizará, sin pérdida de generalidad, cálculo de variaciones. En este caso el Lagrangeano es:

$$L = P(q)q(t)e^{-rt} + \lambda q(t) \quad (9.100)$$

Aplicando la ecuación de Euler-Lagrange:

$$L_s - \frac{\partial}{\partial t}(L_q) = 0 \quad (9.101)$$

$$0 - \frac{\partial}{\partial t} [\dot{P}(q)q(t)e^{-rt} + P(q)e^{-rt} + \lambda] = 0 \quad (9.102)$$

Integrando (9.102) respecto al tiempo:

$$\dot{P}(q)q(t)e^{-rt} + P(q)e^{-rt} = C \quad (9.103)$$

Multiplicando por e^{rt} en ambos lados:

$$\dot{P}(q)q(t) + P(q) = Ce^{rt} \quad (9.104)$$

Si se aplica la derivada respecto a q , lo anterior es equivalente a:

⁴⁷ Para una revisión en detalle de las políticas asociadas a la competencia perfecta e imperfecta, el lector puede consultar Tilton y Guzmán (2016).

$$\frac{\partial}{\partial q}(P(q)q(t)) = Ce^{rt} \quad (9.105)$$

En esta ecuación el lado izquierdo es igual al ingreso marginal. De esta forma:

$$\text{Ingreso Marginal (}IMg\text{)} = Ce^{rt} \quad (9.106)$$

De donde se obtiene la siguiente regla:

$$\frac{IMg}{IMg} = r \quad (9.107)$$

Por lo tanto, la regla de Hotelling en un mercado monopolístico se traduce en que la tasa de crecimiento del ingreso marginal del monopolista debe ser idéntica a la tasa de interés del mercado (Kneese y Sweeney, 1993).

Nótese que en el caso de la competencia perfecta el ingreso marginal es simplemente el precio ya que como el precio no depende de la cantidad producida. Es decir:

$$\frac{\partial}{\partial q}(Pq(t)) = P \quad (9.108)$$

Así, en competencia imperfecta el ingreso marginal es equivalente al precio de mercado. Luego, (9.107) debe ser entendida simplemente como la generalización a la regla de Hotelling para competencia perfecta.

De esta forma, al violar es el supuesto de competencia perfecta, la regla de Hotelling se modifica. De aquí es claro que la regla de Hotelling solo debe ser entendida aplicada en el mundo ideal de Hotelling.

RECUADRO 9.2

EFECTO EN EL BENEFICIO DADA UNA SECUENCIA DE EXTRACCIÓN EN BASE AL *STOCK EFFECT*

Otro modelo que es relevante revisar es el desarrollado por Aivazian y Callen (1979), quienes estudian el comportamiento que debiese tener el beneficio dada una secuencia de extracción en base a su *stock effect* (relación de producción y su efecto en el mercado) que está dominado por su nivel de participación en el mercado (competitivo, oligopolio o monopolio). En su trabajo se busca resolver el

problema de optimización de múltiples firmas explotando un mismo recurso mineral y esta descrito por la siguiente expresión:

$$\max_{\{q_i(t)\}} \int_0^T e^{-rt} [R_i(q_1(t) \dots q_m(t)) - C(q(t), x(t))q_i(t)] dt$$

s. a.

$$q_i(t) \geq 0 ; x(T) \leq a$$

Se debe notar que el beneficio R_i y el costo Cq_i para cada productor depende de la estrategia de extracción de todos los productores siendo $q(t) = \sum_i^m q_i(t)$, y $x(t)$ la cantidad acumulada extraída desde 0 hasta t .

El desarrollo de este problema puede verse en más detalle en el trabajo de Aivazieal y Callen (1979). No obstante, lo interesante de esto es que al desarrollar el problema de optimización anterior se obtiene que:

$$R_i(q_1 \dots q_m) = C(q, x) + C_q(q, x)q_i + \int_t^T e^{-r(s-t)} C_x(q, x)q_i ds$$

Eso explica que los ingresos marginales debiesen ser iguales al costo marginal de la firma más el costo de aumento de futuras extracciones internalizadas por la firma en valor descontado.

Finalmente, se tiene que el ingreso marginal agregado de todos los participantes de esta economía se escribe:

$$\sum_{i=1}^m R_i(q_1 \dots q_m) = mC(q, x) + C_q(q, x)q + \int_t^T e^{-r(s-t)} C_x(q, x)q ds$$

Lo que para cada firma independiente queda como:

$$\frac{(\sum_{i=1}^m R_i(q_1 \dots q_m))}{m} = C(q, x) + C_q(q, x) \frac{q}{m} + \frac{(\int_t^T e^{-r(s-t)} C_x(q, x)q ds)}{m}$$

Como indica Aivazieal y Callen (1979), el comportamiento monopolista queda descrito con $m = 1$ y el mercado competitivo con $m = \infty$. Por lo tanto, para un mercado competitivo $R^A = C(q, x)$ siendo R^A precio en cada t y para un monopolio el resultado es el de la ecuación (9.107). Eso implica que en el caso del monopolio este internaliza completamente el impacto de su oportunidad de extracción futura, mientras a la firma competitiva este impacto le es irrelevante. En otras palabras, mientras

menos actores existen en el mercado, mayor es la diferencia entre el ingreso marginal y el costo marginal para cada firma.

Considérese el siguiente ejemplo. En un ambiente monopolístico, bajo la demanda mostrada en la ecuación (9.109), se busca encontrar el equilibrio de mercado. Asuma que k es constante y que la función inversa de demanda viene dada por:

$$P(q) = \frac{1 - e^{-kq}}{q}, k > 0 \quad (9.109)$$

Como se revisó en el caso en que existe un productor monopolístico, la regla establece que la tasa de crecimiento del ingreso marginal debe ser idéntica a la tasa de interés del mercado. En este caso, el ingreso marginal viene dado por:

$$IMg = \frac{\partial}{\partial q} (P(q)q(t)) = \frac{\partial}{\partial q} (1 - e^{-kq}) = Ke^{-kq} \quad (9.110)$$

Ahora, por (9.107):

$$ke^{-kq} = Ce^{rt} \quad (9.111)$$

Así:

$$q(t) = \frac{1}{k} \left\{ \log \left(\frac{C}{k} \right) - rt \right\} \quad (9.112)$$

Como se asume que el recurso es agotable, se sabe que:

$$\int_0^T q(t) dt = S_0 \quad (9.113)$$

Integrando:

$$\frac{1}{k} \ln \left(\frac{C}{k} \right) T - \frac{rT^2}{2} = S_0 \quad (9.114)$$

De lo anterior se puede despejar C , lo cual depende de k , T , r y S_0 . Si se vuelve a ingresar a $q(t)$ en (9.112) se obtiene:

$$q(t) = \frac{1}{k} \left\{ \ln \left(\frac{C(k,T,r,S_0)}{k} \right) - rt \right\} \quad (9.115)$$

De (9.115) se concluye que, si se conoce el valor de k , r , S_0 y T , entonces se podrá conocer exactamente cuánto producirá el monopolista en cada instante de tiempo.

9.5.2 Relajación recurso homogéneo

En este caso se mantendrán todos los supuestos del mundo ideal de Hotelling, incluido el de competencia perfecta, pero se relajará el supuesto de que el recurso es homogéneo. Relajar este supuesto es de suma importancia ya que una de las mayores críticas hacia Hotelling es que en la vida real el recurso es no homogéneo (o heterogéneo). Así por ejemplo, como se explica en el Capítulo 1, la mayoría de los depósitos de mineral presentan en términos de las leyes de sus elementos de interés una distribución lognormal.

Primero, la curva tonelaje ley muestra que existe una relación inversa entre el tonelaje y la ley de corte, tal y como se aprecia en la Figura 9.7 a continuación.

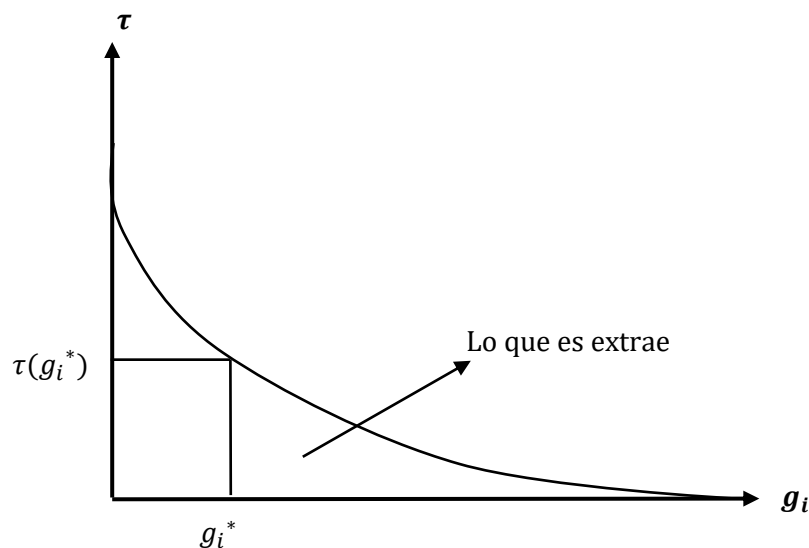


Figura 9.7. Curva tonelaje-ley para un recurso heterogéneo

En este caso τ corresponde al tonelaje de mineral y g_i es la ley de corte, la que define la separación entre el mineral y lastre.

Así, si se extraen recursos con una ley de corte superior o igual a g_i^* se podrá extraer $\tau(g_i^*)$. Por otro lado, la curva tonelaje-ley para un caso homogéneo es que todo el recurso tiene la misma ley. Todo está bajo la ley (g) y nada sobre ella. Esto se aprecia en la Figura 9.8:

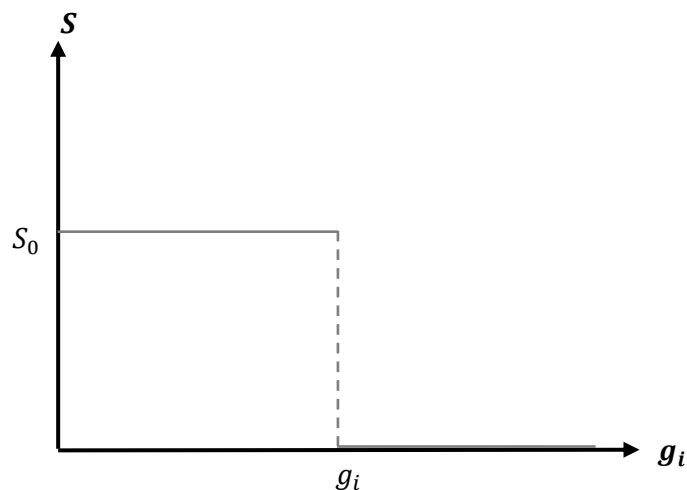


Figura 9.8. Curva tonelaje-ley para un recurso homogéneo

A continuación, se derivará la regla de Hotelling relajando el supuesto de homogeneidad de la ley. Para esto defínase:

- $q(t)$: cantidad del mineral que se extrae.
- $g(t)$: ley (incluye la recuperación metalúrgica).

Se puede plantear así el problema de la mina como uno en el que se busca maximizar los flujos de caja descontados sujeto a la restricción de que los recursos extraídos reducen el tamaño y calidad del depósito. A diferencia de ejemplos anteriores ahora $q(t)$ no es lo que se vende directamente al consumidor, sino que ahora es la cantidad total de mineral extraída. Lo que se vende al consumidor es este nuevo $q(t)$ multiplicado por la ley, la cual depende del tiempo. Así, se tiene material finito y con leyes variables. El problema es entonces:

$$\max_{q(t)} \int_0^T e^{-rt} P(t) q(t) g(t) dt \quad (9.116)$$

s. a.

$$\dot{S}(t) = -q(t) \quad (9.117)$$

Es importante destacar que la ley, $g(t)$, y la cantidad de mineral extraído, $q(t)$, están relacionadas por la curva tonelaje-ley. Para resolver el problema se asumirá que la extracción de mineral se produce explotando primero las leyes altas y, en la medida que estas se agotan,

se eligen las leyes que siguen en valor. Esto es equivalente a pensar que el yacimiento se explotará de derecha a izquierda según muestra la curva tonelaje-ley.

Aunque evidentemente la explotación de minas reales no hace posible un consumo de reservas estrictamente decreciente en leyes, en la realidad el esfuerzo de la planificación se enfoca precisamente en esta estrategia. Cabe notar que en este caso también se incurre en una simplificación de la realidad ya que, en la práctica, en el problema minero, existen restricciones físicas que determinan la secuencia de extracción que se puede tener en el yacimiento. Así, por ejemplo, es común que las zonas de mayores leyes del yacimiento se encuentren a mayor profundidad por lo que no podrán ser las primeras en ser extraídas.⁴⁸ Aun así, el autor ha podido comprobar por ejemplo como en pórfidos de cobre esta sencilla regla de explotación representa de buena forma la evolución de la explotación.

Para relacionar la ley $g(t)$ con las variables de control y estado del problema se debe relacionar en última instancia a las reservas remanentes, S , con la variable de control, $q(t)$. La Figura 9.9 presenta la relación entre ambas variables, y la ley del mineral.

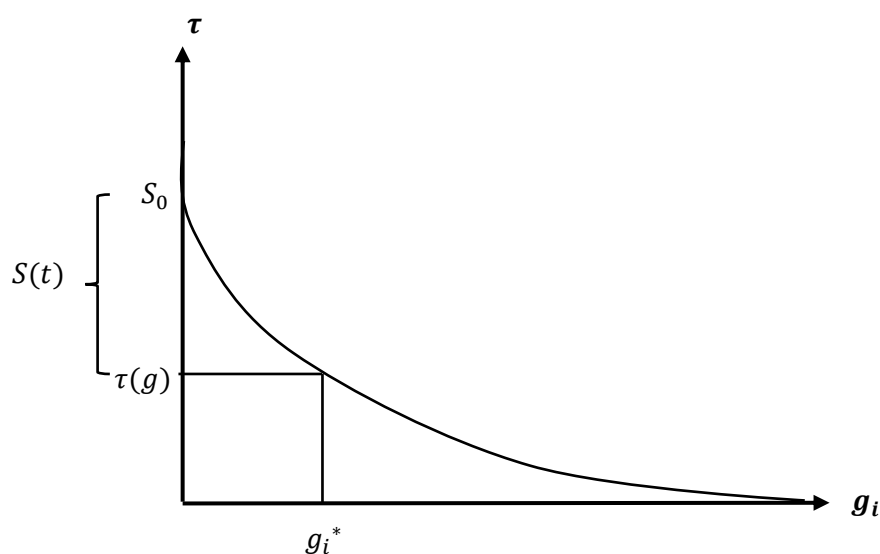


Figura 9.9. Relación entre la variable de estado y las leyes del mineral

De la Figura 9.9 se ve que existe una relación entre los recursos iniciales y los recursos en ese instante de tiempo. Esto se muestra en la siguiente ecuación:

⁴⁸ Para un análisis más detallado de esta situación y cómo el recurso heterogéneo afecta a la producción de recursos se recomienda consultar Cairns (1986).

$$S_0 - \tau(g(t)) = S(t) \quad (9.118)$$

Para despejar las leyes en función del tiempo se despeja:

$$S_0 - S(t) = \tau(g(t)) / \tau^{-1} \quad (9.119)$$

Aplicando de esta forma la inversa de la función de tonelaje:

$$\tau^{-1}(S_0 - S(t)) = g(t) \quad (9.120)$$

De lo anterior, la ley $g(t)$ es una función de la variable de estado. Si se conoce la función τ , entonces, también se puede determinar τ^{-1} . Así, se puede reescribir el funcional anterior de la siguiente manera:

$$\max_{q(t)} \int_0^T e^{-rt} P(t) q(t) \tau^{-1}(S_0 - S(t)) \partial t \quad (9.121)$$

s. a.

$$\dot{S}(t) = -q(t) \quad (9.122)$$

Este problema es resoluble por distintas técnicas de optimización dinámica, pero en la presente exposición se utilizará, sin pérdida de generalidad, control óptimo.

En este caso, lo primero es escribir el Hamiltoniano:

$$H = P(t) q(t) \tau^{-1}(S_0 - S(t)) e^{-rt} - v(t) q(t) \quad (9.123)$$

Planteando las condiciones del principio del máximo:

i. Condición del máximo:

$$\max_{q(t)} H \Rightarrow \max_{q(t)} [P(t) \tau^{-1}(S_0 - S(t)) e^{-rt} - v(t)] q(t) \quad (9.124)$$

Como H es lineal en $q(t)$, se tienen dos casos: o $q(t)$ está en los bordes o lo que multiplica a $q(t)$ es cero. Pero el paréntesis que acompaña a $q(t)$ debe ser cero, ya que la empresa o no producirá nada o producirá todas las reservas de una sola vez. Así, se debe cumplir que:

$$P(t) \tau^{-1}(S_0 - S(t)) e^{-rt} = v(t) \quad (9.125)$$

ii. Ecuación de estado:

$$\dot{S}(t) = -q(t) \quad (9.126)$$

iii. Ecuación adjunta:

En este caso se debe recordar como derivar la función inversa. De hecho, en general se tiene

que: $\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$. Luego:

$$\dot{v}(t) = -\frac{\partial H}{\partial s} = -P(t)q(t) \frac{-1}{\dot{\tau}(\tau^{-1}(S_0 - S(t)))} e^{-rt} = \frac{P(t)q(t)}{\dot{\tau}(\tau^{-1}(S_0 - S(t)))} e^{-rt} \quad (9.127)$$

Tomando (i) y derivando esta ecuación con respecto al tiempo:

$$\frac{\partial(i)}{\partial t} \Rightarrow \dot{P}(t)\tau^{-1}(S_0 - S(t))e^{-rt} - \frac{P(t)\dot{S}(t)}{\dot{\tau}(\tau^{-1}(S_0 - S(t)))} e^{-rt} + P(t)\tau^{-1}(S_0 - S(t))(-r)e^{-rt} = \dot{v}(t) \quad (9.128)$$

Remplazando (9.126) y (9.127) en la ecuación anterior:

$$(\dot{P}(t) - P(t)r)\tau^{-1}(S_0 - S(t))e^{-rt} + \frac{P(t)q(t)}{\dot{\tau}(\tau^{-1}(S_0 - S(t)))} e^{-rt} = \frac{P(t)q(t)}{\dot{\tau}(\tau^{-1}(S_0 - S(t)))} e^{-rt} \quad (9.129)$$

$$(\dot{P}(t) - P(t)r)\tau^{-1}(S_0 - S(t))e^{-rt} = 0 \quad (9.130)$$

Como la función exponencial y la ley son positivas, la ecuación anterior se puede dividir por $\tau^{-1}(S_0 - S(t))e^{-rt}$ obteniéndose:

$$\dot{P}(t) - P(t)r = 0 \quad (9.131)$$

O equivalentemente:

$$\frac{\dot{P}(t)}{P(t)} = r \quad (9.132)$$

Por lo tanto, la regla de Hotelling ¡también se cumple para el caso de los recursos heterogéneos! Esto se explica fundamentalmente debido a que no existen costos de producción ni limitaciones físicas para acceder a las mejores leyes (de no ser así efectivamente la regla no se mantendría inalterada).

Nótese que este resultado es inédito en la literatura, y fue derivado por el autor precisamente como parte de la preparación de las clases para el curso asociado a este libro.

9.5.3 Relajación del supuesto de costos de extracción

Se relajará el supuesto de que no existen costos de extracción, considerándose para tal fin una función de costos que en general dependerá de la producción y de las reservas remanentes, es decir, $C(q(t), S(t))$. Se asume que $C_q > 0$, $C_{qq} > 0$ y $C_s < 0$. De aquí, los costos se incrementan al aumentar la producción q , la función es convexa con respecto a q , de forma tal que el mineral que se extrae primero es el que tiene los menores costos (Slade y Thille, 2009). Con esto el problema de la mina es:

$$\max_{q(t)} \int_0^T e^{-rt} [P(t)q(t) - C(q(t), S(t))] dt \quad (9.126)$$

s. a.

$$\dot{S} = -q(t) \quad (9.127)$$

$$S(0) = S_0 \quad (9.128)$$

$$S(t), q(t) > 0 \quad (9.129)$$

Resolviendo por control óptimo, el Hamiltoniano en valor corriente es:

$$H = P(t)q(t) - C(q(t), S(t)) + v(t)(-q(t)) \quad (9.130)$$

De forma tal que se procede a resolver por el principio del máximo:

i. Condición del máximo:

$$\frac{\partial H}{\partial q} = P - Cq - v = 0 \quad (9.131)$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial q^2} = -C_{qq} < 0 \quad (9.132)$$

ii. Ecuación de estado:

$$\dot{S} = -q \quad (9.133)$$

iii. Ecuación adjunta:

$$\dot{v} = rv - \frac{\partial H}{\partial S} = rv + C_s \quad (9.134)$$

Derivando (i) respecto al tiempo y reemplazando en (iii) se obtiene:

$$\dot{P} - \frac{d}{dt} Cq = rv + C_s \quad (9.135)$$

$$\frac{\dot{P} - \frac{d}{dt}Cq}{P - Cq} = r + \frac{Cs}{v} \quad (9.136)$$

Como v es el precio sombra, es este el que aumenta a una tasa menor que r , porque la producción de hoy lleva a aumentar el costo de la producción futura (Slade y Thille, 2009).

9.5.4 Relajación del supuesto de cambio tecnológico

Se relajará ahora el supuesto de que no exista cambio tecnológico. Esto se puede hacer al tomar la función de costos $C(q(t), S(t), t)$ con $C_t < 0$ y $C_{qt} < 0$; es decir, los costos van disminuyendo a medida que van ocurriendo cambios tecnológicos (Farzin, 1992). Si se toma una función de costos dada por $C(q(t), S(t), t) = h(t)g(S)q$ entonces:

$$Cq = hg \quad (9.137)$$

$$Cs = hg'q \quad (9.138)$$

$$\frac{d}{dt}Cq = h'g + hg' = h'g - hg'q \quad (9.139)$$

De lo anterior se obtiene que:

$$\dot{P} - \frac{d}{dt}Cq = rv + Cs \quad (9.140)$$

$$\dot{P} - h'g + hg'q = r(P - Cq) + hg'q \quad (9.141)$$

$$\dot{P} = r(P - Cq) + h'g \quad (9.142)$$

El último término representa cómo cambian los costos marginales por el avance tecnológico. Como este término es negativo el precio no solo crece a una tasa menor que r , sino que también puede llegar a bajar (Slade y Thille, 2009). Esto sucede cuando el costo disminuye a una tasa mayor que la tasa de crecimiento del costo de oportunidad. Esto también implica que las reservas no se extraen en un orden estricto de costos crecientes dado que el costo disminuye. Si este lo hace suficientemente rápido puede implicar extraer recursos con costos más bajos en el futuro, contrarrestando así otros efectos estructurales (como la caída en leyes) que tienen a aumentar los costos de explotación y/o procesamiento.

9.5.5 Relajación del supuesto de no restricción de capacidad

En la minería existen restricciones generalmente activas referidas a la capacidad de extracción, procesamiento y ventas del producto mineral. Esto debido a que es necesario el uso de equipos para poder extraer el mineral, así como se requiere de una planta de procesamiento para procesar el mineral e infraestructura logística para poder garantizar el colocar el producto en el mercado. Todo esto se encuentra asociado a un alto nivel inversión y, obviamente, con objeto de poder ampliar la capacidad de producción la mina deberá incurrir en mayores costos.

El problema considerando una capacidad de extracción K se puede plantear matemáticamente de la siguiente forma:

$$\max_{q(t)} \int_0^T e^{-rt} [P(t) q(t)] dt \quad (9.143)$$

s. a.

$$\dot{S} = -q(t) \quad (9.144)$$

$$S(0) = S_0 \quad (9.145)$$

$$K \geq q(t) \geq 0 \quad (9.146)$$

$$S(t) \geq 0 \quad (9.147)$$

La solución de este problema, por requerir algunos elementos adicionales a los expuestos hasta ahora (asociados a la inversión en la capacidad), será analizado en detalle en el Capítulo 11.

9.5.6 Relajación del supuesto de no incertidumbre

Uno de los aspectos más criticables del mundo ideal de Hotelling es que no considera ningún tipo de incertidumbre en su formulación. La minería, por su parte, es un negocio en el que existen infinitas fuentes de incertidumbres. En particular, una de las incertidumbres relevantes del problema de la mina es que la geología del yacimiento no es del todo conocida al momento de decidir invertir o incluso mientras se realiza su explotación. Esto tiene implicancias en no conocer ni las leyes ni la cantidad de los recursos en cada instante de tiempo.

Otra variable relevante es el desconocimiento de los precios de los *commodities* en el futuro.

La inclusión de incertidumbre en el problema de la mina se estudiará en detalle en la Parte IV de este libro, donde se detallará cómo se modifican los resultados obtenidos por Hotelling cuando una o varias fuentes de incertidumbre son relevantes en la formulación del problema.

9.6 Otras extensiones teóricas del mundo ideal de Hotelling

En base a Krautkramer (1998), se analizan a continuación dos extensiones al mundo ideal de Hotelling.

9.6.1 Mercados imperfectos y mercados de futuros

En teoría, un mercado perfectamente competitivo puede asignar un recurso no renovable de manera eficiente en el tiempo siempre y cuando exista un conjunto de mercados, incluyendo mercados de capital, *forward* y riesgo. En ausencia de mercados de futuros o *forwards*, los agentes en la economía deberán formarse expectativas en cuanto al precio en el futuro.

En complemento con los problemas creados por la ausencia de un conjunto completo de mercados *forward*, los mercados de recursos no renovables están sujetos a las mismas categorías de fallas encontradas en otros mercados. Una empresa minera con poder de mercado se enfrenta a una curva de demanda con pendiente negativa, y el beneficio de maximizar la extracción ocurre cuando el beneficio marginal, en lugar del precio, es igual al costo marginal de extracción más el costo de uso. En ausencia de efectos de *stock*, la diferencia entre el beneficio y costo marginal aumenta con la tasa de interés. El efecto del poder de mercado en el patrón intertemporal de extracción depende de cómo varía la elasticidad de la demanda con la cantidad producida. En el caso de que la elasticidad sea constante y el costo marginal de extracción sea nulo, el patrón de extracción y la trayectoria del precio son los mismos que un monopolio bajo competencia perfecta.

Para ver el efecto que tiene la introducción de mercados *forward* o de futuros en un mercado duopólico de recursos agotables el lector puede consultar Liski y Montero (2007), mientras que una extensión de este resultado a un mercado oligopólico cualquiera se presenta en Guzmán (2007).

9.6.2 Exploración

El modelo básico de Hotelling asume un *stock* de recurso conocido cuando, de hecho, la disponibilidad del recurso depende de las exploraciones. Para muchos recursos no renovables el descubrimiento de nuevos depósitos ha excedido el consumo de estos, por lo que las reservas

han aumentado en el tiempo. La exploración de recursos altera la ecuación de estado. Si $e(t)$ denota la actividad de exploración y $D(e(t))$ denota las reservas descubiertas en el proceso de exploración, la ecuación se transforma en $S(t) = D(e(t)) - q(t)$, donde D es una función aleatoria si los resultados de la exploración son inciertos.

La actividad de exploración entra negativamente en la función de beneficio cuando la exploración trae costos. El nivel óptimo de exploración equilibra el beneficio marginal esperado por la exploración, que incluye el valor de reservas adicionales con el costo marginal de exploración, incluyendo el costo de uso de agotar las oportunidades de exploración.

Una motivación para la exploración antes de que se hayan agotado todos los recursos es que el descubrimiento de nuevos depósitos disminuye los costos de extracción. Si el nivel de reservas iniciales es pequeño, el costo de extracción es alto, lo que implica que la tasa inicial de extracción es baja y el precio inicial es alto. El alto precio y costo inicial alientan la exploración para adquirir reservas para disminuir el costo de extracción. Por otro lado, la acumulación de reservas ofrece mayor extracción a través de bajos costos de extracción y reduce el incentivo de explorar. Estos dos efectos eventualmente reducen las reservas y la extracción comienza a disminuir mientras las reservas también.

Cabe señalar que en el Capítulo 15 se expondrá en mayor detalle la teoría de la exploración óptima de minas.

9.7 Problemas resueltos

Problema 9.1

Para el siguiente problema de control óptimo:

$$\max_{q(t)} VAN(q(t)) = \int_0^T e^{-rt}(P(t) - c_0 e^{-vt})q(t)dt$$

s. a.

$$\dot{S} = -q(t)$$

a. Discuta el significado de este problema en la economía de los minerales, mencionando explícitamente qué significado tendría cada una de las variables que aparecen tanto en el funcionamiento del VAN como en la restricción.

Para la función inversa de la demanda dada por $P(t) = (q(t))^{-\frac{1}{n}}$, con $n > 0$. Encuentre:

- b. La función de precio de equilibrio para cada instante de tiempo t .
- c. El instante de tiempo t en el cual el precio de mercado es mínimo.

Solución:

a. $P(t)$ representa el precio *spot* de un mineral en el tiempo t ; $c_0 e^{-vt}$ el costo unitario por extraer el mineral en un tiempo t , e^{-rt} es un factor de descuento en tiempo continuo, el cual descuenta a tasa en cada momento y se aplica directamente al beneficio en el tiempo t . $q(t)$ es el nivel de extracción (o disminución) de las reservas minerales en t , desde lo que se desprende directamente la restricción del problema; y por último es necesario integrarlo en cada tiempo para sacar el valor neto de los beneficios.

Cabe notar que la única variable escrita de manera no convencional es el costo unitario $c_0 e^{-vt}$, por lo que es necesario explicarlo en detalle. Este se expresa por un costo inicial descontado a una tasa v en el tiempo. Si esta tasa de descuento v fuese positiva, podría representar fuerzas que tienden a disminuir los costos unitarios como las nuevas tecnologías, por ejemplo. Por el contrario, si v fuera negativa, podría representar el efecto del agotamiento de las reservas, subida de sueldos, huelgas y otros factores que “encarecen” el extraer la roca desde un depósito y transformarla en una especie vendible.

b. Este problema se puede resolver al utilizar el principio del máximo, para lo que primero se debe construir el Hamiltoniano de valor corriente.

$$\hat{H}(S, q, \lambda) = (P(t) - c_0 e^{-vt})q(t) + \lambda(-q(t))$$

Al considerar la función de demanda:

$$\hat{H}(S, q, \lambda) = (q(t))^{\frac{n-1}{n}} - c_0 e^{-vt} q(t) + \lambda(-q(t))$$

(i) Condición del máximo:

$$\max_{q(t)} \hat{H}(S, q, \lambda) \rightarrow \frac{\partial \hat{H}}{\partial q} = \frac{(n-1)}{n} q(t)^{-\frac{1}{n}} - c_0 e^{-vt} - \lambda = 0$$

Además, se debe verificar que sea efectivamente un máximo:

$$\frac{\partial^2 \hat{H}}{\partial q^2} = \frac{1-n}{n^2} q(t)^{-\frac{1+n}{n}} < 0$$

De lo que se desprende que $n > 1$.

(ii) Ecuación de estado:

$$\dot{S} = -q(t) = \frac{\partial \hat{H}}{\partial \lambda}$$

(iii) Ecuación adjunta;

$$\dot{\lambda} = r\lambda - \frac{\partial \hat{H}}{\partial S} \rightarrow \dot{\lambda} = r\lambda$$

$$\lambda(t) = \lambda_0 e^{rt}$$

(iv) Transversalidad:

$$\hat{H}(T) = 0, \text{ ya que } T \text{ no es necesariamente fijo.}$$

Luego, si se toma (i):

$$q(t)^{-\frac{1}{n}} = P(t) = \frac{n}{n-1} (\lambda_0 e^{rt} + c_0 e^{-vt})$$

Esta función representa el precio de equilibrio en el tiempo (fijado por el mercado en base a la oferta y demanda).

c. El precio está representado por la suma de una función creciente y otro decreciente en el tiempo, por lo que su mínimo será producto de un *trade-off* entre estas dos partes.

$$\frac{\partial P(t)}{\partial t} = -c_0 v e^{-vt} + \lambda_0 r e^{rt} = 0$$

Resolviendo, se obtiene que:

$$t^* = \frac{1}{r+v} \ln\left(\frac{c_0 v}{\lambda_0 r}\right)$$

Problema 9.2

Resuelva el problema planteado por Hotelling para el caso perfectamente competitivo. Considere que el precio del commodity mineral es:

$$P(t) = p_0 e^{rt}$$

Considere que la extracción de mineral en un instante t queda determinado por la función de demanda. La cual es lineal en $P(t)$ y viene dada por $q(t) = D(P(t)) = a - bP(t)$.

Solución:

Dado que Hotelling plantea que no existen costos por extracción de mineral no tiene sentido dejar reservas sin explotar. Luego se agotarán todas las reservas iniciales. Esto es:

$$\int_0^{T_c} q(t) dt = S_0$$

Asimismo, se sabe que:

$$q(T_c) = 0$$

$$q(T_c) = D(P_0 e^{rT_c}) = 0$$

Esto implica que:

$$P_0 = \frac{ae^{-rT_c}}{b}$$

Por lo tanto,

$$q(t) = a - ae^{-rT_c} e^{rt} = a(1 - e^{r(t-T_c)})$$

Luego:

$$\int_0^{T_c} a(1 - e^{r(t-T_c)}) dt = S_0$$

Tras resolver la integral, se obtiene la ecuación:

$$T_c - \frac{1 - e^{rT_c}}{r} = \frac{S_0}{a}$$

La cual se puede resolver numéricamente mediante algoritmos para obtener el valor de T_c .

Problema 9.3

Resuelva el caso en que la industria minera es monopolística. Encuentre la tasa de producción de mineral y el LOM. Considere nuevamente que la extracción de mineral en un instante t queda determinada por la función de demanda, la cual es lineal en $P(t)$.

$$q(t) = D(P(t)) = a - bP(t)$$

Solución:

Nuevamente al considerar que no existen costos de extracción se busca maximizar:

$$\pi = \int_0^{T_m} e^{-rt} P(q(t))q(t)dt$$

Donde $P(q(t))$ es la la función inversa de demanda.

Luego la condición de agotabilidad viene dada por:

$$\dot{S} = -q(t)$$

$$S(0) = S_0$$

De esta manera el Hamiltoniano de valor corriente es:

$$\hat{H} = P(q(t))q(t) - v(t)q(t)$$

Al plantear las ecuaciones se obtiene:

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial q(t)} = P(q(t)) + \dot{P}(q(t))q(t) - v(t) = 0$$

$$v(t) = P(q(t)) + \dot{P}(q(t))q(t)$$

$$\dot{v} = rv \rightarrow v(t) = v_0 e^{rt} \quad (2)$$

$$\dot{S} = -q(t)$$

Esto implica que:

$$v(t) = P(q(t)) + \dot{P}(q(t))q(t) = M(t)$$

$$\frac{\dot{M}(t)}{M(t)} = r$$

Así:

$$P(t) = \frac{a}{b} - \frac{q(t)}{b} M(t) = \frac{a}{b} - \frac{2q(t)}{b}$$

Asimismo, se sabe que $q(T_m) = 0$. Evaluando en $t = T_m$, se obtiene que:

$$v(T_m) = v_0 e^{rT_m} = \frac{a}{b}$$

De donde se puede deducir que:

$$v_0 = \frac{ae^{-rT_m}}{b}$$

Luego,

$$v(t) = \frac{ae^{r(t-T_m)}}{b}$$

De aquí:

$$q(t) = \frac{a(1 - e^{r(t-T_m)})}{2}$$

Al resolver la integral:

$$\int_0^{T_m} q(t) dt = \frac{aT_m}{2} - \frac{a(1 - e^{-rT_m})}{2r} = S_0$$

$$T_m - \frac{1 - e^{-rT_m}}{r} = \frac{2S_0}{a}$$

La cual se puede resolver numéricamente para encontrar T_m .

Problema 9.4

Encuentre la solución numérica para las ecuaciones planteadas en los problemas 9.2 y 9.3, utilice los valores de la siguiente tabla. Luego grafique las curvas de extracción de mineral en el tiempo para el caso competitivo y monopolístico. Compare y comente.

PARÁMETRO	VALOR
a	100
b	10
r	10%

S_0	1000
-------	------

Solución:

Por las soluciones antes encontradas se tiene que:

$$T_c - \frac{1 - e^{rT_c}}{r} = \frac{S_0}{a}$$

$$T_m - \frac{1 - e^{-rT_m}}{r} = \frac{2S_0}{a}$$

Dado que la función de la izquierda es claramente creciente en función de T , se puede asegurar que:

$$T_c < T_m$$

Asimismo, se puede demostrar que:

$$q_c(0) > q_m(0)$$

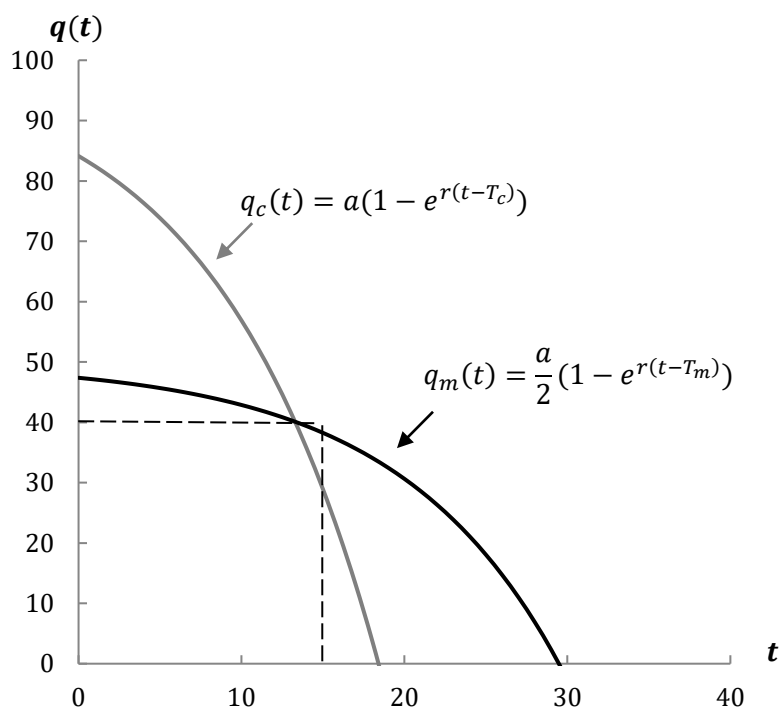
En otras palabras, en una industria competitiva se explota el recurso inicialmente a una tasa mayor que en el caso de una industria monopolística. Asimismo, la industria competitiva agota el recurso mucho antes que en caso monopolístico.

Al evaluar las ecuaciones con los valores de los parámetros dados se busca T mediante la minimización del error utilizando Solver de MS Excel. Así, se llega a:

$$T_c = 18,41$$

$$T_m = 29,48$$

Al graficar se obtiene:

Solución de $q_c(t)$ y $q_m(t)$ **Problema 9.5**

Considere la explotación de un *commodity* mineral bajo los supuestos del mundo ideal de Hotelling, pero en el cual existe un costo marginal de producción dado por $c(S)$ decreciente y estrictamente convexo en los recursos remanentes S . La ecuación de estado del recurso viene dada por: $\dot{S} = f(S) - q(t)$, donde $f(S)$ es una función estrictamente cóncava asociada a la exploración del recurso, con $f(0) = 0$. $q(t)$ corresponde a la producción del *commodity* en el instante t . Sea $r > 0$ la tasa de descuento o interés en el mercado. Asuma que la función de demanda P es tal que el recurso se explota hasta un tiempo infinito.

- Plantee el problema de optimización dinámica del equilibrio de mercado asumiendo que la variable de control corresponde a la producción del *commodity* en cada instante de tiempo.
- Demuestre que en el equilibrio de mercado se debe cumplir que:

$$\frac{d(P - c)}{dt} + f'(S) - \frac{c'(S)q}{P - c} = r$$

c. Muestre que bajo condiciones de estado estacionario (esto es, $\dot{P} = \dot{S} = 0$), se debe cumplir que el precio de equilibrio, P^* , satisface:

$$P^* = c(S) + \frac{-c'(S)f(S)}{r - f'(S)}$$

d. Muestre que el precio de equilibrio en estado estacionario en este mercado difiere precisamente en la cantidad $-\frac{c'(S)f(S)}{r-f'(S)}$ de aquel derivado en un mercado de un bien no agotable. Muestre que necesariamente dicha diferencia es estrictamente positiva.

Solución:

a. El problema de optimización dinámica en esta oportunidad queda determinado por:

$$\max_{q(t)} \int_0^{\infty} e^{-rt} (Pq - c(S)q) dt$$

s.a.

$$\dot{S} = f(S) - q(t)$$

$$f, S \geq 0$$

b. Mediante control óptimo se construye el Hamiltoniano,

$$\hat{H} = (P - c(S) - v)q + vf(S)$$

Del cual se observa que \hat{H} es lineal en $q(t)$. Así se tiene que:

i) Condición del máximo:

$$q(t) \begin{cases} q_{max} & P - c(S) - v > 0 \\ q_{eq} & P - c(S) - v = 0 \\ 0 & P - c(S) - v < 0 \end{cases}$$

ii) Ecuación de estado:

$$\dot{S} = f(S) - q$$

iii) Ecuación adjunta:

$$\dot{v} = rv - \hat{H}_S = rv + c'(S)q - vf'(S)$$

iv) Transversalidad:

No se necesita pues basta con reemplazar por $q(P)$, que es la función de demanda.

Luego, de las condiciones anteriores se determinará la expresión solicitada. En primer lugar, se tiene que como es un mundo ideal de Hotelling:

$$P - c(S) - v = 0$$

Ahora, como esta ecuación es válida para todo $t \in [0, T]$, se diferenciará con respecto al tiempo:

$$P - c(S) = v / \left(\frac{d}{dt}\right)$$

$$\frac{d}{dt}(P - c(S)) = \dot{v}$$

$$\frac{d}{dt}(P - c(S)) = r(P - c(S)) + c'(S)q - (P - c(S))f'(S)$$

Al reordenar se obtiene precisamente lo solicitado:

$$\frac{\frac{d}{dt}(P - c(S))}{P - c(S)} = r + \frac{c'(S)q}{P - c(S)} - f'(S)$$

$$\frac{\frac{d}{dt}(P - c(S))}{P - c(S)} + f'(S) - \frac{c'(S)q}{P - c(S)} = r$$

c. En un estado estacionario para el precio ($\dot{P} = 0$), la ecuación anterior se transforma en:

$$\frac{-\frac{d}{dt}c(S)}{P - c(S)} + f'(S) - \frac{c'(S)q}{P - c(S)} = r$$

$$\frac{1}{P - c(S)} \left[-\frac{d}{dt}c(S) - c'(S)q \right] + f'(S) = r$$

$$\frac{1}{P - c(S)} \left[-c'(S)\dot{S} - c'(S)q \right] + f'(S) = r$$

Que si se considera adicionalmente la estacionariedad de reservas ($\dot{S} = 0$) implica que

$$-\frac{c'(S)}{P - c(S)} [\dot{S} + q] + f'(S) = r$$

Pero si se reordena, entonces:

$$-\frac{c'(S)}{P - c(S)} [f(S)] + f'(S) = r$$

$$P^* = c(S) - \frac{-c'(S)f(S)}{r - f'(S)}$$

Que es lo que se requiere demostrar.

d. En el mundo ideal de Hotelling, si el recurso no es agotable, se tiene:

$$P = \text{Costo marginal} = c(S)$$

Tal que la diferencia es:

$$\frac{-c'(S)f(S)}{r - f'(S)}$$

Donde, por enunciado $c'(S) < 0$ y $f''(S) < 0$. Además, dado que se está en un mundo con un recurso no agotable, es decir, que es tal que $\dot{S} = 0 \rightarrow f(S) q > 0$ siempre que esté produciendo.

Finalmente, se tiene que si $f(S)$ representa la renovación del recurso, entonces $f'(S)$ es un retorno correspondiente a la tasa de crecimiento de las reservas debido a la no extracción de una unidad.

Entonces, el dilema que se enfrenta el productor se da entre extraer hoy y obtener un retorno a tasa r o dejar esa unidad de recurso en la tierra y obtener un retorno de $f'(S)$. En este caso, como hay producción en todo $t \in [0, T]$, la única posibilidad es que $r > f'(S)$.

Luego, con todo lo anterior, queda demostrado que:

$$\frac{-c'(S)f(S)}{r - f'(S)} > 0$$

Problema 9.6

Considere dos mercados de minerales 1 y 2, los que son considerados por los consumidores perfectos sustitutos entre sí. La demanda por cualquiera de estos productos sigue una función inversa de demanda del tipo:

$$P(q_i) = C q_i^{-\frac{1}{\alpha}}$$

Con $\alpha, C > 0$ y q_i representa la demanda por el mineral i -ésimo ($i = 1, 2$). La oferta de ambos minerales satisface las restricciones del mundo ideal de Hotelling, salvo por el costo de producción, el cual es de c_1 y c_2 , respectivamente. Los costos de producción satisfacen que $c_1 < c_2 < C$ y los recursos iniciales son de $S_1 < \infty$ para el caso del mineral 1 mientras que para el mineral 2 el recurso se considera infinitamente abundante.

- Formule el problema de encontrar el equilibrio en ambos mercados de minerales.
- Resuelva el problema anterior, determinando explícitamente la producción en el tiempo de cada mineral, así como el tiempo en el cual se agota el mineral 1. Acompañe su solución de un gráfico del precio de ambos minerales en el tiempo.

Solución:

a. Para el mercado mineral 1, el problema a resolver queda determinado por:

$$\max_{q_1, T_1} \int_0^{T_1} e^{-rt} (P_1(t)q_1(t) - c_1q_1(t)) dt$$

s. a

$$S(0) = S_1$$

, con $P_1(t) = C q_1^{-\frac{1}{\alpha}}(t)$.

Al resolver el problema con cálculo de variaciones. Para ello, se define el Lagrangeano:

$$L = e^{-rt}(P_1(t)q_1(t) - c_1q_1(t)) + \lambda q_1(t)$$

Que al ser desarrollado por Euler-Lagrange es:

$$F_q - \frac{dF_{q'}}{dt} = 0$$

$$[e^{-rt}(P(t) - c_1) + \lambda] = 0$$

Y que como es válida para todo $t \in [0, T]$ es diferenciable respecto a t , de modo que:

$$-re^{-rt}(P_1 - c_1) + e^{-rt} \left(\frac{d}{dt} (P_1 - c_1) \right) = 0$$

Así se obtiene que al reagrupar términos se obtiene la regla de Hotelling:

$$r = \frac{\frac{d}{dt} (P_1(t) - c_1)}{P_1 - c_1}$$

Es decir, se obtiene que la tasa relativa de cambio del beneficio marginal de extraer y volver una unidad de recurso no renovable se equipara con la tasa a la cual un activo podría crecer si fuese colocado en una cuenta que crece a una tasa $r > 0$.

Luego, al resolver la ecuación diferencial, se llega a que:

$$P_1(t) = c_1 + P_0 e^{rt}$$

$$P_1(t) = c_1 + P_0 e^{rt} = C q_1^{\frac{1}{a}}(t)$$

De donde se obtiene que:

$$q_1(t) = \left(\frac{c_1 + P_0 e^{rt}}{C} \right)^{-a}$$

Por otro lado, para el mercado del mineral 2 se tiene que el problema a resolver es:

$$\max_{q_2, T_2} \int_0^{T_2} e^{-rt} \left(C q_2^{\frac{a-1}{a}} - c_2 q_2(t) \right) dt$$

Sujeto a que $S_2(0) = \infty$ (es decir, no existe la restricción de agotabilidad).

De este modo se tiene que solo hay costos de operación y no de oportunidad. Ahora, se resolverá el problema por cálculo de variaciones para el segundo mercado. Para ello, se define el Lagrangeano:

$$L = e^{-rt} (P_2(t) q_2(t) - c_2 q_2(t))$$

Que al ser resuelto por Euler-Lagrange es:

$$F_q - \frac{dF_{q'}}{dt} = 0$$

$$[e^{-rt} (P_2(t) - c_2)] = 0$$

$$P_2(t) = Cq_2^{-\frac{1}{a}}(t) = c_2$$

$$q_2 = \left(\frac{c_2}{C}\right)^{-a}$$

Ahora se demostrará genéricamente por qué bajo competencia perfecta, con costos de producción considerablemente distintos, dos productores no producirán simultáneamente.

Sea:

- $b_1(t)$: precio *spot* de reservas que aún no se extraen del mercado 1.
- $b_2(t)$: precio *spot* de reservas que aún no se extraen del mercado 2.

Luego, el principio de arbitraje exige que para los 2 productores les es indiferente la política entre extraer o guardar las reservas:

$$\frac{\dot{b}_1(t)}{b_1(t)} = \frac{\dot{b}_2(t)}{b_2(t)} = r$$

Como el mineral extraído se vende a un mismo precio, implica necesariamente que la siguiente igualdad se debe cumplir:

$$c_1 + b_1(t) = c_2 + b_2(t) \quad \forall t$$

En otras palabras, el valor de una unidad no extraída más los costos marginales deben ser iguales para todo tiempo t . Esto no es consistente el uno con el otro.

Para explicarlo, se asume que la tasa de descuento es $r = 0,05$, $c_1 = 20$, $c_2 = 40$. Si en el periodo 0 la segunda ecuación debe cumplirse, entonces $b_1(0) = 40$ y $b_2(0) = 20$. Entonces el precio de mercado por la unidad extraída (y vendida) es 60. Si se avanza hacia el periodo 1, de acuerdo con la primera ecuación, las reservas remanentes de los 2 depósitos habrán ganado un interés igual a $r = 0,05$. Esto quiere decir que $b_1(1) = 42$ y $b_2(1) = 21$, lo que implicará que la segunda ecuación ya no se cumplirá. En conclusión, ambos depósitos no se van a explotar simultáneamente. Por lo tanto, los depósitos serán explotados secuencialmente.

Para definir la secuencia se deben observar los costos de producción (c_1) más los costos de oportunidad ($b_1(t)$). Se producirá primero el con menor costo hasta el LOM de esta. Por lo tanto, para el periodo inicial $[0, T]$, el depósito con mayor costo no será económicamente rentable de explotar. Es decir:

$$c_1 + b_1(t) < c_2 + b_2(t) \quad 0 \leq t \leq T$$

b. El mineral 1 se agota cuando se alcanza un equilibrio de precios:

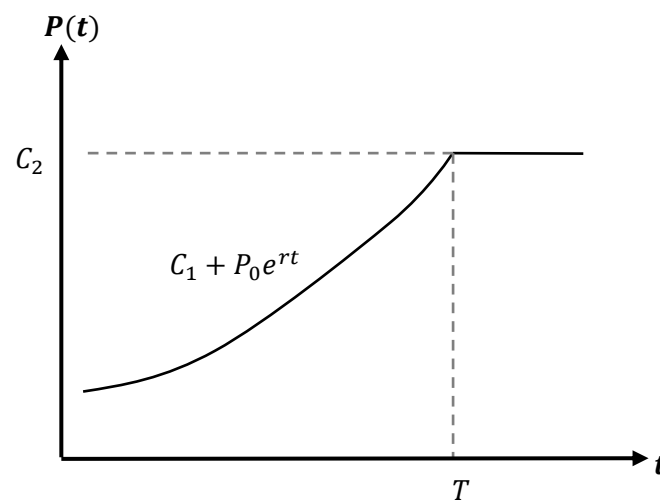
$$P_1 = c_1 + P_0 e^{rt} = c_2 = P_2$$

De modo el LOM de la mina será:

$$\frac{\ln\left(\frac{c_2 - c_1}{P_0}\right)}{r} = T$$

Luego, en resumen, se tendrá que entre $t \in [0, T]$ se explotará el mineral 1 a un precio $P_1 = c_1 + P_0 e^{rt}$ y una demanda $q_1(t) = \left(\frac{c_1 + P_0 e^{rt}}{c}\right)^{-\alpha}$ y para un tiempo $t > T$ se explotará el mineral 2 a un precio $P_2 = c_2$, a una demanda constante $q_2 = \left(\frac{c_2}{c}\right)^{-\alpha}$.

Luego, gráficamente se tiene que el precio de los minerales seguirá una curva como:



Variación de precio en función del tiempo

Problema 9.7

Considérese las condiciones de mundo ideal de Hotelling para el mercado de un *commodity* mineral. En particular, $P(t)$ es el precio del *commodity* en el instante t , r es la tasa de interés

del mercado y $q(t)$ es la cantidad del *commodity* producido por una mina en particular. Esta mina posee cantidad inicial de reservas dada por S_0 .

La capacidad de extracción y procesamiento de mineral en la mina es $K < S_0$.

a. Plantee el problema de optimización dinámica para determinar la extracción óptima en el tiempo, si el LOM T de la operación se considera exógeno (y tal que $T = \frac{S_0}{K}$), tal que se maximice el VAN de la mina. Para esto debe definir la función objetivo, restricciones, así como condiciones del problema.

b. Derive la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman para el problema.

c. Utilizando programación dinámica encuentre la ecuación que debe satisfacer el precio en el mercado para que la firma sea indiferente entre producir o no en un instante de tiempo cualquiera. ¿Cómo se debería relacionar el precio con el derivado para el caso $K > S_0$? En base a esta comparación discuta las implicancias de la existencia de restricciones de capacidad en el mundo ideal de Hotelling.

Solución:

a.

$$\max_q \int_0^{T=\frac{S_0}{K}} P(t) q(t) e^{rt} dt$$

s.a.

$$\dot{S} = -q(t)$$

$$0 \leq q(t) \leq K$$

$$S(0) = S_0$$

b.

$$V(t, S) = \max_q \{P(t)q(t)dt + V(t + dt, S + dS)e^{-rt}\}$$

Por expansión de Taylor:

$$e^{-rt} = 1 - rdt + \frac{(-rdt)^2}{2!} + \dots$$

Pero $\frac{(-rdt)^2}{2!} + \dots \approx 0$ por lo que:

$$e^{-rt} \approx 1 + rdt$$

Así se obtiene que:

$$V(t + dt, S + dS) = V + V_S ds + V_t dt$$

De aquí:

$$V(t, S) = \max_q \{p(t)q(t)dt + (V + V_S ds + V_t dt)(1 + rdt)\}$$

Luego, al simplificar expresiones y dado que $dt^2 \approx dt dS \approx 0$

$$r * V(t, S) = \max_q \{P(t)q(t) - V_S q(t)\} + V_t$$

c. Se requiere:

$$\max_q q(t)\{P(t) - V_S\}$$

Luego, dado la linealidad del sistema:

$$q(t)^* = \begin{cases} 0 & ; \text{ si } P(t) - V_S < 0 \\ \text{Indiferente} & ; \text{ si } P(t) - V_S = 0 \\ K & ; \text{ si } P(t) - V_S > 0 \end{cases}$$

Luego, es de interés el caso en que es indiferente, por lo que:

$$rV = V_t \Leftrightarrow rV = \frac{\partial V}{\partial t} \Leftrightarrow rdt = \frac{\partial V}{V} / \int ()$$

$$C(S) + rt = \ln(V) / e^{()}$$

$$f(S) * e^{rt} = V(t, S) \rightarrow CSe^{rt} = V(t, S)$$

Donde C y S son constantes. De aquí:

$$V_S = P(t) = De^{rt}$$

$$\dot{P} = Dre^{rt}$$

Luego, al dividir ambas expresiones:

$$\frac{\dot{P}}{P} = \frac{Dre^{rt}}{De^{rt}} = r$$

Problema 9.8

Considere la exploración de un *commodity* mineral bajo los supuestos del mundo de Hotelling, pero en el cual existe un costo de producción dado por $c(q(t), S(t))$ decreciente y estrictamente convexo en $S(t)$, los recursos remanentes. El problema puede ser descrito de la siguiente forma:

$$\max_{q(t), T} \int_0^T e^{-rt} (Pq(t) - c(q(t), S(t))) dt$$

s.a.

$$\dot{S} = -q(t)$$

$$S(t), q(t), T \geq 0$$

Si en el equilibrio se satisface para $S(t)$ la siguiente ecuación diferencial ordinaria de segundo orden:

$$\frac{d^2 S(t)}{dt^2} + S(t) = \alpha + \beta (S(t))^2$$

donde p, r, α y β son constantes:

- Mediante control óptimo derive el sistema de ecuaciones diferenciales que debe satisfacer $q(t)$ y $S(t)$ en la solución al problema.
- Derive la función de costos $c(q(t), S(t))$ de tal forma que el sistema en a) sea equivalente a la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden que debe resolver $S(t)$.
- Utilizando un software apropiado (Maple, por ejemplo) encuentre numéricamente la solución del problema anterior para $P = 3, r = 10\%, \alpha = 10$ y $\beta = 1$.
- Grafique mediante un *software* apropiado (Maple por ejemplo) el plano de fase $q - S$, mostrando el o los puntos de equilibrio, así como detallando la naturaleza de la estabilidad de los mismos.

Solución:

$$\max_{q(t), T} \int_0^T e^{-rt} (Pq(t) - c(q, S)) dt$$

s.a.

$$\dot{S} = -q(t)$$

$$S(t), q(t), T \geq 0$$

En el equilibrio:

$$\ddot{S} + S(t) = \alpha + \beta S^2(t)$$

a. Al obtener el Hamiltoniano de valor corriente:

$$\hat{H} = Pq(t) - c(q, S) + v(-q(t))$$

i) Condición del máximo:

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial q} = P - c_q(q, S) - v(t) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \hat{H}}{\partial q^2} = -c_{qq} < 0$$

Así se obtiene:

$$P - c_q = v(t)$$

ii) Ecuación de estado:

$$\dot{S} = -q(t)$$

iii) Ecuación adjunta:

$$\dot{v} = rv - \frac{\partial \hat{H}}{\partial S} = rv + c_s(q, S)$$

iv) Transversalidad:

$$\hat{H}(T) = 0$$

Luego al resolver el respectivo sistema. Se toma i) y se deriva respecto al tiempo,

$$\dot{v} = -\frac{d}{dt}(c_q) = -[c_{qq}\dot{q} + c_{qs}\dot{S}]$$

Luego:

$$rv + c_s = -c_{qq}\dot{q} - c_{qs}\dot{S}$$

Al reemplazar las condiciones respectivas:

$$r(P - c_q) + c_s = -c_{qq}\dot{q} - c_{qs}q$$

Finalmente, al despejar:

$$\dot{q} = \frac{-r(P - c_q) - c_s + c_{qs}q}{c_{qq}}; \quad \dot{S} = -q(t)$$

b. Luego, se tiene que: $\ddot{S} = -\dot{q}$; $\ddot{S} + S(t) = \alpha + \beta S^2(t)$ entonces,

$$-\frac{[c_{qs}q - c_s - r(P - c_q)]}{c_{qq}} + S = \alpha + \beta S^2$$

En equilibrio estable, se cumple que $\dot{q} = \dot{S} = q = 0$. Bajo estas condiciones,

$$-\frac{[c_{qs}q - c_s - r(P - c_q)]}{c_{qq}} = 0$$

$$[c_{qs}q - c_s - r(P - c_q)] = 0$$

$$r(c_q - P) = c_s$$

c. El cual al resolver con el *software* Maple, se obtiene:

$$c(q, S) = Pq + F\left(\frac{q + Sr}{r}\right)$$

d. Sean $F = \dot{q}$ y $G = \dot{S}$ se escribe el Jacobiano.

$$J = \begin{bmatrix} F_q & F_S \\ G_q & G_S \end{bmatrix}$$

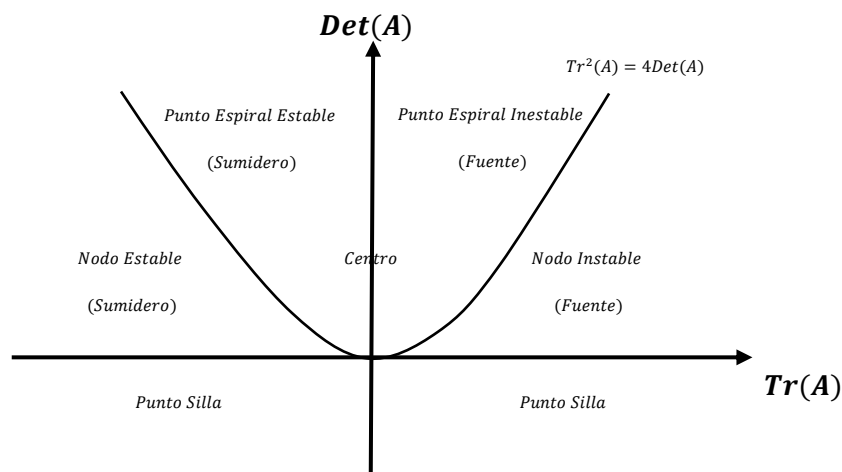


Diagrama de estabilidad

Luego, se obtiene que:

$$\begin{aligned}\dot{S} &= -q(t) \rightarrow \ddot{S} = -\dot{q} \\ \ddot{S} + S &= \alpha + \beta S^2 \rightarrow -\dot{q} + S = \alpha + \beta S^2\end{aligned}$$

Para así obtener:

$$F = \dot{q} = S - \alpha - \beta S^2$$

$G = \dot{S} = -q$. Al reemplazar (9.152) y (9.153) en el Jacobiano:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 - 2\beta S \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Así la traza es 0 y el determinante es $D = 1 - 2\beta S$, por lo que según figura anterior corresponde a un punto silla.

Problema 9.9

La exploración y extracción del petróleo puede ser modelado como una única empresa, lo que indica un monopolio donde el precio del *commodity* es modificado directamente a través de la tasa de extracción del recurso, lo que puede ser analizado de la siguiente forma: si la tasa de extracción aumenta monótonamente en el tiempo, entonces el precio del petróleo disminuye.

Este modelo asume que las reservas remanentes totales de petróleo en el yacimiento $x(t)$ vienen dadas por las reservas conocidas $x^k(t)$ y por las no conocidas $x^n(t)$, pero que pueden ser descubiertas y por lo tanto extraídas. Por otra parte, en cada instante del tiempo existe una tasa a la que descubren nuevas reservas, esta puede ser representada mediante una función $f(x^n)$ que depende directamente de la cantidad de reservas no conocidas, se cumple que $f'(x^n) > 0$.

Los recursos son explotados a una tasa de extracción $u(t)$ para cada instante de tiempo. El precio del petróleo viene dado por la función $P(u(t), y(t))$, siendo $y(t)$ la cantidad de extracción acumulada hasta t , es decir:

$$y(t) = \int_{-\infty}^t u(s) ds$$

Por otra parte, los costos de extracción vienen dados por la función $C(x_0 - y(t))$ donde x_0 es la cantidad inicial disponible de petróleo.

Por último, la empresa busca determinar la tasa de extracción $u(t)$ que logre maximizar el beneficio neto bajo un horizonte de tiempo infinito, además se tiene que la tasa de descuento es $r > 0$.

a. Discuta el comportamiento de las funciones de costo de extracción y del precio del petróleo.

Para esto utilice $P(u(t), y(t)) = \left(\frac{1}{\gamma - \eta u - \mu y}\right)^\alpha$, $\alpha > 0, \gamma > 0, \eta > 0, \mu \geq 0$ y $C(x_0 - y) = \left(\frac{\phi}{2}\right)(x_0 - y)^{-2}, \phi > 0$.

b. Formule el problema de optimización dinámica de la empresa, especificando las variables, función objetivo y restricciones que deben considerarse.

c. Mediante control óptimo derive el sistema de ecuaciones diferenciales que satisfacen la solución al problema.

Solución:

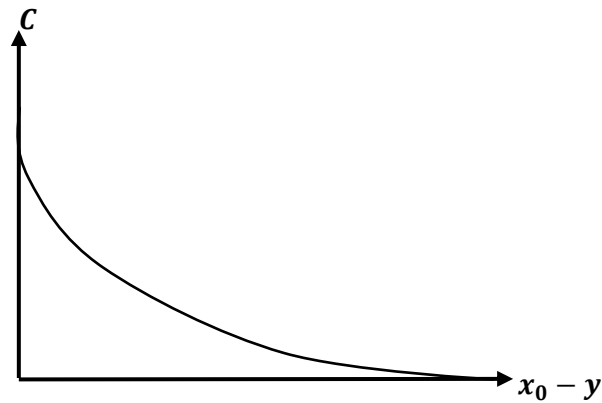
a. Se tiene que $P(u(t), y(t)) = \left(\frac{1}{\gamma - \eta u - \mu y}\right)^\alpha$ y $C(x_0 - y) = \left(\frac{\phi}{2}\right)(x_0 - y)^{-2}$,

Al derivar respecto a $y(t)$ y $u(t)$ la ecuación del precio se obtiene:

$$P_y = \frac{\alpha * \left(\frac{1}{\gamma - \eta u - \mu y}\right)^\alpha \mu}{\gamma - \eta u - \mu y} > 0$$

$$P_\mu = \frac{-\left(\frac{1}{\gamma - \eta u - \mu y}\right)^\alpha + \alpha n}{\gamma - \eta u - \mu y} < 0$$

Luego, como $C(x_0 - y) = \left(\frac{\phi}{2}\right)(x_0 - y)^{-2}$

Variación de C en función de $x_0 - y$

$$P_{\mu\mu} < -P_{\mu} \frac{2}{\mu}$$

b.

$$x(t) = x^k(t) + x^n(t)$$

$$x^k(t) = -\mu(t) + f(x_0 - y - x^k)$$

El problema es:

$$\max_{\mu} \int_0^{\infty} e^{-rt} (P(u, y) * \mu(t) - C(x_0 - y)\mu(t)) dt$$

s.a.

$$x^k(t) = -\mu(t) + f(x_0 - y - x^k)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x^k(t) \geq 0$$

$$\dot{y} = \mu$$

$$y(0) \geq 0$$

$$x^k(0) > 0$$

c.

$$\hat{H} = P\mu(t) - C(x_0 - y)\mu(t) + \lambda_1 [f(x_0 - y - x^k) - \mu(t)] + \lambda_2 \mu(t)$$

i) Condición del máximo:

$$P(\mu, y) + \mu(t)P_{\mu} - C(x_0 - y) - \lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial^2 \hat{H}}{\partial \mu^2} = 2P_\mu + \mu(t)P_{\mu\mu} < 0$$

Luego corresponde a un máximo puesto que: $P_{\mu\mu} < -P_\mu \frac{2}{\mu}$.

ii) Ecuación de estado:

$$\begin{aligned} \dot{x}^k(t) &= -\mu(t) + f(x_0 - y - x^k) \\ \dot{y} &= \mu \quad (3) \end{aligned}$$

iii) Ecuación adjunta:

$$\dot{\lambda}_1 = \lambda_1 * (r - f'(x_0 - y - x^k))$$

$$\dot{\lambda}_2 = r\lambda_2 - \frac{\partial \hat{H}}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial y} = \mu P_y + \mu C'(x_0 - y) - \lambda_1 f'(x_0 - y - x^k)$$

$$\dot{\lambda}_2 = r\lambda_2 - (\mu P_y + \mu C'(x_0 - y) - \lambda_1 f'(x_0 - y - x^k))$$

Capítulo 10: El problema de determinar la producción óptima

El capítulo anterior se centró en el estudio de lo que se conoce como el mundo ideal de Hotelling, basándose en los supuestos de competencia perfecta, recurso homogéneo, inexistencia de incertidumbre, además de la ausencia de límites en la capacidad de extracción y costos asociados a ello, y sin considerar además cambio tecnológico. En este capítulo se relajan las tres últimas restricciones, con el objetivo de acercar el planteamiento de la problemática a lo que en realidad resuelve una empresa minera, cuando ésta desea determinar la producción óptima en términos de maximizar su *VAN*. Junto al planteamiento y resolución del problema minero de la producción se entregan herramientas de análisis que permiten caracterizar y estudiar la política de extracción óptima cuando su solución explícita es altamente compleja de obtener, dentro de las cuales se encuentra el análisis de estabilidad y la estática comparativa.

10.1 Las restricciones en minería

En la cadena de valor de la minería existen tres restricciones principales: la de mina, la de planta, y la de mercado (Lane, 1988). La primera limita la capacidad de extracción del recurso

de la tierra. La segunda representa la cantidad de material que puede procesar la planta de tratamiento. Cabe destacar que ambas tienen asociada inversiones de capital, costos y tiempos de construcción. En general, las capacidades de extracción y de planta se relacionan de manera directamente proporcional con estas tres variables. Para ejemplificar, una mina de cobre que quiera procesar cien mil toneladas de cobre fino al año requerirá de una inversión cercana a los mil millones de dólares y un tiempo de construcción de alrededor de 3 años. Por su parte, la restricción de mercado está asociada a la cantidad de *commodity* que podrá ser vendida en el mercado y que también depende de una capacidad de *marketing* por parte de la empresa. Para el análisis del problema de este capítulo, sin embargo, no se incorporará esta restricción, sino que se asumirá que es posible vender todo lo que se produce.

Los dos últimos supuestos que se relajarán son la inexistencia de costos de extracción y de cambio tecnológico. En cuanto a los costos, estos son determinantes a la hora de resolver el problema de optimización, debido a que van a influenciar en la cantidad de mineral a extraer y, por lo tanto, harán cambiar la solución óptima. Según un informe de Cochilco (Cantalops *et al.*, 2015), la competitividad minera de un país recae en dos factores: el potencial geológico y el clima de inversión, que incluye los costos de la industria. Este estudio afirma, por ejemplo, que Chile presenta ventajas en cuanto al factor geológico y marco regulatorio, sin embargo, sus costos de producción significan una desventaja frente a sus potenciales competidores.

Finalmente, el cambio tecnológico también resulta relevante en el problema de la mina, en particular sobre el LOM del depósito (plan de largo plazo), ya que puede tener una significativa influencia en los costos de producción y/o accesos a mineral que de otra forma no sería posible recuperar. Por ejemplo, camiones capaces de transportar mayores cargas y palas de mayor envergadura impactan positivamente los costos unitarios en una faena minera que está operando.

En las secciones siguientes se escribe matemáticamente el problema general a resolver, y se incorporan las restricciones mencionadas anteriormente.

10.2 Planteamiento del problema

En este punto se describe el problema de optimización dinámica que interesa resolver en este capítulo y, para entenderlo, se comenzará por presentar las variables involucradas. Cabe destacar que para ejemplificar se utilizará una explotación a rajo abierto.

- $\Omega(t)$: Volumen extraído hasta el instante t . Esta variable representa también la envolvente, o superficie del rajo en un periodo cualquiera. Ciertamente esta excavación no puede tener cualquier forma, ya que debe cumplir con restricciones operacionales que permitan su viabilidad. Por ejemplo, debe adoptar un ángulo de talud específico, determinado geotécnicamente, que asegure la estabilidad de la mina.

En una explotación a cielo abierto siempre se cumplirá la ecuación (10.1) a continuación, que se muestra gráficamente en la Figura 10.1.

$$\Omega(t_1) \subset \Omega(t_2) \text{ si } t_1 < t_2 \quad (10.1)$$

Esto último no es válido siempre en minería subterránea ya que, por ejemplo, en el método de *Cut and Fill* se extrae mineral y luego se rellena el volumen extraído.⁴⁹

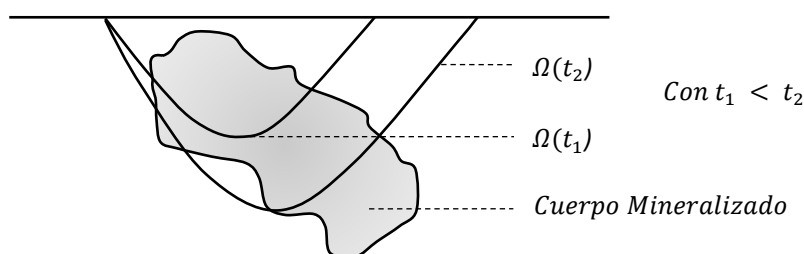


Figura 10.1. Ejemplo de superficie en rajo abierto

- $q(t)$: Producción de *commodity* en el instante t .
- $Q(t)$: Producción de mineral en el instante t .
- $W(t)$: Producción de lastre más estéril en el instante t .

Para entender las últimas tres variables es necesario clasificar el material total extraído de la mina. Este último se separa típicamente en dos: en primer lugar, el estéril, que no tiene valor económico ya que no contiene mineral y por lo tanto jamás será procesado. En segundo lugar, el cuerpo mineral, que a su vez se separa en dos, el lastre y el mineral. Por una parte, el lastre contiene mineral en concentraciones relativamente bajas, lo que no hace rentable su procesamiento. Por otra parte, el mineral es la porción que va a planta debido a que contiene leyes de mineral suficientemente altas. Lo anterior se ilustra más abajo en la

⁴⁹ En algunas minas a rajo abierto el autor ha podido comprobar cómo, con objeto de cumplir la meta de producción anual, se rellena con lastre parte del fondo mina. Obviamente esto viola la condición antes mencionada.

Figura 10.2. Debe entenderse que lastre y mineral son en esencia conceptos dinámicos, debido a que, dependiendo del precio del *commodity* o costos, la clasificación del material puede cambiar. Por ejemplo, frente a un alza de precios, *ceteris paribus*, las reservas de mineral podrían aumentar y bajar la porción que representa el lastre.

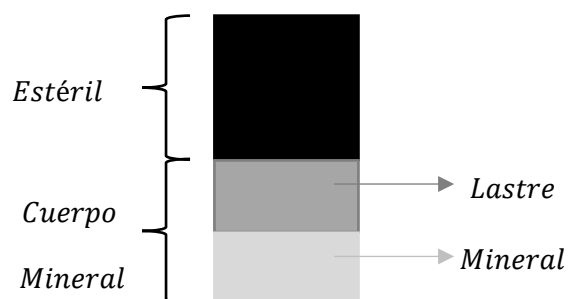


Figura 10.2. Distribución del material extraído del rajo.

RECUADRO 10.1

LEY DE CORTE Y PRODUCCIÓN ÓPTIMA

La ley de corte se define como la ley mínima de mineral extraída en un determinado período de tiempo o fase de secuenciamiento en una operación minera del tipo rajo abierto. En la práctica no es factible extraer un depósito en una secuencia estricta definiendo sectores con la misma ley en orden decreciente, lo que maximizaría el valor presente, dada una tasa de descuento determinada para la empresa minera. Como no es posible esto, se utiliza una política de leyes de corte a lo largo de la vida de la mina.

La visión minera tradicional para una política de leyes de corte se refiere a que a mayor precio del *commodity*, la extracción de mineral de menor ley empieza a generar un beneficio en la operación. Debido a esto, frente a este escenario se elige bajar la ley de corte del período en cuestión. De acuerdo a Krautkraemer (1988) esta visión tradicional no es, sin embargo, del todo correcta. Dado un escenario de precios en que se enfrente un cambio en ellos que se pueda anticipar, los resultados del análisis establecen que: la ley de corte debe subir/bajar cuando la tasa de cambio en el precio es mayor/menor que la tasa de descuento. Si el cambio en el precio es estocástico, sin posibilidades de anticiparlo, el efecto sobre las decisiones de extracción de la firma depende de su curva de ingreso marginal. Si esta curva es cóncava, entonces el ingreso marginal cae por reducciones potenciales de precio en mayor medida en que crecería por potenciales incrementos en él. Como el precio oscila en torno a una media

con una variación promedio de 0, la empresa minera incrementa/disminuye su tasa de reducción de la veta e incrementa/disminuye la ley de corte.

Shinkuma (2000), examina empíricamente las elecciones de leyes de corte para 44 minas de cobre durante su vida útil (LOM). De este estudio concluye que la regla de optimalidad de Krautkraemer es adecuada en casos con escenarios de precios estocásticos no anticipados. De hecho, en un período de tiempo en donde hubo mayor capacidad de anticipación a los precios, 21 de 44 operaciones mineras seguían la regla de Krautkraemer. De ahí que la política de leyes de corte planteada sólo aplica para casos de escenarios de precios estocásticos. Si hay posibilidad de estimar o prever cambios en el precio, las leyes de corte óptimas no sólo dependerán de factores exógenos en la mina como lo son el precio y las tasas de descuento, sino que también de factores endógenos o propios de la operación.

Otras variables del problema a plantear vienen dadas por:

- $S(t)$: Reservas remanentes en el instante t .
- $B(Q(t), S(t))$: Función de beneficios o ingresos. Esta función depende en general de la cantidad de mineral extraído y de los recursos remanentes.
- $C(Q(t), S(t))$: Función de costos. Al igual que la función de ingresos, depende de la cantidad de mineral extraído y de los recursos remanentes.
- R : Recuperación del *commodity*. Este valor podría corresponder a una función del tiempo y otras variables como la mineralogía y la tecnología utilizada en los procesos posteriores de conminución y concentración; sin embargo, en este capítulo se asumirá constante.
- K_m : Capacidad de movimiento mina. Esta constante queda determinada principalmente por los procesos unitarios de extracción, además de los equipos utilizados y sus productividades.
- K_p : Capacidad de procesamiento de la planta. Al igual que la capacidad de movimiento mina, este valor queda determinado por los procesos de la planta y los equipos involucrados.⁵⁰

⁵⁰ A diferencia de Lane (1988) se asume en este capítulo que no existen restricciones de ventas o mercado.

- ρ : Densidad de la roca. Este valor también podría ser variable en función del espacio, pero se asume constante (isotrópica) por facilidad en la exposición.

Teniendo en cuenta todo lo anterior se puede escribir matemáticamente el problema de interés como sigue:

$$\max_{Q(t), \Omega(t), T} \int_0^T (B(Q(t), S(t)) - C(Q(t), S(t))) dt \quad (10.2)$$

Sujeto a:

1. Condición de agotabilidad:

$$\dot{S}(t) = -Q(t) \quad (10.3)$$

2. Restricción de capacidad de mina:

$$Q(t) + W(t) \leq K_m \quad (10.4)$$

$$\text{o } Q(t)(1 + SR(t)) \leq K_m \quad (10.5)$$

, con $SR(t)$ la razón estéril-mineral.

3. Restricción de capacidad de planta:

$$Q(t) \leq K_p \quad (10.6)$$

4. Restricción geométrica:

$$F(\Omega(t)) \leq 0 \quad (10.7)$$

5. Condición inicial:

$$S(0) = S_0 \quad (10.8)$$

6. Condición de no-negatividad:

$$Q(t), W(t), S(t) \geq 0 \quad (10.9)$$

Retomando el problema anterior, se entiende que el funcional objetivo es la maximización del VAN de la empresa (en la práctica podrían existir otros funcionales de interés para la empresa), utilizando dos variables de control: la cantidad de mineral enviado a planta y la forma de avance de la explotación. Además, el problema busca determinar el LOM óptimo de la mina,

cumpliendo además con las seis restricciones antes presentadas. La primera, relaciona la cantidad de mineral enviado a planta con las reservas. La segunda y tercera restricción fijan las capacidades máximas fijas de extracción y procesamiento. La cuarta restricción genera la condición referida a la forma geométrica de la explotación. En una mina a rajo abierto, por ejemplo, esta condición podría referirse al ángulo máximo de talud, α , como se muestra en las inequaciones (10.10)-(10.12) a continuación y se ilustra en la Figura 10.3.

$$\cos(\hat{n}_\Omega \hat{z}) \leq \alpha \quad (10.10)$$

$$\hat{n}_\Omega \hat{z} \leq \arccos \alpha \quad (10.11)$$

$$F(\Omega) \leq 0 \quad (10.12)$$

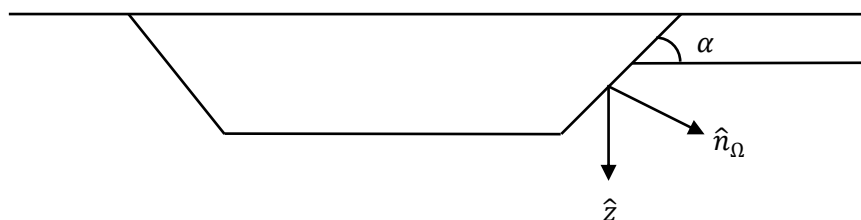


Figura 10.3. Ángulo de talud y restricción geométrica

Finalmente, la quinta y sexta restricción se refieren a las reservas iniciales del yacimiento y obligan a que las variables de producción y reservas remanentes sean no negativas.

RECUADRO 10.2

EL ÁNGULO DE TALUD COMO PARÁMETRO GEO-MECÁNICO Y ECONÓMICO

El ángulo de talud se define como la inclinación que posee la sucesión de caras verticales de los bancos y bermas respectivamente al interior de una explotación de rajo abierto. Su valor, de acuerdo al Reglamento de Seguridad Minera de Chile, debe considerar el comportamiento geomecánico de la roca, la dureza de ésta y su tendencia a la fractura, además de la envergadura de los equipos de trabajo, planificación de las expansiones, así como también su interacción con otros elementos de diseño tales como la berma, carpeta de rodados, etc.

Por tanto, su definición involucra tanto aspectos geológicos, geométricos, como también operacionales. Su determinación conlleva un significativo impacto económico, pues un mayor ángulo de talud involucra un menor movimiento de lastre y por tanto, una disminución de costos de

transporte, así como también llegar más rápido al mineral económicamente explotable. Esto hace que los flujos de caja se adelanten en el tiempo. Es preciso considerar que esta ventaja económica debe estar supeditada al cumplimiento de los estándares de seguridad establecidos.

En general, para la minería de roca los valores de ángulos de talud van desde los 35° hasta los 60° . A modo de ejemplo, en 2014 el rajo Don Luis perteneciente a la División Andina de Codelco, logró un ángulo de talud de 58° , uno de los más altos en Chile, que le permitió disminuir su costo de transporte además de poder extender la planificación que dio origen a este ángulo hacia otras operaciones de la compañía (Portal Minero, 2014).

Habiendo planteado el problema general de determinar la producción óptima, en la sección siguiente se comenzará a analizar la relajación de los supuestos de Hotelling.

10.3 Relajando los supuestos del mundo ideal de Hotelling

10.3.1 Restricción de capacidad

Para entender la situación con esta restricción de capacidad, se plantea un problema adaptado al que resuelve Krautkraemer (1988). Dicho autor reflexiona acerca de la problemática de determinar la ley de corte en el contexto de una mina “tomadora de precios” (*price-taker*), que extrae un recurso heterogéneo subterráneo con una capacidad de extracción limitada. La mineralización se encuentra circunscrita en un cilindro y la heterogeneidad del depósito se basa en que la ley decae al alejarse del centro de la figura (estructura concéntrica que presentan en general el berilio, cromo y metales del grupo del platino o PGM). La Figura 10.4 a continuación explica gráficamente la forma de la mineralización.

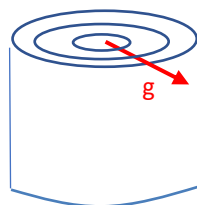


Figura 10.4. Geometría cilíndrica con decrecimiento de leyes hacia afuera desde el centro

En el problema adaptado, lo que se busca es determinar el radio de extracción y la profundidad a la que se va a explotar el depósito, dada una capacidad máxima de movimiento mina. Para

simplificar el entendimiento se considera una vida útil de la mina exógena, dada por T . Además, como se trata de minería subterránea, se asume que no hay extracción de lastre (sea material mineralizado o estéril), por lo tanto, las capacidades de movimiento mina y de planta coinciden, denotándose ambas por K . A continuación, se ilustra el problema con una figura y se definen variables que no estaban presentes en el problema general de la sección anterior y además algunas restricciones propias del problema expuesto.

- $l(t)$: Profundidad extraída hasta el instante t .
- $L(t)$: Profundidad que queda por explotar en el instante t .
- L^* : Profundidad final a la que se quiere llegar.
- $P(t)$: Precio del *commodity* en el instante t .
- $r(t)$: Radio de extracción en el instante t .
- $g(r)$: Ley de mineral a una distancia r del centro del depósito.

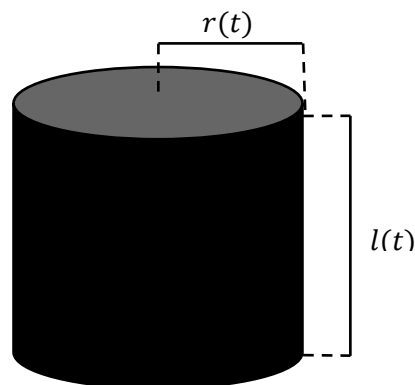


Figura 10.5. Volumen a extraer con forma cilíndrica

La restricción geométrica establece que el volumen de la explotación $\Omega(t)$ corresponde al cilindro generado por el radio y la profundidad extraída como sigue:

$$\Omega(t) = \pi r^2(t)l(t) \quad (10.13)$$

De aquí, la restricción de movimiento implica que el tonelaje extraído no puede superar la capacidad:

$$\pi r^2(t)l(t) \rho \leq K \quad (10.14)$$

Además, se tiene que la profundidad que queda por explotar es igual a la profundidad final (que define la envolvente económica), menos el avance hasta cierto instante de tiempo. Derivando esta condición respecto del tiempo se llega a la condición de agotabilidad (10.16) siguiente:

$$L(t) = L^* - \int_0^t l(s) ds \quad / \frac{d}{dt} \quad (10.15)$$

$$\dot{L} = -l(t) \quad (10.16)$$

Teniendo en cuenta todo lo anterior se puede escribir el problema de optimización dinámica como la maximización del VAN manteniendo como variable de control la profundidad óptima a extraer de la siguiente forma:

$$\max_{l(t)} \int_0^T e^{-rt} [P(t)Q(t)g(r(t))R - C(Q(t))] dt \quad (10.17)$$

De (10.17) cabe destacar que la capacidad no posee una inversión asociada. Por lo tanto, resulta conveniente extraer a máxima capacidad en todos los períodos. Esto permitirá escribir el radio de extracción en función de la profundidad y variables exógenas. De esta manera, se logra enlazar la restricción geométrica con la de capacidad. De esta forma:

$$Q(t) = K \quad (10.18)$$

$$\pi r^2(t)l(t) \rho \leq K \rightarrow \pi r^2(t)l(t) \rho = K \quad (10.19)$$

$$r(t) = \sqrt{\frac{K}{\pi \rho l(t)}} \quad (10.20)$$

Luego, el problema se puede reescribir como:

$$\max_{l(t)} \int_0^T e^{-rt} [P(t)Kg \left(\sqrt{\frac{K}{\pi \rho l(t)}} \right) R - C(K)] dt \quad (10.21)$$

Sujeto a las condiciones siguientes:

1. Agotabilidad:

$$\dot{L} = -l(t) \quad (10.22)$$

2. Condición inicial:

$$L(0) = L^* \quad (10.23)$$

3. No negatividad:

$$l(t) \geq 0 \quad (10.24)$$

A continuación, se encamina la resolución del problema mediante control óptimo, planteando el Hamiltoniano en valor corriente:

$$\hat{H}: P(t)Kg \left(\sqrt{\frac{K}{\pi\rho l(t)}} \right) R - C(K) + v(-l(t)) \quad (10.25)$$

1. Condición del máximo:

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial l} = 0 \rightarrow P(t)Kg'(r) \frac{\partial r}{\partial l} R - v = 0 \quad (10.26)$$

2. Ecuación de estado:

$$\dot{L} = -l(t) \quad (10.27)$$

3. Ecuación adjunta:

$$\dot{v} = rv - \frac{\partial \hat{H}}{\partial L} = rv \rightarrow v(t) = v_0 e^{rt} \quad (10.28)$$

Mediante la combinación de (10.26) y (10.28):

$$P(t)Kg'(r) \frac{\partial r}{\partial l} R = v_0 e^{rt} \quad (10.29)$$

De la restricción geométrica y derivando respecto a r se obtiene la ecuación (10.32):

$$\pi r^2(t) l(t) \rho = K / \frac{\partial}{\partial l} \quad (10.30)$$

$$\pi 2r \frac{\partial r}{\partial l} l \rho + \pi r^2 \rho = 0 \quad (10.31)$$

$$\frac{\partial r}{\partial l} = \frac{-r}{2l} = \frac{-1}{2l} \sqrt{\frac{K}{\pi\rho l(t)}} \quad (10.32)$$

Finalmente, reemplazando los resultados obtenidos en la ecuación (10.29):

$$P(t)Kg' \left(\sqrt{\frac{K}{\pi\rho l(t)}} \right) \frac{-1}{2l} \sqrt{\frac{K}{\pi\rho l(t)}} R = v_0 e^{rt} \quad (10.33)$$

De la ecuación (10.33) se puede despejar la variable de control $l(t)$ en función de variables exógenas, resolviendo así el problema planteado. Para estudiar un ejemplo numérico similar al problema anterior, el lector puede consultar algunos de los problemas resueltos al final de este capítulo.

Cabe destacar que en el problema que se acaba de resolver, la capacidad de extracción estaba determinada exógenamente. En el capítulo siguiente se estudiará cómo determinar esta capacidad de manera endógena, maximizando las utilidades de la empresa.

En la sección siguiente se estudiará la incorporación de costos de extracción, dejando de lado el problema de la geometría.

10.3.2 Costos de extracción

Es importante recordar que uno de los supuestos del mundo ideal de Hotelling es que el costo de extracción es nulo, lo que implica que el precio sombra sea igual al precio de mercado del bien agotable. De esta manera, el incremento del precio queda determinado por la tasa de interés, considerando una eficiencia en el proceso de extracción y un mercado competitivo dentro de la industria del recurso que se explota, donde el productor es un tomador de precio, con costos marginales constantes e iguales a cero (Slade y Thille, 2009).

A continuación, se resuelve el problema con costos que solamente dependen de la producción para ilustrar lo anterior. Matemáticamente el problema se puede plantear como:

$$\max_{q(t)} VAN(q(t)) = \int_0^T e^{-rt}(Pq - C(q(t)))dt \quad (10.34)$$

De esta manera, cuando se desarrolla el Hamiltoniano:

$$H: Pq - C(q) + v(-q) \quad (10.35)$$

De la primera condición (del máximo) de control óptimo:

$$H_q = P - C_q - v = 0 \quad \text{ó} \quad v = P - C_q \quad (10.36)$$

Mientras que, de la tercera (ecuación adjunta), se tiene que:

$$\dot{v} = rv \quad (10.37)$$

De donde se deriva que:

$$\frac{\dot{P}-\dot{C}_q}{P-C_q} = r \quad (10.38)$$

Nótese que (10.38) es equivalente a la regla de Hotelling cuando los costos marginales son nulos ($C_q = 0$), pues se llega a:

$$\frac{\dot{P}}{P} = r \quad (10.39)$$

Bajo el supuesto mencionado anteriormente, el productor no puede escoger la cantidad extraída que lleve a obtener un beneficio marginal igual al precio sombra. Esto es equivalente a que la demanda, de acuerdo al precio de mercado, debe ser igual a la oferta total, según dicha variable en un determinado período.

Con la condición de costos marginales nulos se determina entonces la velocidad de cambio del precio (según la tasa de interés), no así el nivel del precio, que se determina bajo la igualdad de consumo y producción acumulada durante la vida útil de la industria. Para obtener el nivel del precio se debe usar la condición:

$$\int_0^{\infty} D(P(t))dt = \int_0^{\infty} Q(P(t))dt = S_0 \quad (10.40)$$

Es importante comprender la importancia de los costos de extracción en el problema a resolver, ya que es una de las fuerzas principales que llevarán a determinar la producción óptima que maximice el VAN de la mina. Además, cabe destacar la relación que existe entre el precio y los costos en la industria minera. Así por ejemplo, un informe de Cochilco (Cantallops *et al.*, 2015), sobre caracterización de costos en la gran minería del cobre, afirma que el costo medio de operación aumentó desde los 90 cUSD/lb en 2005 hasta los 217 cUSD/lb el año 2014. Esto último se debe principalmente a que, frente a un precio del cobre alto, las empresas dejan de preocuparse por los costos, y se concentran más que nada en aumentar la producción. Lo anterior es muy perjudicial para la industria, ya que se pierde productividad, lo que se traduce en una menor competitividad de las empresas. Al contrario, en escenarios de precios bajos, los actores intensifican los esfuerzos por contener los costos, dejando de lado el foco que se tenía en aumentar la producción.

Resulta interesante también entender las estructuras de costos de las empresas mineras. En particular, la gran minería del cobre tiene sus mayores gastos en materiales, remuneraciones, y servicios de distinta índole, con un 17%, 21% y 28%, respectivamente (Cantallops *et al.*, 2015).

Además, el gasto en energía también es de gran impacto, llegando a niveles máximos del 15% del costo operacional entre 2008 y 2011 (Cantalops *et al.*, 2015).

A continuación, se considerará una función de costos simplificada, que dependerá de la cantidad producida y de las reservas remanentes. Esto último hace sentido, ya que, al irse consumiendo las reservas, en general se vuelve más caro extraer el mineral debido a un aumento en los costos de transporte. Considérese así el siguiente ejemplo:

$$\max_{q(t)} VAN(q(t)) = \int_0^T e^{-rt} (B(q(t), S(t)) - C(q(t), S(t))) dt \quad (10.41)$$

s. a.

$$\dot{S} = -q(t) \quad (10.42)$$

$$S(0) = S_0 \quad (10.43)$$

$$S(t) \geq 0 \quad (10.44)$$

$$q(t) \geq 0 \quad (10.45)$$

Mediante control óptimo, el Hamiltoniano en valor corriente queda:

$$\hat{H}: B(q, S) - C(q, S) + v(-q) \quad (10.46)$$

De aquí las condiciones del principio del máximo vienen dadas por:

$$\text{Si } \frac{\partial^2 \hat{H}}{\partial q^2} = B_{qq} - C_{qq} < 0 \rightarrow \frac{\partial \hat{H}}{\partial q} = B_q - C_q - v = 0 \quad (10.47)$$

$$\dot{S}(t) = -q(t) \quad (10.48)$$

$$\dot{v} = rv - \frac{\partial \hat{H}}{\partial S} = rv - B_S + C_S \quad (10.49)$$

De (10.47) y (10.49):

$$\frac{d}{dt} (B_q - C_q) = \dot{v} = rv - B_S + C_S \quad (10.50)$$

$$B_{qq}(q, S)\dot{q} + B_{qS}(q, S)\dot{S} - C_{qq}(q, S)\dot{q} - C_{qS}(q, S)\dot{S} = rv - B_S + C_S \quad (10.51)$$

$$\dot{S} = -q \quad (10.52)$$

Debe notarse que las incógnitas del problema vienen dadas por $q(t)$, $v(t)$ y $S(t)$, y mediante el sistema (10.50)-(10.52) es posible resolver dichas funciones.

Reduciendo el sistema anterior se obtiene finalmente:

$$\dot{q} = \frac{1}{B_{qq} - C_{qq}} [r(B_q - C_q) - B_s + C_s + q(B_{qs} - C_{qs})] \quad (10.53)$$

$$\dot{S} = -q \quad (10.54)$$

Lo que resulta es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, cuya resolución algebraica no está garantizada, y que de hecho muy probablemente requerirá la utilización de herramientas numéricas para su estudio. Una alternativa para estudiar este sistema es abordar el problema con la ayuda del análisis de estabilidad y la estática comparativa, considerando las características de las variables, lo que en la sección 10.4 se explica en detalle.

10.3.3 Cambio tecnológico

En la primera sección de este capítulo, se expuso respecto a cómo los cambios tecnológicos podrían modificar la estructura de costos de la empresa, haciendo variar el óptimo del problema. Aquí se retoma el problema general planteado en la sección 10.2 y desarrollado teóricamente en la sección anterior, definiendo las funciones de ingresos y costos. Por una parte, la función de ingresos depende solamente del precio del *commodity* y de la producción en un instante de tiempo determinado. Por otra parte, los costos están dados por la cantidad producida y por una función $\gamma(t)$, decreciente en el tiempo que representa el cambio tecnológico. A continuación, se escriben estas funciones y se calculan sus derivadas parciales para incorporarlas en la ecuación diferencial que debe cumplir el óptimo:

$$B(q, S) = P(t)q(t) \quad (10.55)$$

$$C(q, S) = \gamma(t)q(t) \quad (10.56)$$

$$B_q = P \quad (10.57)$$

$$B_{qq} = 0 \quad (10.58)$$

$$C_q = \gamma \quad (10.59)$$

$$C_{qq} = B_{qs} = C_{qs} = B_s = C_s = 0 \quad (10.60)$$

Reemplazando en el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (10.53)-(10.54) se puede apreciar que el denominador se indetermina con las funciones propuestas (dada su linealidad en la variable de control). Se plantea nuevamente el Hamiltoniano en valor corriente para resolverlo de otra manera:

$$\hat{H}: Pq - \gamma q + v(-q) \quad (10.61)$$

El Hamiltoniano con las funciones propuestas resulta ser lineal en la cantidad a producir, por lo tanto, se resuelve como sigue:

1. Condición del máximo:

$$(P - \gamma - v) = 0 \rightarrow P - \gamma = v \quad (10.62)$$

2. Ecuación de estado:

$$\dot{S}(t) = -q(t) \quad (10.63)$$

3. Ecuación adjunta:

$$\dot{v} = rv \rightarrow v(t) = v_0 e^{rt} \quad (10.64)$$

Combinando las ecuaciones (10.62) y (10.64) y luego derivando respecto al tiempo se obtiene lo siguiente:

$$P - \gamma = v_0 e^{rt} \quad (10.65)$$

$$\dot{P} - \dot{\gamma} = v_0 r e^{rt} \quad (10.66)$$

$$\frac{\dot{P} - \dot{\gamma}}{r} = v_0 e^{rt} = P - \gamma \quad (10.67)$$

$$\frac{\dot{P} - \dot{\gamma}}{P - \gamma} = r \quad (10.68)$$

$$\dot{P} - \dot{\gamma} = r(P - \gamma) \quad (10.69)$$

$$\dot{P} = r(P - \gamma) + \dot{\gamma} \quad (10.70)$$

Finalmente, dividiendo por el precio en (10.70) se llega a la ecuación siguiente:

$$\frac{\dot{P}}{P} = r \left(1 - \frac{\gamma}{P} \right) + \frac{\dot{\gamma}}{P} \quad (10.71)$$

Con la función $\gamma(t)$ que se agregó en este problema particular aparece el último término de la ecuación diferencial (10.71) que hace alusión a la tasa a la cual los costos marginales caen debido al cambio tecnológico (Slade y Thille, 2009). Analizando la ecuación (10.71), se puede concluir que hay dos fuerzas principales que juegan en la ecuación del precio ante cambios tecnológicos. Estas son: el costo de oportunidad (o renta de Hotelling), dado por el término $r\left(1 - \frac{\gamma}{P}\right)$, y el costo que hace disminuir el costo de producción o tecnología, dado por el término $\frac{\dot{\gamma}}{P}$. Este último, discute Slade y Thille (2009), incluso podría conllevar a una caída general del precio, lo que se representa en la Figura 10.6.

El primer factor se explica por el hecho de extraer una tonelada de recurso que ya no estará disponible en el futuro. Este se vuelve más importante a medida que avanza el tiempo y la cantidad de recurso disponible disminuye. El segundo factor se debe a su vez a las características de la función $\gamma(t)$ (decreciente en el tiempo) y tiene como consecuencia la disminución del precio.

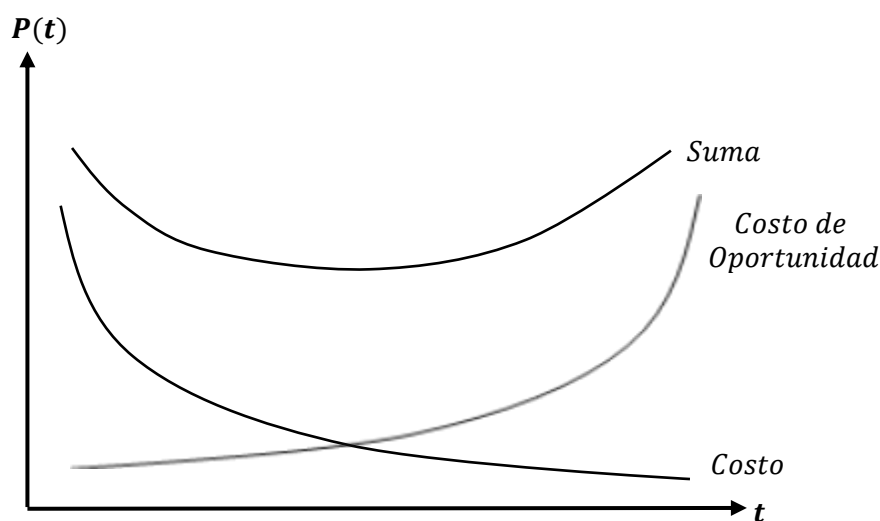


Figura 10.6. Fuerzas principales detrás de la determinación del precio del *commodity*

RECUADRO 10.3

EL CAMBIO TECNOLÓGICO EN ECONOMÍAS QUE UTILIZAN RECURSOS NATURALES

Hoy en día muchos mercados utilizan recursos naturales en sus procesos productivos, como por ejemplo, la energía generada mediante el uso de petróleo o de carbón. Naturalmente, estas empresas

viven con el problema de trabajar con un insumo crítico que tiene condición de agotabilidad. Sin embargo, según explica Davison (1978), esta dependencia de recursos naturales no lleva necesariamente a resultados desastrosos. Esto se debe principalmente al cambio tecnológico, que abre la posibilidad de desarrollar insumos que no dependan de estos recursos agotables. Retomando el ejemplo anterior, se han desarrollado otros métodos de generación de energía como la eólica.

Para lograr el cambio tecnológico, es necesario generar conocimiento mediante investigación y desarrollo, lo que se traduce en inversión de capital por parte de las empresas. Lo anterior abre otro problema que busca responder a la pregunta de cuánto y hasta qué punto invertir. Davison (1978) y Kamien y Schwartz (1978) coinciden en que el capital invertido debe ser una función decreciente en el tiempo, hasta llegar a cero en el caso de que no se descubra la nueva tecnología. Esto último estaría atribuido principalmente al riesgo que implica seguir invirtiendo y a que, a pesar de los esfuerzos en investigación y desarrollo, el recurso se sigue agotando.

En el caso en que se descubre una nueva tecnología, no necesariamente se deberá implementar inmediatamente. Al contrario, en muchos casos, lo óptimo será continuar con la tecnología actual y gradualmente adoptar el cambio (Kamien y Schwartz, 1975). Intuitivamente esto tiene sentido económico ya que implementar una nueva tecnología conlleva tiempo y costos asociados.

Habiendo entendido la relajación de los tres supuestos estudiados en este capítulo del mundo ideal de Hotelling y su implicancia en la resolución del problema se procede a continuación a estudiar la estabilidad de las soluciones en la sección siguiente.

10.4 Análisis de Estabilidad

Cuando se incorporan costos de extracción, cambios tecnológicos y límites de capacidad para acercarse más a la realidad minera el planteamiento de Hotelling, se obtiene (como se mostró en la sección anterior) un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias con dos incógnitas. La solución de este sistema permite entonces resolver el problema de optimización minero y así determinar la política de extracción óptima de la mina (derivando $q(t)$). La solución del sistema no es siempre posible de obtener algebraicamente, dada la característica no-lineal inherente que en general forma parte del problema.

Por esta razón, muchas veces será conveniente realizar un análisis de estabilidad de las soluciones del sistema. Para esto debe considerarse que la trayectoria de la solución del sistema puede ser representada en un plano cartesiano con dos ejes (q, S) para las variables endógenas

en el problema de la mina. Este tipo de representación se denomina (en sistemas dinámicos) diagrama de fase. Así, se puede realizar una evaluación cualitativa de las trayectorias de cada una de las funciones-solución.

En la Figura (10.7) se ejemplifica en a) la solución para un conjunto de 3 soluciones para (q, S) en un diagrama de fase. Los diferentes perfiles de producción asociados a cada una de las trayectorias representadas en el diagrama de fase se muestran en las imágenes b), c) y d). Aquí, b) representa un perfil de producción $q(t)$ decreciente a lo largo de la vida de la mina con un agotamiento total de las reservas $S^* = 0$. Por su parte, c) representa un perfil de producción $q(t)$ decreciente hasta cierto punto de la vida de la mina y luego constante hasta consumir todas las reservas $S^* = 0$. Finalmente, d) muestra un perfil de producción $q(t)$ constante hasta consumir todas las reservas mineras $S^* = 0$.

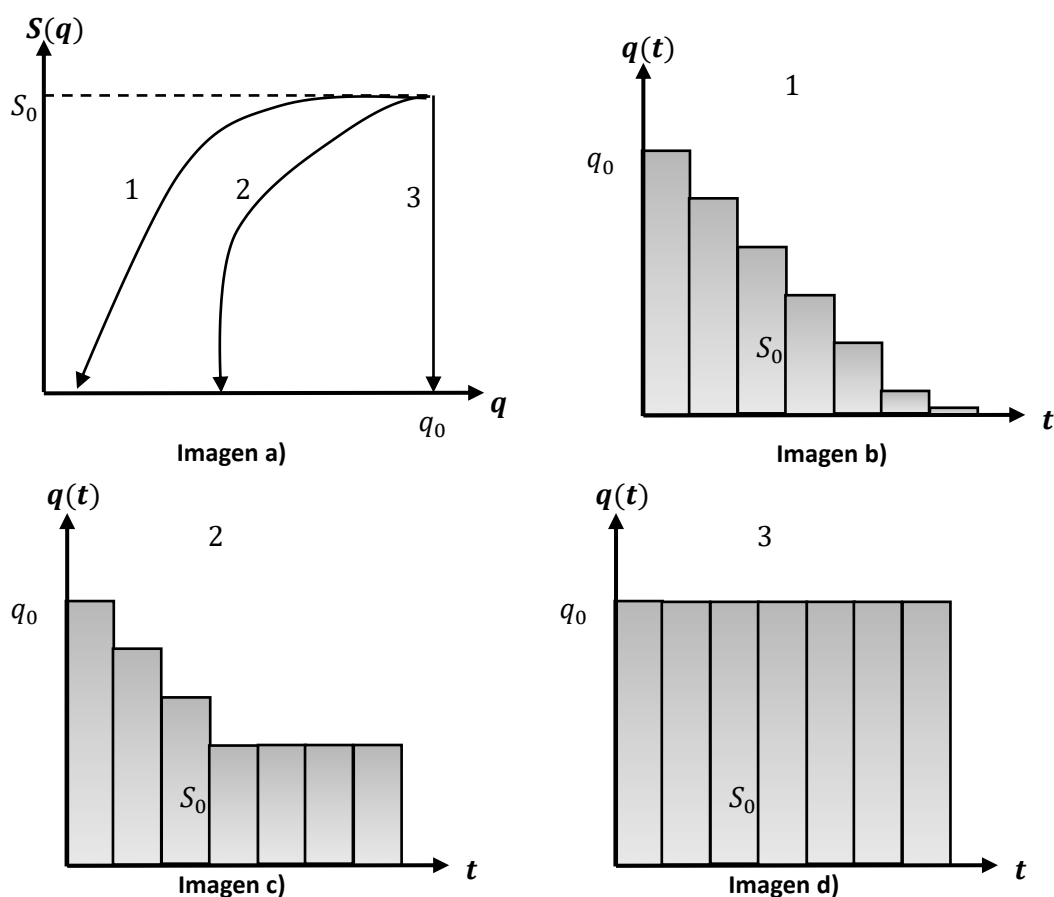


Figura 10.7. a) Diagrama de Fase; b), c) y d) Perfiles de Producción

Cabe señalar que es común observar en la industria minera perfiles de producción $q(t)$ crecientes los primeros años de vida de la mina (*ramp up*) hasta llegar a un estado de régimen, y luego la producción empieza a reducirse hasta llegar a anularse (*ramp down*). En el caso de las minas de cobre subterráneas que se explotan por medio del método del *block caving*, por ejemplo, en estado de régimen la producción se mantiene constante durante un período aproximadamente equivalente a dos tercios de la duración de toda la explotación por el resto de la vida de la mina.

A continuación, se detalla un método para linealizar un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no-lineal de 2×2 y transformarlo en uno de más fácil manejo, pero que además conserve las características del original. Se explica además por qué las trayectorias de las soluciones en un plano de fase en un plano $x - y$ son similares para el sistema casi lineal, producto de la linealización. Finalmente, se mencionan dos formas de clasificar la estabilidad de las soluciones.

Considere el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales autónomo no lineal de la forma:

$$\dot{x}_j = f_j(x_1, x_2) \quad j = 1, 2 \quad (10.72)$$

Donde $f_j(x_1, x_2)$ son funciones diferenciables en todo su dominio. Además, como notación se usa:

$$x = (x_1, x_2)^T \quad (10.73)$$

$$f = (f_1, f_2)^T \quad (10.74)$$

Si $f(x) = 0$, entonces x se llama punto de equilibrio o punto crítico. Esto es, porque la función \dot{x} no depende más del tiempo. Es un criterio de convergencia en la solución del sistema. Se supone x^* un único punto de equilibrio, entonces se define:

$$X(t) = x(t) - x^* \quad (10.75)$$

La ecuación (10.72) puede ser reescrita utilizando la expansión de Taylor para funciones en dos variables ($\forall j = 1, 2$):

$$\dot{x}_j = f_j(x) = f_j(x^*) + \frac{\partial f_j}{\partial x_1}(x^*)(x_1 - x_1^*) + \frac{\partial f_j}{\partial x_2}(x^*)(x_2 - x_2^*) + g_j(X) \quad (10.76)$$

$$\dot{x}_j = f_j(x) = f_j(x^*) + \frac{\partial f_j}{\partial x_1}(x^*)X_1 + \frac{\partial f_j}{\partial x_2}(x^*)X_2 + g_j(X) \quad (10.77)$$

Donde $g_j(X)$ son los términos de orden superior en el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no-lineal. Si se usa $\dot{x} = \dot{X}$ y $f(x^*) = 0$ la ecuación (10.77) puede ser expresada de manera vectorial como:

$$\dot{X} = AX + g(X) \quad (10.78)$$

Se denomina a la ecuación (10.78), sistema casi-lineal, donde la matriz A es la matriz Jacobiana de x evaluada en x^* , es decir:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad (10.79)$$

La ecuación (10.72) se puede expresar como un sistema linealizado cerca del origen del sistema ya que el término de orden superior tiende a cero cerca de este. Dicho sistema viene dado por:

$$\dot{X} = AX \quad (10.80)$$

Es decir:

$$\text{si } \|X\| \rightarrow 0 \text{ entonces } g(X) \rightarrow 0 \text{ con } \|X\| = \sqrt{X_1^2 + X_2^2} \quad (10.81)$$

Por este motivo es razonable pensar que las trayectorias del sistema linealizado son buenas aproximaciones del sistema no lineal, al menos cerca del origen. Existe un teorema (Zhang, 2005) que resume las relaciones entre el sistema autónomo no lineal (10.72) y el sistema linealizado (10.80).

Teorema: Sean ρ_1 y ρ_2 valores propios del sistema lineal $\dot{X} = AX$ correspondiente al sistema casi lineal $\dot{X} = AX + g(X)$. Entonces, el tipo y la estabilidad del punto crítico (0,0) del sistema lineal y del sistema casi-lineal se muestran en la siguiente tabla. En este caso AE: asintóticamente estable; y NP: nodo propio o impropio.

Tabla 10.1. Estabilidad de soluciones en función de valores propios.

VALORES PROPIOS	SISTEMA LINEAL		SISTEMA CASI-LINEAL	
	TIPOS DE PUNTO CRÍTICO	ESTABILIDAD	TIPOS DE PUNTO CRÍTICO	ESTABILIDAD
$\rho_1 > \rho_2 > 0$	Nodo	Inestable	Nodo	Inestable
$\rho_1 < \rho_2 < 0$	Nodo	AE	Nodo	AE
$\rho_1 < 0 < \rho_2$	Espiral	Inestable	Espiral	Inestable
$\rho_1 = \rho_2 > 0$	NP	Inestable	Nodo o espiral	Inestable
$\rho_1 = \rho_2 < 0$	NP	AE	Nodo o espiral	AE
$\rho_{1,2} = \sigma \pm i\varphi$	Espiral	Estable si $\sigma < 0$ Inestable si $\sigma > 0$	Espiral	Estable si $\sigma < 0$ Inestable si $\sigma > 0$
$\sigma > 0$		Inestable		Inestable
$\sigma < 0$		AE		AE
$\rho_{1,2} = i\varphi$	Centro	Estable	Centro o espiral	Indeterminado

Nótese que en general la estabilidad del sistema casi-lineal es equivalente al del sistema lineal, a excepción del caso en el cual el segundo es un centro.

De acuerdo a Shone (2002), se puede hacer una clasificación análoga y gráfica en base a los valores propios de la matriz Jacobiana A . Las raíces o soluciones de la ecuación para encontrar los valores propios de la matriz Jacobiana A están dadas por:

$$\rho_1, \rho_2 = \det(A - \lambda I) = 0 \quad (10.82)$$

Esto es equivalente a:

$$\rho_1, \rho_2 = \frac{\text{Tr}(A) \pm \sqrt{\text{Tr}(A)^2 - 4\text{Det}(A)}}{2} \quad (10.83)$$

De donde hay tres posibilidades:

- i) $\text{Tr}(A)^2 > 4\text{Det}(A)$ los valores propios son reales y distintos
- ii) $\text{Tr}(A)^2 = 4\text{Det}(A)$ los valores propios son reales e iguales
- iii) $\text{Tr}(A)^2 < 4\text{Det}(A)$ los valores propios son imaginarios conjugados

Para mostrar los tipos de soluciones se hace un gráfico en donde el eje horizontal corresponde a la traza de la matriz A y el eje vertical corresponde a su determinante. La curva que se muestra

en la Figura (10.8) es $Tr(A)^2 = 4Det(A)$. La clasificación de cada una de las zonas se hace en base al tipo de solución para el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias lineal que es posible obtener con los valores propios de la matriz del sistema. Cada solución para cada caso define un tipo de trayectoria específica en un plano de fase.

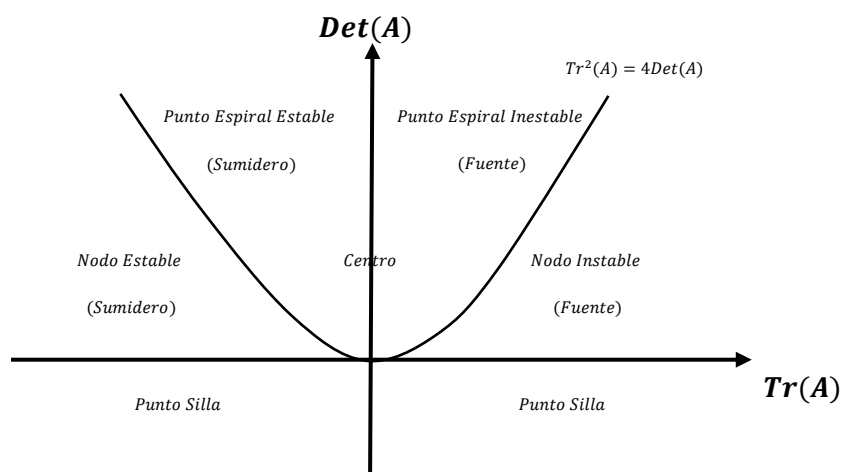


Figura 10.8. Zonas de estabilidad de soluciones

Retomando el problema general que resuelve una empresa minera que busca maximizar VAN con costos de extracción, el sistema de ecuaciones diferenciales no lineales a resolver está dado por:

$$\dot{q} = \frac{1}{B_{qq} - C_{qq}} [r(B_q - C_q) - B_s + C_s + q(B_{qS} - C_{qS})] \quad (10.84)$$

$$\dot{S} = -q \quad (10.85)$$

Al usar análisis de estabilidad en el sistema anterior y definiendo una función de costos típica, sin pérdida de generalidad, con variación de costo por cambio tecnológico y de nivel de producción, se tiene:

$$B(q, S) = P(t)q(t) \quad (10.86)$$

$$C(q, S) = \gamma(t) \frac{q(t)^2}{2} - \delta \log(1 + S) \quad (10.87)$$

Los costos de operación en este caso son más bajos en un comienzo de la operación. A medida que avanza la explotación los costos aumentan, ya sea por la distancia de transporte u otro factor.

$$B_q = P(t); \quad B_{qq} = 0; \quad C_q = \gamma(t)q(t); \quad C_{qq} = \gamma(t); \quad (10.88)$$

$$B_{qS} = 0; \quad C_{qS} = 0; \quad B_S = 0; \quad C_S = -\frac{\delta}{1+S}; \quad (10.89)$$

Reemplazando:

$$\dot{q} = \frac{-1}{\gamma} [r(P(t) - \gamma(t)q(t)) - \frac{\delta}{1+S}] = F(q, S) \quad (10.90)$$

$$\dot{S} = -q = G(q, S) \quad (10.91)$$

En general no es la mejor opción explotar todos los recursos de la mina. Es una decisión condicionada a estados económicos futuros en los que pueden existir variaciones de precios o cambios tecnológicos que afecten esta decisión. De allí la utilidad de un análisis de estabilidad. La trayectoria de q y S y su punto de convergencia dependen de las variables del sistema. Se pretende estudiar la estabilidad del sistema anterior para determinar cómo se comporta la solución.

Primero se determina hacia dónde convergirá la solución, luego, en la vecindad de ese punto, entender y determinar cómo se acerca el sistema al óptimo en función de sus variables.

De acuerdo a la ecuación (10.72) se debe construir la matriz Jacobiana, la que viene dada por:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F(x^*)}{\partial q} & \frac{\partial F(x^*)}{\partial S} \\ \frac{\partial G(x^*)}{\partial q} & \frac{\partial G(x^*)}{\partial S} \end{bmatrix} \quad (10.92)$$

En el caso que se está analizando:

$$J = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-\delta}{\gamma(1+S)^2} \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (10.93)$$

Luego se calcula la traza y el determinante:

$$Tr(J) = 1 \quad (10.94)$$

$$Det(J) = \frac{-\delta}{\gamma(1+S)^2} \quad (10.95)$$

Con el fin de analizar la convergencia del sistema, se debe cumplir en x^* :

$$\dot{q} = \dot{S} = 0 \quad (10.96)$$

Estas son las condiciones que garantizan que q y S no van a cambiar, es decir, que dejan de depender del tiempo. De no ocurrir esto, significa que q y S siguen variando en función del tiempo y no existe posibilidad de convergencia.

En el caso que se está analizando:

$$\dot{q} = \frac{-1}{\gamma} [r(P(t) - \gamma(t)q(t)) - \frac{\delta}{1+S}] = 0 \quad (10.97)$$

$$\frac{-1}{\gamma} \left[rP(t) - \frac{\delta}{1+S} \right] = 0 \quad (10.98)$$

$$S^* = \frac{\delta}{rP} - 1 \quad (10.99)$$

Además:

$$\dot{S} = -q = 0 \quad (10.100)$$

$$q^* = 0 \quad (10.101)$$

Cuando se tiene un sistema \dot{x}, \dot{y} , el plano fase es el plano $x - y$. De aquí:

$$F_q|(q^*, S^*) = r \quad (10.102)$$

$$F_S|(q^*, S^*) = \frac{-\delta}{\gamma(1+S)^2} = \frac{-\delta}{\frac{\gamma\delta^2}{r^2P^2}} = \frac{-r^2P^2}{\gamma\delta} < 0 \quad ; \text{si } \gamma \text{ y } \delta > 0 \quad (10.103)$$

Se cumple que:

$$Tr(A)^2 > 4Det(J) \rightarrow 1 > \frac{-4r^2P^2}{\gamma\delta} \quad (10.104)$$

Por lo tanto, de acuerdo a la Figura (10.8), el punto corresponde a uno de tipo silla. En términos prácticos, si la función de utilidad de la mina fuera la dada en un comienzo, q y S convergen al punto $x^* = (q^*, S^*) = (0, \frac{\delta}{rP} - 1)$. Hay que tener en consideración que la trayectoria de convergencia en el plano fase $x - y$, es dependiente de las variables del sistema y además crítica en el resultado del problema que resuelve la empresa minera. En este caso en particular, se tiene que si $\frac{\delta}{rP} - 1 \leq 0$, se agotan los recursos con la política óptima de extracción y si $\frac{\delta}{rP} - 1 > 0$, no se agotan los recursos con la política óptima de extracción.

10.5 Estática Comparativa

Una vez ya definidas las características de estabilidad que posee la solución que se genera a partir del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias planteado, es crucial preguntarse acerca de cómo puede variar la solución óptima frente a cambios externos del precio de mercado o de la tasa de interés. Dichos parámetros son considerados como exógenos, ya que su definición, depende de procesos ajenos al alcance de la empresa minera.

Considere el siguiente problema que resuelve una empresa minera, en un tiempo dado particular, esto es, sin dependencia temporal:

$$\max_q \pi = P_o q - C(q) \quad (10.105)$$

Para resolver este problema se deben recurrir a las condiciones de primer y segundo orden, es decir:

$$\frac{d\pi}{dq} = 0 \rightarrow P_o - C'(q) = 0 \quad (10.106)$$

$$\frac{d^2\pi}{dq^2} < 0 \rightarrow -C''(q) < 0 \quad (10.107)$$

Las anteriores condiciones son propias de un problema de optimización estática. Sería interesante plantear cómo cambia la producción en función de variaciones en el precio P_o de manera de tener un plan de acción frente a un descenso de este parámetro.

La estática comparativa plantea responder: ¿qué se puede decir sobre el comportamiento de la elección óptima cuando los valores del parámetro cambian? Cabe notar que la pregunta planteada es de carácter local, es decir, se está preguntando el comportamiento alrededor de una solución óptima existente.

Antes de poder ejemplificar cómo opera la estática comparativa, es necesario conocer el teorema de la función implícita (Zhang, 2005), que señala:

Considere un sistema de ecuaciones representado por:

$$F(x, \alpha) = 0 \quad (10.108)$$

Donde $F: D \times H \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ y además es continuamente diferenciable. Suponga que existe un $\alpha^0 \in H$ y un $x^0 \in D$ que además de cumplir con (10.94) verifican que:

$$\text{Det}[F_x(x^0, \alpha^0)] \neq 0 \quad (10.109)$$

Las condiciones (10.108) y (10.109) permiten asegurar que localmente, esto es, en un entorno de (x^0, α^0) , existe la variable x en función del parámetro α , heredando además las propiedades de diferenciabilidad de la función F que definía el sistema de ecuaciones.

Volviendo al ejemplo, supóngase que las condiciones del teorema de la función implícita se cumplen y que la solución a encontrar q^* depende del único parámetro que posee el problema: P_0 . Tomando la ecuación (10.92), se tiene que:

$$P_0 - C'(q^*(P_0)) = 0 \quad (10.110)$$

Diferenciando respecto a P_0 a ambos lados de la ecuación se obtiene que⁵¹:

$$1 - C''(q^*(P_0)) \frac{dq^*(P_0)}{dP_0} = 0 \quad (10.111)$$

De esta expresión se puede obtener que:

$$\frac{dq(P_0)}{dP_0} = \frac{1}{C''(q^*(P_0))} \quad (10.112)$$

De la ecuación (10.107) se sabe que $C''(q) > 0$, esto entonces permite afirmar que:

$$\frac{dq(P_0)}{dP_0} > 0 \quad (10.113)$$

Esto permite concluir que, si el precio aumenta, la cantidad óptima a producir también crece, dentro de un entorno acotado donde se cumplan las condiciones mencionadas del teorema de la función implícita. Este resultado concuerda con la intuición económica, ya que a medida que el precio crezca existirán mayores incentivos a aumentar la producción.

De acuerdo a Samuelson (1941), el fundador de la estática comparativa aplicada a los problemas económicos, el problema que formalmente pretende resolver la estática comparativa corresponde a tener n relaciones independientes, continuas, diferenciables e implícitas, que involucran tanto a las variables endógenas a determinar, como a los parámetros (variables exógenas) que para este caso se denominaran α . Esto matemáticamente corresponde a:

⁵¹ Recuerde la regla de la cadena de cálculo, que establece que: $\frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x))g'(x)$.

$$f^i(x_1, x_2, \dots, x_n, \alpha) = 0 \quad i = 1 \dots n \quad (10.114)$$

Estas relaciones, que en general son de un carácter altamente no lineal y a veces de muy difícil resolución, permiten generar un conjunto de relaciones de estabilidad dadas por:

$$x_i^o = g_i(\alpha) \quad (10.115)$$

Aquí interesa saber el signo que tiene la siguiente expresión:

$$\frac{dx_i^o}{d\alpha} = g_i'(\alpha) \quad (10.116)$$

Para poder obtener esta última expresión, es necesario diferenciar totalmente respecto a α el sistema planteado en la ecuación (10.115). Nótese que esta es una derivación implícita y que cada variable endógena x_i depende a su vez de α , por tanto, dicho procedimiento generará otro sistema de ecuaciones, esta vez lineal, que en general suele ser resuelto mediante el uso de la regla de Cramer.⁵² Otra consideración importante es el método de resolución cuando las expresiones encontradas para (10.114), no dependen únicamente de una variable exógena, sino que de varias. Para solucionar el problema en este caso, es necesario derivar tal como se hizo para α , pero ahora para el resto de los parámetros que se quieren estudiar y obtener así un set de ecuaciones lineales para cada variable exógena.

Para poder entender el procedimiento planteado anteriormente, considere las siguientes tres relaciones fundamentales establecidas por Keynes en su “Teoría General” (Samuelson, 1941):

- La función de consumo relaciona el consumo, ahorro e inversión tanto a los ingresos como a la tasa de interés.
- La eficiencia marginal del capital relaciona la inversión neta con la tasa de interés y el nivel de ingreso.
- La demanda por dinero relaciona la cantidad de dinero con la tasa de interés y el nivel de ingresos.

⁵² Si $Ax = b$ es un sistema de ecuaciones su solución viene dada por $x_j = \frac{Det(A_j)}{Det(A)}$ donde A_j es la matriz que resulta al reemplazar la columna j de A por el vector b .

Estas tres afirmaciones pueden ser representadas matemáticamente por las siguientes ecuaciones:

$$C(i, Y) - Y + I + \alpha = 0 \quad (10.117)$$

$$F(i, Y) - I + \beta = 0 \quad (10.118)$$

$$L(i, Y) - M = 0 \quad (10.119)$$

Donde i, Y, I representan respectivamente la tasa de interés, el ingreso y la inversión (variables endógenas); además C, F y L corresponden a la función de consumo, la eficiencia marginal de la inversión y la demanda por dinero.

Ahora bien, los parámetros de estas ecuaciones corresponden a: α que expresa la propensión a un mayor consumo, de forma similar, β hace referencia a la tendencia a una mayor demanda de dinero y M se considera como la cantidad de dinero existente.

La idea es suponer que las variables endógenas i, Y, I dependen de los parámetros señalados anteriormente α, β y M ,⁵³ de manera de proceder con la derivación.

Así, podría interesar cómo cambian las variables propias del sistema frente a cambios de α . Para ello es necesario derivar implícitamente las ecuaciones (10.117), (10.118) y (10.119) respecto a α como sigue:

$$C_i \frac{di}{d\alpha} + C_Y \frac{dY}{d\alpha} - \frac{dY}{d\alpha} + \frac{dI}{d\alpha} + 1 = 0 \quad (10.120)$$

$$F_i \frac{di}{d\alpha} + C_Y \frac{dY}{d\alpha} - \frac{dI}{d\alpha} = 0 \quad (10.121)$$

$$L_i \frac{di}{d\alpha} + L_Y \frac{dY}{d\alpha} = 0 \quad (10.122)$$

Sistema que matricialmente puede ser expresado como:

⁵³ Esto quiere decir que: $i = i(\alpha, \beta, M)$ y $I = I(\alpha, \beta, M)$.

$$\begin{bmatrix} C_i & C_Y - 1 & 1 \\ F_i & C_Y & -1 \\ L_i & L_Y & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{di}{d\alpha} \\ \frac{dY}{d\alpha} \\ \frac{dI}{d\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10.123)$$

Dicho sistema, como se sabe, puede ser resuelto a través de la regla de Cramer, de donde resulta:

$$\frac{di}{d\alpha} = -\frac{L_Y}{\Delta} \quad (10.124)$$

$$\frac{dY}{d\alpha} = \frac{L_i}{\Delta} \quad (10.125)$$

$$\frac{dI}{d\alpha} = \frac{F_Y L_i - F_i L_Y}{\Delta} \quad (10.126)$$

Donde Δ representa el determinante de la matriz planteada en (10.123), esto es:

$$\begin{vmatrix} C_i & C_Y - 1 & 1 \\ F_i & C_Y & -1 \\ L_i & L_Y & 0 \end{vmatrix} = L_Y(F_i + C_i) + L_i(1 - C_Y - F_Y) \quad (10.127)$$

A partir de estas últimas expresiones se puede establecer un análisis de cómo varía i, Y e I cuando cambia α mediante un análisis del signo de cada una de las expresiones (10.124), (10.125) y (10.126).

El procedimiento para los parámetros β y M es esencialmente el mismo, en donde en vez de derivar con respecto a α se deriva respecto a estos, para luego resolver el sistema de ecuaciones lineales planteado en la expresión (10.123) que esta vez tendrá como incógnitas a: $\left[\frac{di}{d\beta}, \frac{dY}{d\beta}, \frac{dI}{d\beta} \right]$ para el caso de β , así como $\left[\frac{di}{dM}, \frac{dY}{dM}, \frac{dI}{dM} \right]$ para M .

La importancia de la estática comparativa radica en la posibilidad de predecir cómo se verá afectada una variable propia del sistema frente a cambios externos de un parámetro, de manera de poder tener claridad de cómo reaccionar frente a un escenario semejante. Dicha aplicación resulta fundamental en el caso de la minería, ya que, por ejemplo, podría señalar cómo se alterará la política óptima de producción establecida cuando varía el precio de mercado o la tasa interés a la cual se descuentan los flujos de caja.

Otra importante herramienta que otorga el método explicado anteriormente es que permite conocer qué característica debe tener la solución a encontrar. A lo largo del capítulo presente se discutió que las ecuaciones diferenciales ordinarias a las cuales se llega para $q(t)$ y $S(t)$,

son altamente complejas de resolver, por tanto, obtener una caracterización de éstas se vuelve esencial para acercarse a los resultados óptimos que se derivan del problema originalmente planteado. Básicamente no se conoce, en muchos casos, explícitamente $q^*(t)$, pero sí se puede afirmar, por ejemplo, que debe ser creciente en relación al precio de mercado o bien decreciente frente a la tasa de interés, características que surgen a partir de la aplicación de la estática comparativa.

10.6 Problemas resueltos

Problema 10.1

Considere la explotación de un *commodity* mineral dado por P_0 el precio fijo de este, r la tasa de interés del mercado y $q(t)$ correspondiente a la cantidad de *commodity* producido en un instante t . Además, suponga que el LOM de la mina ya ha sido determinado con un valor igual a T y que su estructura de costos corresponde a una función $C(q(t))$ que únicamente depende de $q(t)$. Suponga además que la mina posee una cantidad inicial de reservas dada por S_0 .

- a. Plantee el problema de optimización dinámica para determinar la extracción óptima en el tiempo, tal que se maximice el *VAN* de la mina.
- b. Haciendo uso de control óptimo, plantee las condiciones necesarias que debiesen cumplir $q(t)$ y $S(t)$ para obtener la política óptima de producción.
- c. A partir de las expresiones obtenidas anteriormente y mediante el uso de estática comparativa, determine cómo variará la política óptima de extracción frente a cambios de la tasa de interés (r) y el precio de mercado (P_0).
- d. Suponga que, dado un nuevo estudio realizado al interior de la mina, se supo que su estructura de costos no sólo depende de $q(t)$ sino que además de $S(t)$ siendo $C(q(t), S(t))$ decreciente y estrictamente convexa en $S(t)$ y $q(t)$. Para lo anterior, usando nuevamente control óptimo, derive el sistema de ecuaciones diferenciales que debe satisfacer $q(t)$ y $S(t)$ en la solución del problema.
- e. Determine la naturaleza de la estabilidad de los puntos de equilibrio que surgen a partir de las expresiones obtenidas en d). Para ello, además considere que en el equilibrio se satisface para $S(t)$, la siguiente ecuación diferencial ordinaria de segundo orden:

$$\frac{d^2S(t)}{dt^2} + S(t) = \alpha + \beta S(t)^2$$

Con α y β constantes.

Solución

a) El problema puede ser expresado matemáticamente de la siguiente forma:

$$\max_q \int_0^T e^{-rt} (P_0 q(t) - C(q(t))) dt$$

s. a.

$$S'(t) = -q(t)$$

$$S(0) = S_0$$

$$S(t), q(t) \geq 0$$

b) Usando control óptimo, se obtiene que el Hamiltoniano está dado por:

$$\hat{H} = P_0 q(t) - C(q(t)) + v(-q(t))$$

Luego, por el principio del máximo:

(i) Condición del máximo:

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial q} = P_0 - C'(q(t)) - v = 0$$

Condición que es válida sólo si:

$$\frac{\partial^2 \hat{H}}{\partial q^2} = -C''(q(t)) < 0$$

(ii) Ecuación de estado:

$$\dot{S} = -q$$

(iii) Ecuación adjunta:

$$\dot{v} = rv - \frac{\partial \hat{H}}{\partial S} = rv \rightarrow v(t) = v_0 e^{rt}$$

- (iv) Transversalidad: No aplica ya que el LOM es fijo es igual a T .
 (v) Condiciones iniciales:

$$S(0) = S_0$$

c) Para poder aplicar la estática comparativa debe suponer que:

$$q(t) = q(t, r, P_0)$$

Esto es que q ya no solo depende del tiempo, sino que además es función de la tasa de descuento y del precio. Si se toma la condición del máximo se tiene que:

$$p_0 - C'(q(t, r, P_0)) - v = 0$$

Y utilizando la ecuación adjunta se llega a:

$$P_0 - C'(q(t, r, P_0)) - v_0 e^{rt} = 0$$

Derivando esta expresión respecto a P_0 se tiene que:

$$1 - C''(q^*(t, r, P_0)) \frac{dq^*}{dP_0} = 0$$

De donde se puede obtener que:

$$\frac{dq^*}{dP_0} = \frac{1}{C''(q(t, r, P_0))}$$

Por su parte:

$$C''(q(t, r, P_0)) > 0$$

Lo anterior permite establecer que:

$$\frac{dq^*}{dP_0} > 0$$

Esto establece que a medida que el precio crezca, la cantidad óptima de producción debe crecer, ya que su derivada respecto a este parámetro es positiva.

Ahora, se deriva con respecto a r la expresión obtenida resultando:

$$-C''(q(t, r, P_0)) \frac{dq^*}{dr} - v_0 e^{rt} = 0$$

De donde se puede despejar:

$$\frac{dq^*}{dr} = - \frac{v_0 t e^{rt}}{C''(q(t,r,P_0))}$$

Así se puede observar que ahora q^* varía en sentido contrario a los cambios de r ,⁵⁴ esto es, si r crece, entonces la producción óptima de *commodity* tenderá a disminuir.

d) Ahora se debe considerar que la función de costo depende tanto de la producción como de las reservas remanentes. Para ello se plantean nuevamente las condiciones de control óptimo:

$$\hat{H} = P_0 q(t) - C(q(t), S(t)) + v(-q(t))$$

Luego, por el principio del máximo:

(i) Condición del máximo:

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial q} = P_0 - C_q - v = 0$$

Condición que es válida sólo si:

$$\frac{\partial^2 \hat{H}}{\partial q^2} = -C_{qq} < 0$$

Que se cumple ya que $C(q, S)$ es estrictamente convexa en q y en S .

(ii) Ecuación de estado:

$$\dot{S} = -q$$

(iii) Ecuación adjunta:

$$\dot{v} = rv - \frac{\partial \hat{H}}{\partial S} = rv + C_S$$

(iv) Transversalidad: No aplica ya que el LOM es fijo es igual a T .

(v) Condiciones iniciales:

$$S(0) = S_0$$

Luego de (i) se puede obtener que:

⁵⁴ En general v_0 tiene que ser positivo ya que representa el valor del depósito que aún se encuentra enterrado en la tierra para $t = 0$.

$$v(t) = P_0 - C_q(q(t), S(t))$$

Derivando lo anterior con respecto al tiempo:

$$\rightarrow \dot{v} = -(C_{qq}\dot{q} + C_{qS}\dot{S})$$

Igualando con (iii):

$$rv + C_S = -(C_{qq}\dot{q} + C_{qS}\dot{S})$$

Donde se puede reemplazar v usando también la ecuación de estado que indica que $\dot{S} = -q$:

$$r(P_0 - C_q) + C_S = -(C_{qq}\dot{q} - C_{qS}q)$$

De esta expresión se puede llegar a:

$$\dot{q} = \frac{C_{qS}q - C_S - r(P_0 - C_q)}{C_{qq}}$$

Que junto a la Ecuación de Estado forman el sistema de ecuaciones solicitado:

$$\dot{q} = \frac{C_{qS}q - C_S - r(P_0 - C_q)}{C_{qq}}$$

$$\dot{S} = -q$$

d) Para poder establecer la estabilidad es necesario recordar que:

$$\dot{S} = -q \rightarrow \ddot{S} = -\dot{q}$$

A partir de esto y considerando la ecuación de segundo orden que se entregó en el enunciado:

$$\ddot{S} + S(t) = \alpha + \beta S(t)^2$$

Usando (10.143) se tiene:

$$-\dot{q} + S(t) = \alpha + \beta S(t)^2$$

De donde:

$$\dot{q} = S(t) - \alpha - \beta S(t)^2$$

A partir de esto se puede formar el siguiente sistema:

$$F(q, S): \dot{q} = S - \alpha - \beta S^2$$

$$G(q, S): \dot{S} = -q$$

Recuerde que para analizar la estabilidad se debe tener en cuenta los puntos estacionarios, esto es:

$$\dot{q} = 0$$

$$\dot{S} = 0$$

Esto permite llegar a las siguientes condiciones:

$$q^* = 0$$

$$S^* = S$$

Así se forma la matriz:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -2\beta S + 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

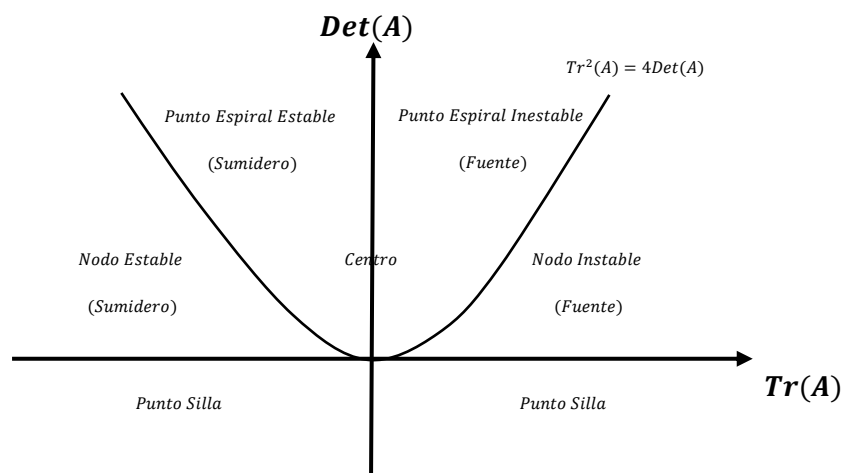
De donde:

$$\text{Traza}(J) = 0$$

$$\text{Det}(J) = -2\beta S + 1$$

De donde sabemos que $\text{Det}(J) < 0$.⁵⁵ Así, el punto obtenido es silla.

⁵⁵ En general dicho término tenderá a ser negativo ya que tanto β como S son positivos y su multiplicación se considerará mayor a uno



Estabilidad del punto de equilibrio.

Recuerde que un punto silla establece que pequeños cambios en la planificación que usted realice, significará posiblemente no converger a la solución óptima, sino llegar a otros resultados sub-óptimos, dada la inestabilidad propia que poseen este tipo de puntos.

Problema 10.2

Sea un yacimiento minero para el cual se desea conocer la ruta de explotación óptima en términos de la producción instantánea, $q(t)$, de un *commodity* mineral, así como el LOM de la operación. La empresa dueña del depósito, considera que el precio del *commodity* de interés seguirá la siguiente función en el tiempo $P(t) = P_0 e^{rt}$, donde r es una constante positiva igual a la tasa de descuento de la empresa. Por otro lado, los ingenieros de mina de la empresa han establecido que el gasto de producción del *commodity* vendrá dado por la función $C(q(t), S(t)) = \frac{\gamma}{2} \left(\frac{q(t)}{S(t)}\right)^2$, con γ una constante positiva y $S(t)$ las reservas remanentes en el instante t .

- Plantee el problema de optimización dinámica de la empresa, asumiendo que la variable de control corresponde a la producción del *commodity* en cada instante de tiempo. Asuma que el LOM de la mina es una variable endógena a determinar y que no existen restricciones de capacidad.
- Establezca el sistema de ecuaciones diferenciales para $q(t)$ y $S(t)$ que debe cumplirse en equilibrio para todo instante de tiempo.

c. Determine el conjunto de puntos de equilibrio del sistema anterior, estableciendo además la estabilidad de dichos puntos. ¿Qué implicancias prácticas tiene la estabilidad del sistema para la planificación minera del yacimiento?

Solución

a) El problema puede ser expresado matemáticamente de la siguiente forma:

$$\max_{q,T} \int_0^T e^{-rt} \left(P(t)q(t) - \frac{\gamma}{2} \left(\frac{q(t)}{S(t)} \right)^2 \right) dt$$

s. a.

$$\dot{S} = -q(t)$$

$$S(t), q(t), T \geq 0$$

b) Usando control óptimo, el Hamiltoniano viene dado por:

$$\hat{H} = P(t)q(t) - \frac{\gamma}{2} \left(\frac{q(t)}{S(t)} \right)^2 + v(-q(t))$$

Luego, por el principio del máximo:

i) Condición del máximo:

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial q} = p(t) - \frac{\gamma q(t)}{S(t)^2} - v = 0$$

Condición que es válida sólo si:

$$\frac{\partial^2 \hat{H}}{\partial q^2} = -\frac{\gamma}{S(t)^2} < 0$$

Desigualdad que se cumple, ya que $S(t) \geq 0, \forall t \in [0, T]$ y $\gamma > 0$ constante positiva.

ii) Ecuación de estado:

$$\dot{S} = -q$$

iii) Ecuación adjunta:

$$\dot{v} = rv - \frac{\partial \hat{H}}{\partial S} = rv + \frac{\gamma q(t)^2}{S(t)^3}$$

iv) Transversalidad:

$$\hat{H}(T) = 0$$

Luego, derivando (i) con respecto al tiempo:

$$\dot{P} - \gamma \left(\frac{\dot{q}S^2 - 2S\dot{S}q}{S^4} \right) - \dot{v} = 0$$

$$\rightarrow \dot{v} = \dot{P} - \frac{\gamma\dot{q}}{S^2} - \frac{2\gamma q^2}{S^3}$$

Igualando con (iii):

$$\dot{P} - \frac{\gamma\dot{q}}{S^2} - \frac{2\gamma q^2}{S^3} = r \left(P - \frac{\gamma q}{S^2} \right) + \frac{\gamma q^2}{S^3}$$

$$\rightarrow \frac{\gamma\dot{q}}{S^2} + \frac{3\gamma q^2}{S^3} - \dot{P} + rP - \frac{r\gamma q}{S^2} = 0$$

Pero del enunciado $P(t) = P_0 e^{rt}$, entonces se tiene que $\frac{\dot{P}}{P} = r$. Así, se obtiene que el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que se obtiene en el equilibrio es:

$$F(q, S): \dot{q} = rq - \frac{3q^2}{S}$$

$$G(q, S): \dot{S} = -q$$

- c) Recuerde que para analizar la estabilidad se debe tener en cuenta los puntos estacionarios, esto es:

$$\dot{q} = 0$$

$$\dot{S} = 0$$

Esto permite llegar a las siguientes condiciones:

$$q^* = 0$$

$$S^* = S$$

Así se forma la matriz:

$$J = \begin{bmatrix} r - \frac{6q}{S} & \frac{3q^2}{S^2} \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Evaluando en $q^* = 0$ y $S^* = S$ se llega a:

$$J = \begin{bmatrix} r & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

De donde:

$$\text{Traza}(J) = r$$

$$\text{Det}(J) = 0$$

Como $\text{Traza}(J) > 0$, los puntos de la forma $(0, S)$ son de tipo silla, esto quiere decir que si bien el equilibrio dado por las ecuaciones anteriores se puede alcanzar cualquier desviación de la trayectoria óptima puede degenerar la solución y converger a valores muy alejados de aquel propuesto por la maximización. En la práctica, lo que se quiere señalar es que la política óptima de extracción es alcanzable ($q^*(t)$), pero pequeñas desviaciones de esa política pueden perjudicar enormemente el valor del VAN óptimo.

Problema 10.3

Considere un proyecto minero consistente en un yacimiento estratificado donde el contenido del metal recuperable (aquel resultante de multiplicar la ley por su recuperación metalúrgica), viene dada por la siguiente función $F(x, y, z)$:

$$F(x, y, z) = \begin{cases} \frac{1}{100(1+z)} & 0 \leq z \leq 1 \\ 0 & z > 1 \end{cases}$$

Aquí, (x, y, z) corresponde a la posición de un punto en el espacio euclidiano \mathbb{R}^3 (z denota la coordenada en elevación, siendo 0 en superficie y creciente en profundidad), tal que las coordenadas x, y y z están normalizadas tomando el valor de 1 cada 1.000 metros. En superficie el yacimiento puede representarse mediante un espacio bidimensional (x, y) . La propiedad minera se encuentra contenida en superficie ($z = 0$) entre los puntos $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ y $(0,1)$.

Para efectos de la explotación del yacimiento, se ha considerado una capacidad de extracción de 36 millones toneladas por instante de tiempo. La densidad de material viene dada por 2,7 ton/m³. El costo mina se descompone en un costo de perforación, tronadura y carguío de 1 US\$/ton y el costo de transporte, el que es equivalente a 1 US\$ por kilómetro desde el punto

de extracción al punto (0,0,0), donde se encuentra la planta de procesamiento. El costo de procesamiento del mineral es de 9 US\$/ton.

Suponga que la empresa posee una tasa de descuento continua de 8% y estima que el precio del metal será igual a 1,2 US\$/lb en todo instante de tiempo. La extracción debe realizarse en bancos de 20 metros, de forma de extraer anillos de cuadrantes de círculo con centro en (0,0) en cada instante de tiempo. La extracción de un banco inferior requiere la extracción completa del banco inmediatamente superior.

- Plantear el problema de optimización dinámica de la empresa identificando la variable de estado y la variable de control. Asuma que el LOM de la mina es una variable endógena a determinar.
- Resuelva el problema anterior, encontrando el límite geométrico de la envolvente económica de la operación y el LOM de la mina. ¿Cuántas toneladas de metal serán extraídas en dicho LOM?
- Si la intensidad de inversión es equivalente a 100 US\$/ton de metal extraído total. Calcule el VAN máximo del proyecto.

Solución

$$a) \max_{r, T} \int_0^T e^{-\rho t} [P_0 F(z)q(r) - (C_m + C_p)q(r) - C_{Trans}D(r, z)] dt$$

$$\dot{S} = -q(t) = -\frac{\pi r^2(t)}{4} h_{banco} \rho$$

$$0 \leq \frac{\pi r^2(t)}{4} h_{banco} \rho \leq K$$

$$S, T \geq 0$$

b) Por control óptimo el Hamiltoniano en valor corriente es:

$$\hat{H} = pFq - (C_m + C_p)q - C_{trans}D(r, z) - vq$$

Se puede observar que esta función es lineal en q , por lo que la condición del máximo conlleva a que se tienen los siguientes posibles valores ubicados en sus bordes:

$$i) q(t) = \begin{cases} K & \text{si } \frac{\partial \hat{H}}{\partial r} > 0 \\ \text{indiferente} & \text{si } \frac{\partial \hat{H}}{\partial r} = 0 \\ 0 & \text{si } \frac{\partial \hat{H}}{\partial r} < 0 \end{cases}$$

De esta forma, se llega a que $q(t)$ será igual a la capacidad de extracción máxima que posee el proyecto. Por su parte las ecuaciones de estado, adjunta y transversalidad vienen dadas por:

$$ii) \dot{S} = -q$$

$$iii) \dot{v} = rv - \hat{H}_s \rightarrow v = v_0 e^{rt}$$

$$iv) \hat{H}(T) = 0$$

Evaluando ingresos y costos en el punto (1,1,1), punto más lejano a la planta, por lo que se analiza la factibilidad de la explotación en dicho punto.

- Ingresos por tonelada = $\rho \frac{\text{Factor}}{100(1+1)} = 1,2 \cdot \frac{2204,6}{100(1+1)} = 13,23 \text{ US\$/ton.}$
- Costos por tonelada = $C_m + C_p + C_T D(x, y, z) = 10 + \sqrt{3} = 11,73 \text{ US\$/ton.}$

De manera que al ser los ingresos mayores a los costos, resulta conveniente extraer todo el yacimiento, por lo que se llega a z óptimo.

$$z^* = 1.000 \text{ metros}$$

Ahora, se determina el radio óptimo que permita alcanzar la capacidad de extracción definida en los límites de la envolvente final.

$$K = \frac{\pi r^2(t)}{4} h_{\text{banco}} \rho$$

Reemplazando los valores dados en el enunciado se llega a $r^* = 921,55 \text{ metros.}$

Para determinar el LOM:

$$KT = \frac{\pi r^2(t)}{4} 1000$$

$$T = 50 \text{ años}$$

Finalmente, para determinar la cantidad de metal extraído en el LOM de la mina notamos en primer lugar, que a capacidad de extracción máxima K , la profundidad z (normalizada) a la cual se encuentra el yacimiento en cada instante de tiempo está dada por:

$$Kt = \frac{\pi r^2(t)}{4} z \rho$$

$$z = 0,02t$$

El metal por recuperar durante el LOM se obtiene de:

$$\int_0^T \frac{K}{100(1+z)} dt = \int_0^{50} \frac{36000000}{100(1+0,02t)} dt$$

Integrando y evaluando entre 0 y 50 años:

$$360000 \cdot \frac{\ln(1 + 0,02t)}{0,02} = 12.480.000 \text{ US\$}$$

$$c) VAN = -\phi(K) + \int_0^T e^{-\rho t} [P_0 F(z)K - (C_m + C_p)K - C_{Trans} D(r, z)] dt \quad (10.179)$$

$$= 36 \times 10^6 \int_0^{50} e^{-0,08t} \left(1,2 \cdot \frac{2204,6}{100(1 + 0,02t)} \cdot 36MM - 10 \cdot 36MM - \sqrt{921,55^2 + (1 + 20t)^2} \right) dt$$

De donde es posible obtener:

$$VAN_{sin inversión} = 5.310,5 \text{ MUSD}$$

Dada la inversión:

$$Inversión = 100 \cdot 12.48Mton = 1.248 \text{ MUS\$}$$

El VAN con inversión será:

$$VAN_{con inversión} = 4.062,5 \text{ MUSD}$$

Problema 10.4

Considere un yacimiento concéntrico donde el contenido de un metal recuperable (aquel resultante de multiplicar la ley por su recuperación metalúrgica), viene dada por la siguiente función $F(x, y, z)$:

$$F(x, y, z) = \begin{cases} \frac{1}{100(1 + x^2 + y^2)} & 1 \leq z \leq 3 \\ 0 & z < 1 \text{ o } 3 < z \end{cases}$$

Donde (x, y, z) es la posición de un punto en el espacio euclidiano \mathbb{R}^3 (z corresponde a la coordenada en elevación, siendo 0 en superficie y creciente en profundidad), tal que las coordenadas x , y y z están normalizadas tomando el valor de 1 cada 500 metros. Para efectos de la exploración del yacimiento se ha considerado una capacidad de extracción de 10 millones de toneladas por instante de tiempo. La densidad de material (d) viene dada por $2.7 \frac{\text{ton}}{\text{m}^3}$. El costo mina es de 2 dólares la tonelada de material, mientras el costo planta es de 10 dólares la tonelada de mineral. La tasa de descuento en tiempo continuo de la empresa es de 8%.

La explotación debe ser realizada de forma subterránea según cortes cilíndricos de radio ρ y profundización de l (en la vertical), la cual debe realizarse de forma continua en z desde $z=1$ y hasta $z=3$.

a. Plantee el problema de optimización dinámica de la empresa, asumiendo que la variable de control es la profundización l en cada instante de tiempo, para el caso en que el precio del metal es igual a $1500f(t)$ (dólares la tonelada para todo t en cual se desarrolla la operación) y que $f(t) = 1 - 0.05t$.

Solución

$$\text{a) } \max_{l(t), T} VAN = \text{Max} \int_0^T \{p(t)q(t)F(x, y, z) - C_m q(t) - C_p F(x, y, z)q(t)\} e^{-rt} dt$$

Sujeto a:

$$\dot{L} = -l(t) \quad \text{Restricción de agotabilidad}$$

$$q(t) \leq K \quad \text{Restricción de capacidad}$$

$$\pi \rho^2 l(t) d = q(t) \quad \text{Restricción minera}$$

$$l(t), T \geq 0 \quad \text{Restricción de no negatividad}$$

$$L(0) = 2, L(T) = 0 \quad \text{Condiciones de borde}$$

Se debe notar que el recurso es homogéneo en $l(t)$ y sólo en la medida que el radio va aumentando, el metal recuperable va disminuyendo. De este modo, $\dot{L} = -l(t)$. Esta restricción

es llamada holonómica, dado que depende de parámetros que son: coordenadas geométricas y tiempo. En este caso, se debe hallar ρ y T , respectivamente.

Para $f(t) = 1 - 0.005t$, $\rho^2 = x^2 + y^2$ se tiene que:

$$\hat{H} = 1500(1 - 0.005t) \frac{\pi\rho^2 l(t)d}{100(1 + \rho^2)} - C_m \pi\rho^2 l(t)d - C_p \frac{\pi\rho^2 l(t)d}{100(1 + \rho^2)} - v(t)l(t)$$

i) (Condición del máximo) $\frac{\partial \hat{H}}{\partial l} = 0$, entonces el Hamiltoniano es lineal en $l(t)$. De aquí:

$$l^* = 0 \quad \frac{\partial H}{\partial l} = 1500(1 - 0.005t) \frac{\pi\rho^2 d}{100(1 + \rho^2)} - C_m \pi\rho^2 d - C_p \frac{\pi\rho^2 d}{100(1 + \rho^2)} - v(t)$$

$$l^* = \text{indif} \quad \frac{\partial H}{\partial l} = 1500(1 - 0.005t) \frac{\pi\rho^2 d}{100(1 + \rho^2)} - C_m \pi\rho^2 d - C_p \frac{\pi\rho^2 d}{100(1 + \rho^2)} - v(t) \\ = 0$$

$$l^* = l_{\text{máx}} \quad \frac{\partial H}{\partial l} = 1500(1 - 0.005t) \frac{\pi\rho^2 d}{100(1 + \rho^2)} - C_m \pi\rho^2 d - C_p \frac{\pi\rho^2 d}{100(1 + \rho^2)} - v(t) \\ > 0$$

Para cada instante de tiempo se tiene:

$$\text{volumen máx de extracción [m}^3] = \frac{\text{capacidad máx de extracción [ton]}}{\text{densidad de material } \left[\frac{\text{ton}}{\text{m}^3} \right]}$$

$$\pi\rho^2 l_{\text{máx}} [\text{m}^3] = \frac{K [\text{ton}]}{d \left[\frac{\text{ton}}{\text{m}^3} \right]}$$

$$l_{\text{máx}} = \frac{K}{d\pi\rho^2} = \text{constante}$$

Entonces se explotan rebanadas cilíndricas equivalentes.

ii) (Ecuación de estado) $\dot{L} = -l(t)$.

iii) (Ecuación adjunta) $\dot{v} = rv - \frac{\partial \hat{H}}{\partial L}$. Con $\frac{\partial \hat{H}}{\partial L} = 0$ entonces $v(t) = v(0)e^{rt}$.

iv) (Transversalidad) $\hat{H}(T) = 0$. De donde:

$$1500(1 - 0.005t) \frac{\pi\rho^2 l(t)d}{100(1 + \rho^2)} - C_m \pi\rho^2 l(t)d - C_p \frac{\pi\rho^2 l(t)d}{100(1 + \rho^2)} - v(t)l(t)$$

Reemplazando la restricción minera en la ecuación (10.178), se tiene:

$$\begin{aligned} \max \int_0^T \{p(t)q(t)F(x, y, z) - C_m q(t) \\ - C_p F(x, y, z)q(t)\} e^{-rt} dt \quad \text{Max} \int_0^T \left\{ 1500(1 \right. \\ \left. - 0.005t) \frac{\pi\rho^2 l(t)d}{100(1 + \rho^2)} - C_m \pi\rho^2 l(t)d - C_p \frac{\pi\rho^2 l(t)d}{100(1 + \rho^2)} \right\} e^{-rt} dt \end{aligned}$$

De donde:

$$\begin{aligned} \max \int_0^T \left\{ 1500(1 - 0.005t) \frac{\pi\rho^2 \frac{K}{d\pi\rho^2} d}{100(1 + \rho^2)} - C_m \pi\rho^2 \frac{K}{d\pi\rho^2} d - C_p \frac{\pi\rho^2 \frac{K}{d\pi\rho^2} d}{100(1 + \rho^2)} \right\} e^{-rt} dt \\ \max \int_0^T \left\{ 1500(1 - 0.005t) \frac{K}{100(1 + \rho^2)} - C_m K - C_p \frac{K}{100(1 + \rho^2)} \right\} e^{-rt} dt \end{aligned}$$

Derivando con respecto a ρ e igualando a 0:

$$\begin{aligned} \int_0^T \frac{\partial}{\partial \rho} \left\{ 1500(1 - 0.005t) \frac{K}{100(1 + \rho^2)} - C_m K - C_p \frac{K}{100(1 + \rho^2)} \right\} e^{-rt} dt = 0 \\ \frac{-2\rho K}{100(1 + \rho^2)^2} \int_0^T \{1500(1 - 0.005t) - C_p\} e^{-rt} dt = 0 \\ \frac{-2\rho K}{100(1 + \rho^2)^2} \int_0^T \{1500(1 - 0.005t)e^{-rt} - C_p e^{-rt}\} dt = 0 \\ \frac{-2\rho K}{100(1 + \rho^2)^2} \int_0^T \{1500(1 - 0.005t)e^{-rt}\} dt - \int_0^T \{C_p e^{-rt}\} dt = 0 \end{aligned}$$

Reordenando términos:

$$\frac{K}{100} \frac{-2\rho}{(1 + \rho^2)^2} \int_0^T \{1500e^{-rt}\} dt = \int_0^T \{C_p e^{-rt}\} dt + \int_0^T \{0.005te^{-rt}\} dt$$

$$\frac{K}{100} \frac{-2\rho}{(1+\rho^2)^2} \left[-1500 \frac{e^{-rt}}{r} \Big|_{t=T; t=0} \right] = \left[-\frac{C_p e^{-rt}}{r} \Big|_{t=T; t=0} \right] + 0.005 \int_0^T \{te^{-rt}\} dt$$

$$\frac{K}{100} \frac{-2\rho}{(1+\rho^2)^2} \left[-1500 \frac{e^{-rt}}{r} + 1500 \frac{1}{r} \right] = \left[-\frac{C_p e^{-rt}}{r} + \frac{C_p}{r} \right] + 0.005 \int_0^T \{te^{-rt}\} dt$$

Siendo:

$$\int_0^T \{te^{-rt}\} dt = -\frac{(1+rt)e^{-rt}}{r^2} \Big|_{t=T; t=0}$$

$$\int_0^T \{te^{-rt}\} dt = -\frac{(1+rt)e^{-rt}}{r^2} + \frac{1}{r^2}$$

Entonces:

$$\frac{K}{100} \frac{-2\rho}{(1+\rho^2)^2} \left[-1500 \frac{e^{-rt}}{r} + 1500 \frac{1}{r} \right] = \left[-\frac{C_p e^{-rt}}{r} + \frac{C_p}{r} \right] + 0.005 \left[-\frac{(1+rt)e^{-rt}}{r^2} + \frac{1}{r^2} \right]$$

$$\frac{-\rho}{(1+\rho^2)^2} = \frac{\left[-\frac{C_p e^{-rt}}{r} + \frac{C_p}{r} \right] + 0.005 \left[-\frac{(1+rt)e^{-rt}}{r^2} + \frac{1}{r^2} \right]}{\left[-1500 \frac{e^{-rt}}{r} + 1500 \frac{1}{r} \right] \frac{K}{50}}$$

Problema 10.5

Considere un yacimiento homogéneo de un metal tal que la ley recuperable del mismo es 1% (es decir, por cada tonelada de material extraído en la mina el equivalente a 1% es recuperado durante el proceso productivo). Para caracterizar el yacimiento se considera un depósito de profundidad constante de 25 metros (según el eje z). En superficie el yacimiento puede representarse mediante un espacio bidimensional (x, y) , donde la distancia en dicho plano se mide en metros. La propiedad minera corresponde a un cuarto de hexágono regular de 10.000 metros, que en superficie ($z = 0$) está contenida entre los puntos $(0,0)$, $(5.000\sqrt{3}, 0)$, $(5.000\sqrt{3}, 5.000)$ y $(0,10.000)$.

Para efectos de la explotación del yacimiento se considera una capacidad de extracción de 40 millones toneladas de material por instante de tiempo (asuma que $t = 1$ es equivalente a 1 año). La densidad de material viene dada por 2,5 ton/m^3 . El costo de extracción es de 1 dólar la tonelada de metal por distancia (en metros) al eje y ($x = 0$), que es donde se ubica el tren que

realiza el transporte del mineral al puerto (el mineral no requiere de procesamiento metalúrgico una vez es extraído y el costo de transporte al puerto se puede considerar despreciable). Suponga que la empresa no tiene tasa de descuento y que estima que el precio del metal será de 6.000 dólares la tonelada, y que la extracción se debe realizar de forma que se extrae desde $x = 0$ avanzando en dirección del eje x en cada instante de tiempo, solo una vez se ha completado la extracción sobre todo el ancho del depósito según el eje y .

- Plantee el problema de optimización dinámica de la empresa asumiendo que la variable de control corresponde a la producción de metal en cada instante de tiempo. Asuma que el LOM de la mina es una variable endógena a determinar.
- Resuelva el problema anterior, encontrando el límite geométrico de la envolvente económica de la operación y el LOM (en años) de la mina. ¿Cuántas toneladas de metal serán extraídas en dicho LOM?
- Calcule el VAN óptimo de la operación y las reservas de mineral.

Solución

$$a) \quad \max_{q,T} \int_0^T (P - c) q(t) \text{ley}_{rec} dt$$

s. a.

$$\dot{S} = -q(t)$$

$$0 \leq q(t) \leq K$$

$$S(t), q(t), T \geq 0$$

b) Por control óptimo, el Hamiltoniano viene dado por:

$$H = Pq(t)\text{ley}_{rec} - cq(t)\text{ley}_{rec} + v(-q(t))$$

$$H = q(t)[(P - c)\text{ley}_{rec} - v]$$

Por el principio del máximo:

i) Condición del máximo:

$$\frac{\partial H}{\partial q} = 0$$

ii) Ecuación de estado:

$$\dot{S} = -q$$

iii) Ecuación adjunta:

$$\dot{v} = -\frac{\partial \hat{H}}{\partial S}$$

iv) Transversalidad:

$$\hat{H}(T) = 0$$

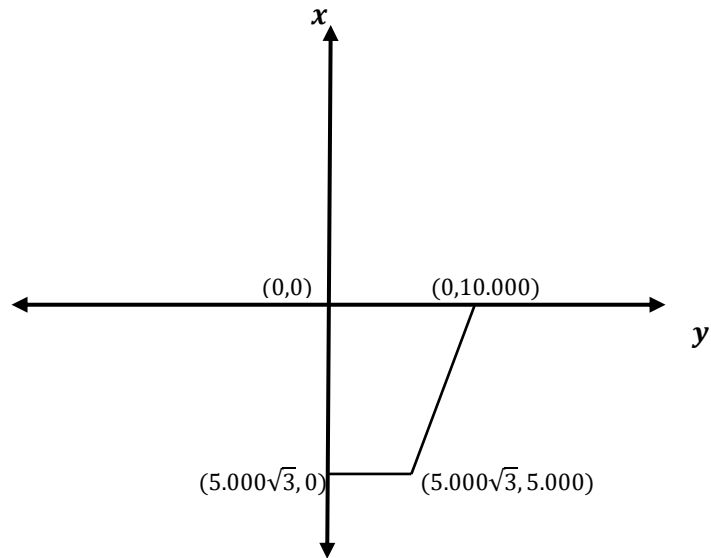
Como i) es lineal en la función $q(t)$, se tiene los siguientes casos:

- Si $[(P - c)ley_{rec} - v(t)] > 0$, es decir el coeficiente de $q(t)$ es positivo, entonces en orden de maximizar el Hamiltoniano, se debe elegir el máximo valor posible para $q(t)$ que en este caso es K (capacidad máxima).
- Si $[(P - c)ley_{rec} - v(t)] < 0$, es decir el coeficiente de $q(t)$ es negativo, entonces en orden de maximizar el Hamiltoniano, se debe elegir el mínimo valor posible para $q(t)$ que en este caso es 0 (no producir).
- Si $[(P - c)ley_{rec} - v(t)] = 0$, podría elegir cualquier valor posible para $q(t)$ (es decir, $q(t) \in [0, K]$).

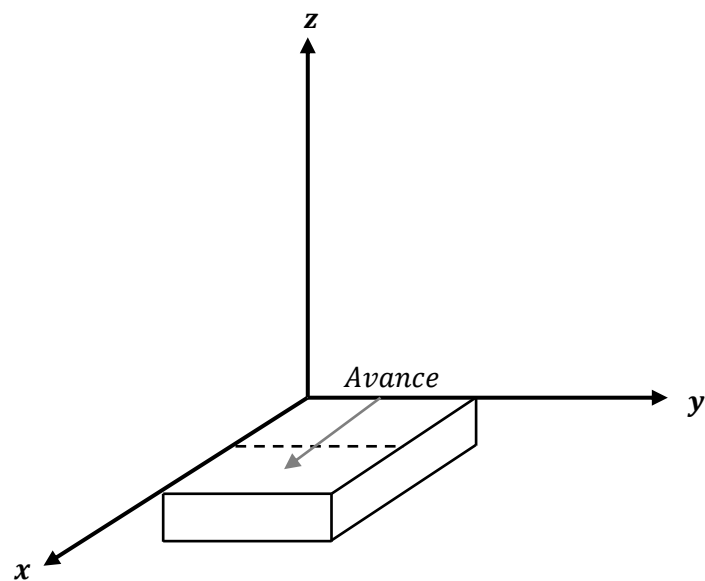
Luego, dado que se quiere producir, para que tenga sentido el problema planteado, es fácil ver que:

$$q^*(t) = \begin{cases} K & \text{si } t \leq T \text{ (LOM)} \\ 0 & \text{si } t > T \end{cases}$$

Del enunciado se sabe que se debe extraer en dirección del eje x una vez que se ha completado la operación sobre todo el ancho del depósito según el eje y . Dicha restricción se muestra a continuación:

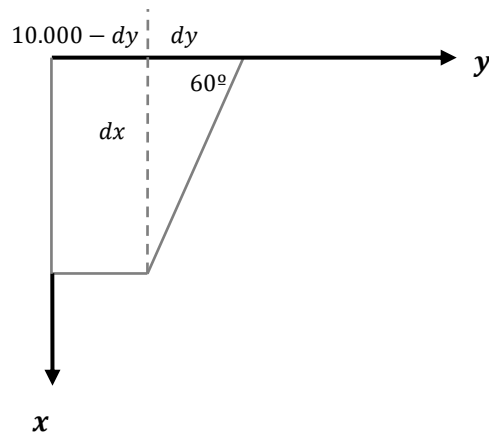


Vista en planta de la propiedad minera



Vista tridimensional del yacimiento

Recuerde que el ángulo que forma el hexágono regular con el eje y es de 60° y utilizando trigonometría se puede llegar a:



Relaciones trigonométricas del depósito

Donde se ha considerado que la variación de avance en el eje y es:

$$y = 10.000 - dy = 10.000 - \frac{dx}{\tan(60^\circ)}$$

Luego, a partir de esta restricción geométrica, determinaremos el LOM de la mina a partir de las restricciones de extracción y la conveniencia económica de extraer material. La extracción de material en un diferencial de tiempo viene dada por:

$$dq(t) = 2,5 \frac{\text{ton material}}{\text{m}^3} * dx(mt) [10.000(mt) - \frac{dx}{\sqrt{3}} (mt)] 25(m)$$

Extrayendo a máxima capacidad K (por lo planteado en las condiciones de control óptimo), se tiene que la cantidad de material extraído para un diferencial de desplazamiento en dirección del eje x es:

$$K dt = 2,5 dx [10.000 - \frac{dx}{\sqrt{3}}] \cdot 25$$

$$40.000.000 \frac{\text{ton mat}}{\text{año}} dt = 25 m \cdot [10.000 - \frac{dx}{\sqrt{3}}] m \cdot 2,5 \frac{\text{ton}}{\text{m}^3} \cdot dx (m)$$

Para determinar cuánto se avanza en dirección x por año, una vez se ha completado la extracción sobre todo el ancho del depósito según el eje y , se utiliza que:

$$\frac{dx}{dt} = 64.2382 \frac{m}{\text{año}}$$

Se quiere determinar una condición que permita saber cuánto avanzar sobre toda la vida económica de la mina. Esta se obtiene en la medida que la diferencia entre el precio unitario y el costo unitario sea mayor o igual a 0, es decir:

$$(P - c) \geq 0$$

$$\left(6.000 \frac{USD}{ton\ metal} - C \frac{USD}{ton\ metal} \right) \geq 0$$

$$C \leq 6.000 \frac{USD}{ton\ metal}$$

Como se busca el límite geométrico y sabiendo que el costo por cada tonelada de metal por cada metro de distancia al plano $x = 0$ es $1 \frac{USD}{ton\ metal\ m}$, entonces el límite está dado por:

$$x^* = 6.000\ m$$

Con los valores anteriores se obtiene el LOM de la mina:

$$T \cdot 64,2382 \frac{m}{año} = 6.000 \rightarrow T = 93,4\ años$$

Sólo resta obtener el valor de la cantidad de toneladas de metal obtenidas en el LOM de la mina:

$$93,4 \cdot 40.000.000 \cdot 0,01 \cdot 10^{-6} = 37,36\ millones\ de\ toneladas - metal$$

c) A partir de los valores y parámetros encontrados anteriormente se puede llegar a:

$$VAN = \int_0^{93,4} \left(6.000 \frac{USD}{ton\ metal} - 64,2382 \frac{m}{año} \cdot 1 \frac{USD}{ton\ metal\ m} \cdot t \right) 0,01 \cdot 40.000.000 dt$$

$$VAN = 1,87 \cdot 10^{11}\ USD$$

Capítulo 11: El problema de determinar la inversión óptima

En este capítulo se describen los conceptos que se deben considerar con objeto de determinar la inversión óptima en la industria minera. En particular, el problema a solucionar es la decisión de la capacidad de producción a instalar y cuánto debe ser el tamaño de la inversión asociada a la explotación del yacimiento. Para esto se describen los hechos estilizados que respaldan la importancia de esta decisión, la situación de la industria respecto a este tema, así como también dos diferentes enfoques con los que se puede abordar la solución del problema. Específicamente se detalla la teoría detrás de la resolución mediante el método de programación dinámica para encontrar el monto asociado a la inversión óptima de la explotación de un depósito mineral.

11.1 La inversión en minería

La inversión es un elemento crucial en la industria minera, ya que de ésta depende la realización de la mayoría de los proyectos mineros, sobre todo de la minería a gran escala, que domina gran parte de las industrias de minerales. Campbell (1980) fue el primero – según el conocimiento del autor – en incorporar al modelo propuesto por Hotelling una inversión inicial

asociada a los gastos correspondientes a infraestructura, equipos de extracción y procesamiento.

Las inversiones en minería tienen un carácter estratégico muy importante para las empresas, debido a que este sector productivo es en general intensivo en capital, además de que los ciclos o plazos de inversión son relativamente largos y una vez instalada la capacidad de producción esta actúa como un costo fijo muchas veces alto. Estas características mencionadas anteriormente corresponden a los llamados hechos “estilizados”, los que en economía se refieren a reglas empíricas que se han notado en la práctica, pero para los cuales no necesariamente existe una teoría robusta que los respalde.

11.1.1 Descripción de los “hechos estilizados”

A continuación se describen tres hechos estilizados de la minería en términos de la inversión en capital.

i. La minería es intensiva en capital

Para optar a instalar una capacidad de producción se debe invertir una gran cantidad de dinero. Muchas veces este termina actuando como una barrera de entrada para muchas compañías que de alguna u otra forma querrían participar en la explotación de un yacimiento. Las grandes inversiones a las que está sujeta la industria minera generan a su vez grandes barreras de entradas para el negocio. En el siguiente gráfico, obtenido del Consejo Minero (2016), se pueden observar los costos de inversión (CAPEX) por unidad de producción de cobre entre los años 2003 y 2015 para el caso de los proyectos en Chile.

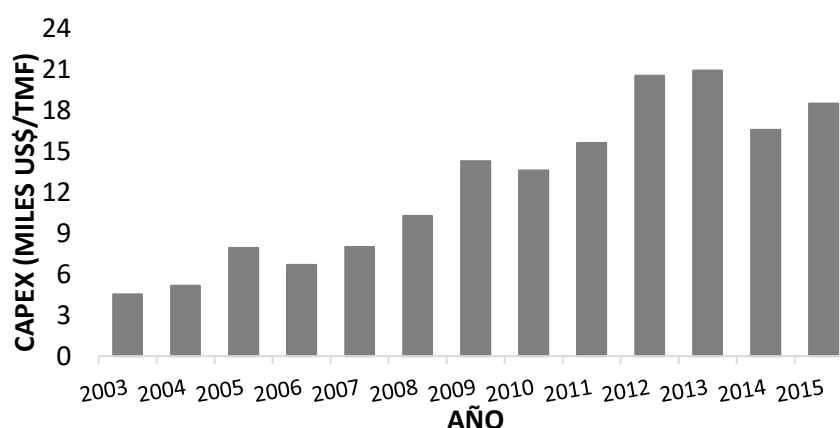


Figura 11.1. Evolución del costo unitario por toneladas métricas de cobre fino producido en Chile.

Fuente: Consejo Minero (2016)

En la Figura 11.1 se puede apreciar que existió un aumento de este costo unitario durante los primeros once años del periodo examinado (2003-2013). Sin embargo, para los últimos dos años este ha tendido a reducirse, alcanzando, por ejemplo, para el año 2015 un valor de 18.469 US\$/tmf.

La situación del resto de industrias de minerales es similar a la del cobre, como el autor ha podido comprobar para las industrias de la bauxita, el carbón o el hierro a nivel mundial. En general, se muestra una tendencia creciente desde 2003 a 2012 o 2013, y de ahí en adelante una disminución en el CAPEX unitario.

ii. En general, la presencia de costos fijos genera economías de escala

La elevada inversión en equipos mina y planta, así como también en infraestructura (por ejemplo, para trasladar el producto al puerto por medio de mineraductos, concentraductos, camiones, etc.), tiene asociado un costo fijo alto. Es decir, típicamente en minería la proporción del costo total que es costo fijo es significativa.⁵⁶ Esto induce a las empresas mineras a producir a su máxima capacidad para generar economías de escala. Económicamente esto se traduce en lo que se explicará según la función de costos como se presenta a continuación:

$$C(q) = cq + f \quad (11.1)$$

La ecuación (11.1) representa la función de costos, donde c corresponde al costo variable y f al costo fijo. De aquí, el costo medio por unidad producida o costo unitario de producción vendrá dado por:

$$\frac{C(q)}{q} = c + \frac{f}{q} \quad (11.2)$$

Al tratarse de un *commodity*, las empresas tendrán como objetivo minimizar su costo unitario de producción para ser competitivos. Como consecuencia, se buscará maximizar el q a producir, como una forma de aplicar economías de escala.

La implicancia de esto es que, por ejemplo, va a ser común ver que en las minas de cobre se esté produciendo a máxima capacidad. Esto se traduce en que tanto en la mina como en la

⁵⁶ El autor ha podido comprobar que en el caso de la industria del cobre el costo fijo puede representar alrededor del 40% de los costos totales, mientras que en el litio esta proporción es algo menor (30%-35%).

planta se opera al máximo de exigencia en términos de producir con toda la capacidad que es posible.

En algunas industrias de minerales la proporción de costos fijos es menor (o manejable debido a las modularidades de los procesos), tales como el caso del potasio o el hierro. En estos casos es común ver que la utilización de capacidad de planta sea significativamente menor al 95%-100%, que corresponde al rango de utilización en las industrias que operan a máxima capacidad.

iii. En minería, los ciclos de inversión son relativamente largos

El tercer hecho “estilizado” se refiere básicamente a que se requiere de mucho tiempo de flujo negativo, asociado a la inversión, antes de empezar a obtener flujos de caja positivos, periodo que está asociado a aquel donde se realiza la producción.

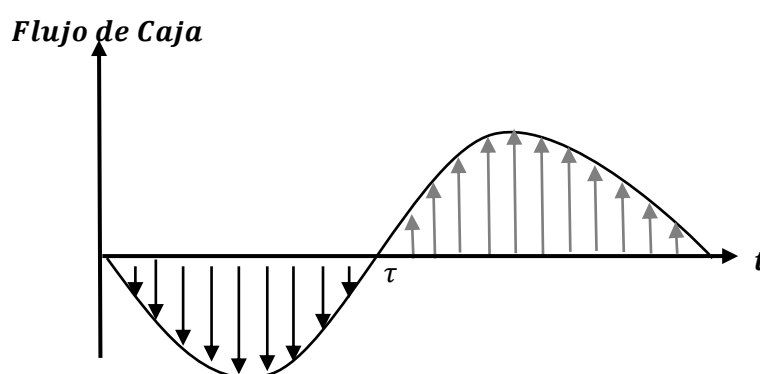


Figura 11.2. Ejemplo de flujo de caja típico para un proyecto en la industria minera

La Figura 11.2 representa una estructura de flujo de caja típico. En este se observa un tiempo τ que representa la cantidad de tiempo que demora en construirse la mina. Este valor eventualmente en minería puede ser significativo, al punto que, por ejemplo, en el caso de las minas a rajo abierto de *commodities* metálicos dicho tiempo puede alcanzar 2 a 3 años. En este periodo se realiza la compra de equipos mina, se desarrolla el *pre-stripping*, se instala la planta de procesamiento, etc. En el caso de los métodos subterráneos de explotación, la inversión puede extenderse incluso a más de 5 años, alcanzando en ciertos proyectos incluso a 10 años el periodo de inversión.

Existen otras industrias en las cuales el ciclo de inversión es bajo. Por ejemplo, en la industria bancaria los periodos de evaluación corresponden a meses y no años como en la industria minera.

En conclusión, la capacidad de extracción que se pretenda alcanzar en un proyecto minero tiene directa relación con la inversión realizada y la utilización de economías de escala. Puede ocurrir que un gran número de años después de la inversión inicial para que la empresa comience a tener flujos positivos, por lo que se considerará a la inversión en minería como una inversión con un ciclo largo, la que además puede considerarse irreversible parcial o completamente (Lasserre, 1985). Es decir, una vez realizada pasa a ser un costo hundido y no es posible recuperar (por ejemplo, mediante la venta de los activos que la componen).

11.1.2 Categorías de inversión en minería

Existen tres categorías en las que las empresas mineras pueden realizar inversiones asociadas a la explotación de minas.

La primera se denomina *redfield*, y está asociada a inversiones consideradas marginales que permiten liberar cuellos de botellas propios de la operación o extender la vida útil de una mina. Generalmente están asociados a optimizaciones o compra de equipos menores.

La segunda categoría se denomina *brownfield* y se refiere a expansiones de minas en operación. La mayoría de las inversiones en este tipo de proyectos están asociados aumentos de la capacidad de producción (ya sea en mina y/o planta). Generalmente lo que buscan es disminuir los costos unitarios, especialmente ante la caída de ley de los minerales que la mina explota.

En el caso en que la inversión se realice solo con el fin de lograr mantener la capacidad productiva de una operación o prolongar la vida útil de la mina, ya sea por ejemplo con nuevos desarrollos mineros, esta se considerará una inversión *brownfield* del tipo de reposición.

La tercera categoría está asociada a un proyecto de una nueva operación, la que se denomina *greenfield*. Este tipo de proyecto generalmente son más intensivos en capital inicial que un proyecto del tipo *brownfield* (debido por ejemplo a que es necesario invertir en toda la infraestructura requerida para operar), por lo que es necesario realizar inversiones mucho mayores, lo que conlleva a su vez un riesgo mayor por parte de la empresa.

11.2 Determinación de la capacidad de producción mediante planificación minera

En la sección anterior se mencionó que el problema de la determinación de la inversión óptima se encuentra estrechamente relacionado con el de la determinación de la capacidad de producción a instalar. El planificador minero busca generalmente⁵⁷ maximizar el *VAN* de la mina en la cual está trabajando.

El método de solución de este problema es básicamente uno de prueba y error, en el cual se construyen planes mineros a diferentes capacidades de producción, movimiento mina y procesamiento en planta. Luego, se determina el plan minero al cual se obtiene el máximo *VAN*. Esto se representa gráficamente en la Figura 11.5 que se presenta a continuación.

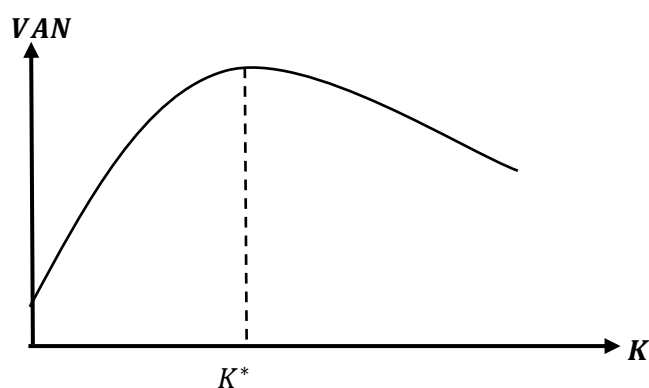


Figura 11.3. Obtención de capacidad óptima asociada a *VAN* máximo

La Figura 11.3 corresponde a una representación gráfica de lo que sería la función de *VAN* en términos de la capacidad de producción, es decir $VAN(K)$. Esto se realiza sobre un horizonte de largo plazo, por lo que para un determinado valor de K^* (que maximiza la función de *VAN*), se determinaría la capacidad a la cual explotar el yacimiento óptimamente.

Aunque este método de solución es simple desde el punto de vista conceptual, es tremendamente costoso de implementar en la práctica. Esto debido a que cada capacidad requiere de un plan de producción (con diseño) que debe ser valorado económicamente, lo que puede tomar desde algunas semanas a varios meses en producir. Con objeto de reducir la cantidad de escenarios a evaluar, se utiliza algunas veces (particularmente para estudios en etapa de perfil) la llamada Regla de Taylor, la que permite estimar el orden de magnitud de una

⁵⁷ Se dice generalmente, puesto que hoy en día, aún existen empresas mineras cuyos objetivos son otros, como minimizar costos o maximizar el precio de la acción, lo que no es necesariamente equivalente a maximizar el *VAN*. Para mayor detalle puede consultar el Capítulo 2.

mina en base a los recursos geológicos que posee. Mayores antecedentes de este método se describen en el Recuadro 11.1.⁵⁸

RECUADRO 11.1

DETERMINACIÓN DEL RITMO DE EXPLOTACIÓN ÓPTIMA EN PLANIFICACIÓN MINERA

En la literatura existen ciertos métodos empíricos para determinar el ritmo de producción óptima a partir de las reservas explotables de la mina. El primer método es conocido como la “Regla de Taylor” (Taylor, 1986). Este método calcula el ritmo de producción óptimo a partir de las reservas explotables de la mina mediante la siguiente expresión:

Regla de Taylor:

$$\text{Ritmo producción óptimo} \left(\frac{Mton}{\text{año}} \right) = 0,25 (\text{Reservas explotables (Mton)})^{0,75} * (1 \pm 0,2)$$

A pesar de ser una buena aproximación empírica, una gran crítica a esta fórmula es que no discrimina dependiendo del método de explotación utilizado.

El ingeniero canadiense Brian Mackenzie propuso en 1982 un modelo empírico con características similares a la Regla de Taylor, pero con ciertas modificaciones, como distinciones por método de explotación e intervalos de restricción para ritmos de producción óptimos. Esta regla viene dada por:

Regla de Mackenzie:

Minería Subterránea

$$\text{Ritmo producción óptimo} \left(\frac{ton}{\text{año}} \right) = 4,22 (\text{Reservas explotables (ton)})^{0,756}$$

Cuyos límites de aplicación son:

$$50.000 \left(\frac{Kton}{\text{año}} \right) \leq \text{Ritmo Anual} \leq 60.000 \left(\frac{Kton}{\text{año}} \right)$$

Minería Cielo abierto

⁵⁸ Para una revisión empírica de distintos métodos de estimación de capacidades de producción (en platino) se recomienda consultar Neingo *et al.* (2018).

$$\text{Ritmo producción óptimo } \left(\frac{\text{ton}}{\text{año}} \right) = 5,63 (\text{Reservas explotables (ton)})^{0.756}$$

Cuyos límites de aplicación son:

$$60.000 \left(\frac{\text{Kton}}{\text{año}} \right) \leq \text{Ritmo anual de estéril + mineral} \leq 200.000 \left(\frac{\text{Kton}}{\text{año}} \right)$$

$$30.000 \left(\frac{\text{Kton}}{\text{año}} \right) \leq \text{Ritmo anual de mineral} \leq 50.000 \left(\frac{\text{Kton}}{\text{año}} \right)$$

Si bien estas fórmulas son ampliamente utilizadas en ingenierías conceptuales o de perfil, no es claro qué datos las sustentan, ya que ninguno de los dos autores especifica la base estadística o el método que emplearon para obtenerlas. Es por esto que López (1986) decidió probar la validez de las ecuaciones para datos reales de las industrias del cobre, oro y plomo-zinc consultando un total de 114 minas para las cuales obtuvo un error cuadrático medio de 0,816.

11.3 Resolución del problema mediante optimización dinámica

Se debe recordar que en el mundo ideal de Hotelling no existían restricciones de capacidad. En la vida real, sin embargo, el dueño de la mina debe decidir cuánto será el nivel de capacidad de producción a instalar y, en particular, el monto asociado a la inversión de esta decisión. Es por esto que el problema a plantear conlleva encontrar en base a la capacidad, la producción y el LOM, el máximo VAN, el cual vendrá dado por la siguiente expresión:

$$\max_{K,q,T} VAN = -\Phi(K) + \int_{\tau}^T e^{-rt} (Pq - C(q, K)) dt \quad (11.3)$$

s. a.

$$S = -q \quad (11.4)$$

$$S(0) = S_0 \quad (11.5)$$

, donde τ corresponde al tiempo de construcción de la operación (instalación de capacidad), $\Phi(K)$ es la inversión asociada a la instalación de una capacidad K y $C(q, K)$ es la función de costos operacionales, la que depende tanto de la producción como de la capacidad de producción.

Para incorporar la restricción de capacidad de producción se suma una restricción adicional, la que viene dada por:

$$0 \leq q \leq K \quad (11.6)$$

Esta restricción se discutió por primera vez en el Capítulo 10.

Además de las restricciones (11.4)-(11.6) se debe considerar la no negatividad de las variables de capacidad y LOM:

$$K, T \geq 0 \quad (11.7)$$

11.3.1 Algunos comentarios asociados a las variables del problema

En primer lugar, se estudiará la función $\Phi(K)$. Campbell (1980) asume que el capital invertido no se deprecia en el tiempo, que la inversión es irreversible una vez realizada y que no tiene una cota superior. Nicholson (2001) ha podido comprobar empíricamente (respecto a la industria del cobre), que en el caso de estas dos variables se cumple la relación mostrada por la Figura 11.4, tanto para la función de inversión⁵⁹ como costos operacionales.

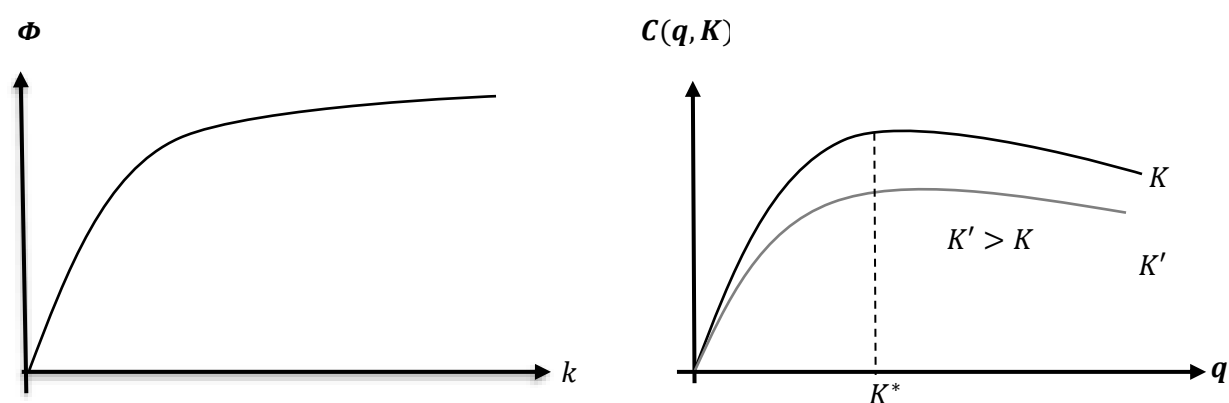


Figura 11.4. Representación gráfica de las funciones de inversión y costos para la minería del cobre. Fuente: Nicholson (2001)

⁵⁹ Aunque Auger y Guzmán (2010) muestran que esta relación sería lineal y no cóncava para un conjunto de 51 proyectos mineros de cobre. Esta relación lineal ha sido además comprobada en diferentes industrias de minerales a partir del artículo de Auger y Guzmán (2010), como por ejemplo tungsteno (Suárez et al., 2015).

Por medio de la figura anterior se puede apreciar que ambas funciones $\Phi(K)$ y $C(q, K)$ se anulan en $K = 0$, pero luego rápidamente crecen y tienden a ser cóncavas y de hecho alcanzan un máximo en K^* . En economía, esto se conoce como economía de escala.⁶⁰

Por otro lado, se puede notar que la integral que representa la suma de los flujos de caja descontados tiene como límite inferior y superior τ y T , respectivamente. El primero corresponde al tiempo de construcción o que se demora en realizar la inversión para luego comenzar a operar, mientras que el segundo es el LOM de la mina.

11.3.2 Metodología de resolución del problema

Es claro que el problema planteado se caracteriza por ser más realista, en el sentido de que cuando se tiene un recurso minero, precisamente se debe decidir la capacidad de producción (K), el nivel de producción (q), y cuánto va a durar la mina económica de la mina (T). La pregunta clave es ¿cómo se resuelve este problema?

Es importante entender que la empresa minera en realidad se enfrenta a un problema en el cual debe resolver de forma simultánea las variables de control (q, K, T). Sin embargo, es posible descomponer el problema en dos partes: En uno inicial y uno secuencial al primero.

En el problema inicial, la empresa decide cuánta capacidad instalar (esto es, K). Una vez que dicha capacidad de ha seleccionado, en cada instante de tiempo deberá cuestionarse a qué nivel producir y durante cuánto tiempo, en ambos casos tomando como hundida la capacidad instalada. Nótese que es precisamente la irreversibilidad de la decisión de la capacidad a instalar lo que hace que esta sea la primera variable a determinar en el tiempo.⁶¹

Los dos problemas así descritos (en un primer periodo encontrar K y luego, dado dicho valor, en un segundo periodo encontrar q y T) se encuentran temporalmente interrelacionados, por lo que no pueden tratarse de forma independiente. Debe reconocerse entonces que el problema completo es uno de optimización dinámica, ya que la capacidad que se define en el primer

⁶⁰ Se dice que existen economía de escala en la producción cuando al aumentar la capacidad en un cierto porcentaje, la inversión aumenta menos que proporcionalmente. Este supuesto es ampliamente utilizado a nivel de evaluación de proyectos mineros, y a juicio del autor en muchos casos se exagera la importancia que tiene la economía de escala a nivel de inversión.

⁶¹ Tanto la producción (q) como el LOM (T) son variables reversibles pues en cada instante de tiempo se pueden modificar dichos valores.

período va a influir en el resultado del segundo y por lo tanto si se quiere maximizar el VAN total, no se puede derivar sin considerar necesariamente la decisión que se tomará a continuación respecto a q y T .

Esta descomposición fue desarrollada por Campbell (1980), quien dentro de sus principales conclusiones postuló que las empresas mineras tenderían a tener una tasa de extracción constante durante la mayor parte de la vida del proyecto tras realizar una inversión inicial, debido a que es costoso generar capacidad ociosa (a diferencia de los otros modelos como los de Paish (1938) o Bradley (1973), que solo consideraban un costo variable por extracción). Esto será comprobado mediante la resolución del problema de determinación de la inversión óptima que se presenta en la siguiente sub-sección.

11.3.3 Resolución del problema

La resolución de este problema contempla considerar dos periodos que se encuentran interrelacionados temporalmente tal como se explicó anteriormente. La Figura 11.5 representa gráficamente esto.

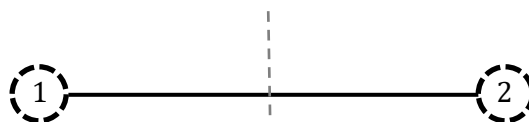


Figura 11.5. Representación gráfica temporal del problema

Esta figura representa una línea de tiempo en la cual se tiene un periodo uno y ligado a este, se tiene un segundo periodo. Será este último el cual será considerado para resolver óptimamente el problema, es decir, como se puede observar en la Figura 11.5 se estará resolviendo el óptimo para el segundo periodo. Esto es posible dada la naturaleza del problema, dado que el fundamento utilizado detrás de esto es el principio de optimalidad de Bellman.⁶² A continuación se puede utilizar la solución obtenida en el segundo periodo para resolver el primer periodo y obtener los resultados óptimos desde aquí en adelante.⁶³

⁶² El lector debe recordar que este dice que, para que la solución sea óptima, se necesita que sea óptima independiente del periodo en el que se inicie el análisis.

⁶³ Este procedimiento de resolver desde el último período y devolverse con esa solución a los periodos anteriores, que en este caso está representado solamente en dos periodos, se conoce como inducción hacia atrás o *backward induction* en inglés.

Entonces, lo que se debe realizar es básicamente plantear el problema único en dos partes distintas. En primer lugar, el problema del periodo 2 viene dado por:

$$\max_{q,T} \int_{\tau}^T e^{-rt} (Pq - C(q, K)) dt \quad (11.8)$$

s. a.

$$\dot{S} = -q \quad (11.9)$$

$$S(0) = s_0 \quad (11.10)$$

$$0 \leq q \leq K \quad (11.11)$$

$$T \geq 0 \quad (11.12)$$

El problema (11.8)-(11.12) describe el problema que debe resolver la mina una vez ha tomado la decisión de construir una capacidad K (la que se considera irreversible).

Para resolver este problema se hará uso del control óptimo, con el cual se podrán obtener las ecuaciones que deben satisfacer q y T . Para esto es necesario definir el Hamiltoniano en valor corriente asociado al problema:

$$\hat{H} = Pq - C(q, K) + v(-q) + w(K - q) \quad (11.13)$$

Se puede notar que aparece una nueva variable w , la cual está asociada a la nueva restricción en desigualdad que involucra la variable de control q , y que será dependiente del tiempo. Este corresponde a un multiplicador de Karush-Kuhn-Tucker, el cual representa el valor marginal en el tiempo t de un momento de relajación de la restricción de la capacidad (Campbell, 1980).

Luego, por el principio del máximo:

- i. Condición del máximo: \hat{H} cóncava en q .

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial q} = 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial^2 \hat{H}}{\partial q^2} < 0 \quad (11.14)$$

De esta condición se obtiene que:

$$P - C_q(q, K) - v - w = 0 \quad (11.15)$$

- ii. Ecuación de estado:

$$\dot{s} = -q \quad (11.16)$$

iii. Ecuación adjunta:

$$\dot{v} = r * v - \frac{\partial \hat{H}}{\partial s} \quad (11.17)$$

En este problema, este último término es cero, por lo que realmente, si se tiene una ecuación de este estilo, se va a tener simplemente que:

$$v = v_0 e^{rt} \quad (11.18)$$

iv. Ecuación de transversalidad:

$$\hat{H}|_{t=T} = 0 \quad (11.19)$$

Se considera esta ecuación dado que la variable T es exógena.

v. Condición de Karush-Kuhn-Tucker (KKT):

$$w \geq 0 \wedge w(k - q) = 0 \quad (11.20)$$

Nótese que esta corresponde a una nueva condición, válida únicamente cuando existen restricciones en desigualdad como la dada en (11.11). En el caso de que esta restricción se encuentre activa, se cumple entonces la igualdad, es decir $(K - q) = 0$, por lo que w puede ser positivo. Cuando la restricción se encuentra inactiva, se cumple entonces la desigualdad estricta, es decir, $q < k$. Esto conlleva a que necesariamente $w = 0$.

La resolución del problema planteado (11.8)-(11.12) puede representarse gráficamente según la Figura 11.6. En esta queda en evidencia la característica propia del problema en dos etapas, cuya división en el tiempo queda establecido por la variable T_1 , la que separa el régimen de extracción constante (a máxima capacidad) del régimen variable (decreciente).⁶⁴

⁶⁴ En la literatura técnica se conoce a este segundo periodo de producción decreciente como *ramp-down*.

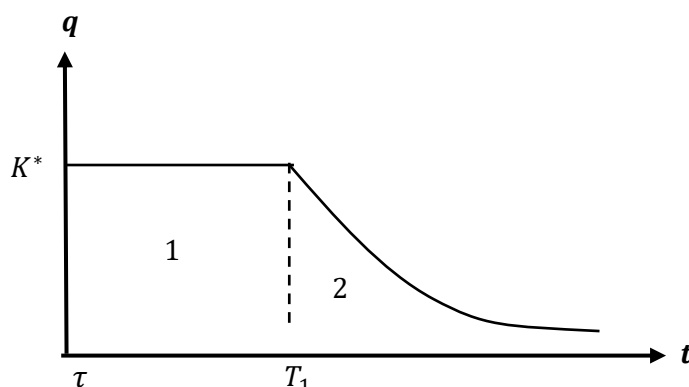


Figura 11.6. Representación gráfica del problema en dos etapas.

Fuente: Campbell (1980)

Esta figura muestra como varía la producción en el tiempo, asumiendo ciertas condiciones de regularidad económicas simples. Si la inversión es costosa, en el óptimo se intentará usar esta restricción, por lo que la condición estará activa. Esto implicará entonces que, en un principio, siempre se intentará producir a máxima capacidad (i.e., K). Pero inevitablemente llegará el tiempo T_1 , en el que no va a ser posible ocupar toda la capacidad de producción (por ejemplo, no se llena la planta) y por lo tanto la producción comenzará a caer. En este segundo régimen w toma valor cero, pues la restricción se encuentra inactiva.

En consecuencia, de la resolución del problema surge una nueva incógnita (T_1), por lo que se necesitará una nueva condición, dada por:

vi. Condición de agotabilidad:

$$K(T_1 - \tau) + \int_{T_1}^T q_2(s) ds = S_0 \quad (11.21)$$

Esta condición explica que se asume que el precio es mayor al costo, por lo que el recurso se explotará hasta que se acabe, es decir hasta S_0 . La ecuación (11.21) representa el área bajo la curva que se representa en la Figura (11.6).

En conclusión, el problema planteado en el periodo 2 deriva en la necesidad de resolver un sistema formado por seis incógnitas, de las cuales solamente tres se encuentran asociadas al problema inicial, mientras que las restantes (v , w y T_1) surgen como parte de la solución. La determinación efectiva de estas 6 incógnitas requiere entonces de 6 ecuaciones (algunas de las cuales son diferenciales).

La solución se obtendrá de resolver el sistema, para el cual tres ecuaciones (11.15), (11.16) y (11.17) representan ecuaciones diferenciales ordinarias, cuyas soluciones corresponderán a funciones. Por su parte, las condiciones (11.19) y (11.21) son ecuaciones algebraicas, con lo que conocido q y \hat{H} , básicamente se evalúa su valor y se determina una ecuación algebraica, lo que tiene sentido dado que T_1 y T son parámetros. Finalmente, condición (11.20) es una ecuación funcional, cuya solución también es una función.

Nótese que la solución general del sistema así planteado no se puede obtener, a menos que se especifiquen las funciones y parámetros del problema (en cuyo caso además es muy probable se requieran métodos numéricos para derivar su solución). Aun así, es simple notar que como en general K es parte de las ecuaciones a resolver, entonces también las incógnitas del problema del periodo 2 deberán escribirse como una función de K .

Una vez que se obtiene la solución del periodo 2, el paso siguiente es resolver el periodo 1. Para esto es necesario plantear el problema a solucionar en dicho periodo, el cual viene dado por:

$$\max_K \left\{ -\Phi(k) + \int_{\tau}^{T_1(K)} e^{-rt} (pK - C(K, K)) dt + \int_{T_1(K)}^{T(K)} e^{-rt} (pq_2(K) - C(q_2(K), K)) dt \right\} \quad (11.22)$$

s. a.

$$K \geq 0 \quad (11.23)$$

El problema correspondiente periodo 1, representa un problema de optimización estática, el cual se resuelve derivando la función dentro del operador de maximización e igualando dicha derivada a cero. Es necesario recordar que en este periodo se considera que las soluciones obtenidas para las incógnitas T_1 , q_2 y T en el periodo 2 dependerán en general de K . Por esto, se debe poner especial cuidado al momento de derivar la función a maximizar respecto a la variable K (utilizando la regla de la cadena cuando corresponda).

Nótese que esto tiene sentido en la práctica, pues si se instala una capacidad K grande, entonces T_1 va a tender a disminuir. Lo mismo ocurre con T , pues el LOM de la mina se reduce en el caso que se tengan capacidades de procesamiento muy altas.

Finalmente, el problema se reduce a lo siguiente:

$$\frac{d\Psi(K)}{dK} = 0 \quad (11.24)$$

En esta ecuación, $\Psi(K)$ representa la función a maximizar, entre llaves en la ecuación (11.22). Esta función está compuesta por una suma de integrales, las cuales al ser interpretadas representan la suma de los flujos de caja mientras se está produciendo a máxima capacidad y cuando se produce a una capacidad menor, respectivamente, por lo que, al derivar, será necesario utilizar la regla de Leibniz⁶⁵ para derivación de integrales. De aquí, (11.24) se puede escribir como:

$$\begin{aligned} & -\Phi'(K) + e^{-rT_1(K)}(PK - C(K, K))\frac{dT_1}{dK} + \int_{\tau}^{T_1(K)} e^{-rt} \left(P - \frac{\partial C(K, K)}{\partial K} \right) dt + \\ & e^{-rT(K)} \left(Pq_2(K) - C(q_2(K), K) \frac{\partial T}{\partial K} \right) - e^{-rT_1(K)}(Pq_2(K) - C(q_2(K), K))\frac{\partial T_1}{\partial K} + \\ & \int_{T_1(K)}^{T(K)} e^{-rt} \left(P \frac{\partial q_2}{\partial K} - C_{q_2}(q_2, K) \frac{\partial q_2}{\partial K} - C_K(q_2, K) \right) dt = 0 \end{aligned} \quad (11.25)$$

El valor de K así derivado será aquel que maximiza el VAN considerando la inter-temporalidad en las decisiones de los periodos 1 y 2. Lo anterior es posible dado el K que maximiza el VAN, este se introduce en las soluciones del periodo 2, con el cual se obtiene el valor de la producción y LOM óptimo.

La ecuación (11.25) se puede interpretar económicamente como una ecuación de balance, en la cual es posible derivar la capacidad de producción óptima como aquella en la que la una unidad de capacidad adicional igual la inversión marginal con el VAN marginal que dicha unidad aporta. A partir de esta ecuación se puede establecer que cuando la inversión comienza a ser un poco más cara, en términos marginales, respecto a la utilidad marginal que se obtendría a partir de ella, entonces no se querrá invertir más. Esto se puede explicar gráficamente por medio de las curvas que se presentan en la Figura 11.7.

⁶⁵ La regla de Leibniz es la siguiente:

$$\frac{d}{d\alpha} \int_{f(\alpha)}^{g(\alpha)} h(\alpha, x) dx = h(\alpha, g(\alpha))g'(\alpha) - h(\alpha, f(\alpha))f'(\alpha) + \int_{f(\alpha)}^{g(\alpha)} \frac{\partial}{\partial \alpha} h(\alpha, x) dx$$

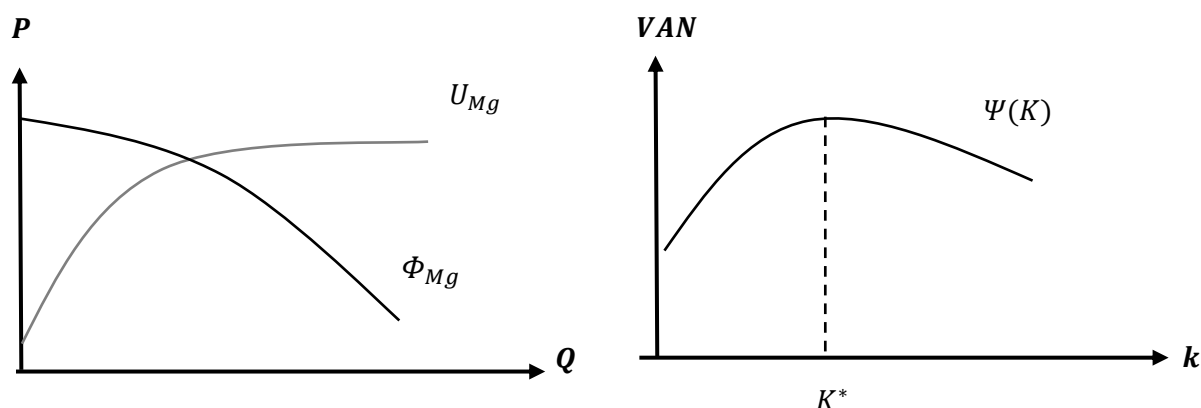


Figura 11.7. Generación de la curva $\Psi(K)$ de a partir de la utilidad e inversión marginal

La Figura 11.7 muestra la construcción de la curva como si esta se hubiese generado como la suma de una curva que va subiendo U_{Mg} (utilidad marginal, es decir, la suma de las dos integrales derivadas) con otra que va bajando Φ_{Mg} (la inversión marginal). De aquí, la inversión que optimiza la suma de los flujos de caja descontados corresponde a la resta de ambas funciones, lo que se esquematiza en el gráfico de la derecha de la Figura 11.7.

Debe notarse que comparando esto con lo que se realiza al momento de hacer planificación minera (prueba y error como lo muestra la Figura 11.3), no existe ninguna diferencia, pues el planificador minero toma un K , y dado dicho valor construye el mejor plan minero, obteniendo de esta forma el VAN máximo para dicha capacidad. Luego repite este proceso para distintos valores de K . Aunque lo derivado aquí no es distinto en principio, permite eliminar la etapa de tanteo a la que está acostumbrada la planificación minera (aunque esto solo a nivel conceptual, pues la solución práctica involucra iterar numéricamente).

11.4 Problemas resueltos

Problema 11.1

Considere una empresa minera que desea explotar un yacimiento *greenfield* de un metal, y para el cual existe un costo marginal constante de producción dado por $c > 0$. La empresa ha firmado acuerdos con clientes que le garantizan un precio de venta del *commodity* de $P(t)$ en el instante de tiempo t , tal que $P(t) > c$ en todo instante t . Asuma que la tasa de descuento de la empresa es r y que las reservas del *commodity* son conocidas en $t = 0$ e iguales a S_0 . La inversión

necesaria para instalar una capacidad de producción K del metal viene dada por la función $\phi(K) = \alpha K$ y la construcción de la mina y planta se asume instantánea.

- Plantee el problema de optimización dinámica de la empresa asumiendo que la variable de control corresponde a la producción del *commodity* en cada instante de tiempo. Asuma que tanto el LOM de la mina como la capacidad de producción son variables endógenas del problema.
- Resuelva el problema de la empresa una vez que ha instalado su capacidad de producción, encontrando así el VAN óptimo durante la vida de la mina.
- Plantee la ecuación que debe satisfacer la capacidad de producción óptima a instalar por la empresa.

Solución

- a) El problema de optimización queda determinado por:

$$\max_{T, K, q(t)} -\phi(K) + \int_0^T e^{-rt} (P(t)q(t) - cq(t)) dt$$

s. a.

$$\dot{S} = -q$$

$$0 \leq q \leq K$$

$$S(0) = S_0$$

$$T, K \geq 0$$

- b) Periodo 2. Dado un K conocido:

$$\max_{T, q(t)} \int_0^T e^{-rt} (P(t)q(t) - cq(t)) dt$$

s. a.

$$\dot{S} = -q$$

$$0 \leq q \leq K$$

$$S(0) = S_0$$

$$T, K \geq 0$$

Se define el Hamiltoniano en valor corriente como:

$$\hat{H} = P(t)q(t) - cq(t) + v(-q(t)) + \lambda(K - q)$$

Se puede observar que el Hamiltoniano es lineal en $q(t)$, en consecuencia la solución se encontrará en un extremo. Es decir:

$$P(t) - C > 0 \rightarrow q^*(t) = K$$

$$P(t) - C < 0 \rightarrow q^*(t) = 0$$

$$P(t) - C = 0 \rightarrow \text{indiferente}$$

Por enunciado se sabe que:

$$P(t) - C \geq 0 \quad \forall t$$

Luego la producción óptima vendrá dada por:

$$q^*(t) = K$$

Esto se puede interpretar que como siempre el precio será mayor al costo, convendrá producir a la máxima capacidad posible K para todo t .

Luego para calcular el LOM de la mina se tiene:

$$T = \frac{S_0}{K}$$

La función del VAN en función de K viene dada por:

$$VAN^*(K) = \int_0^T e^{-rt} (P - C) K dt$$

Integrando y reemplazando en la ecuación del LOM se obtiene:

$$VAN^*(K) = K (P - C) \frac{1 - e^{-(rS_0)/K}}{r}$$

c) Periodo 1. Se busca resolver el siguiente problema:

$$\max_K -\alpha K + VAN^*(K)$$

Pero como se conoce el valor del $VAN^*(K)$ obtenido en el periodo 2, se tiene que:

$$\pi = \max_K -\alpha K + K(P - C) \frac{1 - e^{-(rS_0)/K}}{r}$$

Para encontrar el óptimo basta con derivar con respecto a K e igualar a cero:

$$\begin{aligned} \frac{d\pi}{dK} &= -\alpha + (P - C) \frac{1 - e^{-\frac{rS_0}{K}}}{r} + (P - C) K \left(\frac{-S_0 e^{-\frac{rS_0}{K}}}{K^2} \right) \\ -\alpha + (P - C) \frac{1 - e^{-\frac{rS_0}{K}}}{r} + (P - C) K \left(\frac{-S_0 e^{-\frac{rS_0}{K}}}{K^2} \right) &= 0 \end{aligned}$$

Como es una expresión muy difícil de despejar, se puede llegar al valor de K que satisface la igualdad mediante iteraciones al tener todos los parámetros dados.

Problema 11.2

Resuelva el siguiente problema de inversión óptima mediante el método de control óptimo. La inversión necesaria para instalar una capacidad de producción K del metal viene dada por la función $(K) = \alpha K$. La construcción de la mina y planta se asume instantánea. Asuma que la tasa de descuento de la empresa es r y que las reservas del *commodity* son conocidas en $t = 0$ e iguales a S_0 .

$$\max_{q(t), T, K} V\dot{A}N(q(t)) = -\alpha K + \int_{\tau}^T e^{-rt} (1 - e^{-aq(t)}) dt$$

s. a.

$$\dot{S}_t = -q(t)$$

$$0 \leq q(t) \leq K$$

$$K \geq 0$$

$$S(0) = S_0$$

Solución

En primer lugar, se debe resolver el periodo 2 del problema, asumiendo que la capacidad K es conocida:

$$\max_{q(t), T} \int_{\tau}^T e^{-rt} (1 - e^{-aq(t)}) dt$$

$$\text{s. a} \quad \dot{S}_t = -q(t)$$

$$0 \leq q(t) \leq K$$

$$S(0) = S_0$$

Se define el Hamiltoniano en valor corriente:

$$\hat{H}(q, S, t) = 1 - e^{-\frac{1}{2}q(t)} - vq(t) + \lambda(K - q(t))$$

i) Condición del máximo:

$$\text{Condición de primer orden: } \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}q(t)} - v - \lambda = 0$$

$$\text{Condición de segundo orden: } -\frac{1}{4} e^{-\frac{1}{2}q(t)} < 0$$

ii) Ecuación de estado:

$$\dot{S} = -q$$

iii) Ecuación adjunta:

$$\dot{v} = rv - \frac{d\hat{H}}{dS}$$

$$v(t) = v_0 e^{rt}$$

iv) Transversalidad:

$$\hat{H}(T) = 0$$

v) KKT:

$$\lambda \geq 0$$

$$\lambda(K - q) = 0$$

Se sabe que en $t \in [0, T_1]$ la producción será constante e igual a la máxima capacidad de planta K . Esto es, $q(t) = K$. Luego, se tiene:

$$q(t) = \begin{cases} K & \text{si } t < T_1 \\ q(t) & \text{si } T_1 < t < T \end{cases}$$

$$\lambda(t) = \begin{cases} \lambda(t) & \text{si } t < T_1 \\ 0 & \text{si } T_1 < t < T \end{cases}$$

Entonces, para $t \in [T_1, T]$ se tiene que:

$$\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}q(t)} - v = 0$$

De donde se obtiene que:

$$e^{-\frac{1}{2}q(t)} = 2v$$

$$q(t) = -2 \ln(2v) = -2 \ln(2v_0 e^{rt})$$

Específicamente, se sabe que en $t = T_1$:

$$q(T_1) = K = -2 \ln(2v_0 e^{rT_1})$$

En donde:

$$-\frac{K}{2} = \ln(2v_0 e^{rT_1})$$

$$v_0 = \frac{1}{2}e^{-\left(\frac{K}{2} + rT_1\right)}$$

De esta forma:

$$q(t) = -2 \ln(2v) = -2 \ln\left(2 \frac{1}{2} e^{-\left(\frac{K}{2} + rT_1\right)} e^{rt}\right)$$

$$q(t) = -2\left(rt - \frac{K}{2} - rT_1\right)$$

Por condición de transversalidad:

$$\hat{H}(T) = 1 - e^{-\frac{1}{2}q(T)} - v(T)q(T) = 0$$

$$1 - e^{(rt - \frac{K}{2} - rT_1)} + e^{(rT - \frac{K}{2} - rT_1)} \left(rt - \frac{K}{2} - rT_1 \right) = 0$$

Factorizando,

$$1 + e^{(rt - \frac{K}{2} - rT_1)} * \left[\left(rt - \frac{K}{2} - rT_1 \right) - 1 \right] = 0$$

Finalmente, se debe cumplir que:

$$S_0 = K(T_1 - \tau) + \int_{T_1}^T q(t) dt$$

$$S_0 = K(T_1 - \tau) + \int_{T_1}^T -2 \left(rt - \frac{K}{2} - rT_1 \right) dt$$

$$S_0 = K(T_1 - \tau) - \int_{T_1}^T (2rt - K - 2rT_1) dt$$

$$S_0 = K(T_1 - \tau) - [r(T - T_1)^2 + K(T_1 - T)]$$

$$S_0 = K(T_1 - \tau - T_1 + T) - r(T - T_1)^2$$

$$S_0 = K(T - \tau) - r(T - T_1)^2$$

Luego, con las ecuaciones anteriores es posible formar un sistema de 3 ecuaciones algebraicas para 3 incógnitas: v_0, T_1, T . Resolviendo a través de Maple, se puede llegar a los valores de $v_0(K), T_1(K), T(K)$.

Luego, se resuelve el periodo 1 del problema:

$$\max_K -4K + \int_3^{T_1(K)} e^{-rt} \left(1 - e^{-\frac{1}{2}K} \right) dt + \int_{T_1(K)}^{T(K)} e^{-rt} \left(1 - e^{rt - \frac{K}{2} - rT_1} \right) dt$$

Dado que se busca maximizar respecto a un valor, se debe derivar la expresión anterior respecto a K e igualar a 0.

Utilizando un *software* especializado (Maple en este caso) se puede obtener la solución numérica del problema. En este caso:

$$K = 1,27$$

$$T_1 = 75,4$$

$$T = 88,1$$

$$VAN^* = 2,856$$

Problema 11.3

Una empresa está buscando realizar un proyecto minero en un yacimiento que se conoce contiene S_0 unidades del *commodity* mineral de interés. Luego de un estudio de ingeniería la empresa ha determinado que la inversión de capital en $t = 0$ requerida para una capacidad de K viene dada por $\phi(K) = \alpha K^\beta$, con $\alpha > 0$ y $0 < \beta < 1$. Por otro lado, se ha determinado que, debido a la presencia de economías de escala, el gasto total asociado a una producción q del *commodity* mineral vendrá dado por: $C(q, K) = \frac{c}{2} e^{-K} q^2$. La empresa posee una tasa de descuento r y el precio esperado $P(t)$ es constante e igual a P_0 para todo t .

- Plantee el problema anterior, especificando las variables, función objetivo y restricciones que deben considerarse para determinar la producción óptima en cada instante de tiempo, la capacidad a instalar en $t = 0$ y el LOM de la operación.
- Para el caso en que $\alpha = 1$, $\beta = 0,5$, $c = 2$, $r = 5\%$ y $P_0 = 2$. Determine numéricamente la producción óptima en cada instante de tiempo, capacidad a instalar y LOM.

Solución

- El problema queda definido como:

$$\max_{q(t), T, K} -\alpha K^\beta + \int_0^T e^{-rt} \left(P_0 q - \frac{C}{2} e^{-K} q^2 \right) dt$$

s. a.

$$0 \leq q \leq K$$

$$\dot{S} = -q$$

$$S(0) = S_0$$

$$T, S, K, \alpha \geq 0$$

$$0 < \beta < 1$$

b) Dado los valores de α, β, c, r y P_0 :

Lo primero es resolver el periodo 2 del problema planteado. Esto es, dado una capacidad de procesamiento K , determinar $q(t)$ y T .

$$\max_{q(t), T} \int_0^T e^{-rt} \left(P_0 q - \frac{C}{2} e^{-K} q^2 \right) dt$$

s. a.

$$0 \leq q \leq K$$

$$\dot{S} = -q$$

$$S(0) = S_0$$

$$T, S, \geq 0$$

Se Plantea el Hamiltoniano en valor corriente:

$$\hat{H}(q, S, t) = P_0 q - \frac{C}{2} e^{-K} q^2 + v(-q) + \lambda(K - q)$$

$$\hat{H}(q, S, t) = 2q - e^{-K}q^2 + v(-q) + \lambda(K - q)$$

Por condición del máximo:

$$2 - 2e^{-K}q - v - \lambda = 0$$

$$v = 2 - 2e^{-K}q - \lambda$$

Mientras que la ecuación de estado queda:

$$\dot{S} = -q$$

A su vez, la ecuación adjunta es:

$$\dot{v} = rv \rightarrow v(t) = v_0 e^{rt}$$

Las condiciones de transversalidad y KKT en este caso son:

$$\hat{H}(T) = 0$$

$$\lambda \geq 0$$

$$\lambda(K - q) = 0$$

Luego, se tiene que:

$$q(t) = \begin{cases} K & \text{si } t < T_1 \\ q(t) & \text{si } T_1 < t < T \end{cases}$$

$$\lambda(t) = \begin{cases} \lambda(t) & \text{si } t < T_1 \\ 0 & \text{si } T_1 < t < T \end{cases}$$

Entonces, para $t \in [T_1, T]$ en (1) se obtiene que:

$$2 - 2e^{-K}q - v = 0$$

$$q(t) = \frac{(2 - v_0 e^{rt}) e^K}{2}$$

Ahora, como:

$$q(T_1) = K = \frac{(2 - v_0 e^{rT_1}) e^K}{2}$$

De donde:

$$v_0 = (2 - 2Ke^{-K})e^{-rT_1}$$

Asimismo, se sabe que por la condición de transversalidad:

$$\hat{H}(T) = 2q(T) - e^{-K}q^2(T) - v(T)q(T) = 0$$

Finalmente:

$$S_0 = KT_1 + \int_{T_1}^T q(t) dt$$

$$S_0 = KT_1 + \int_{T_1}^T \frac{(2 - v_0 e^{rt}) e^K}{2} dt$$

$$S_0 = KT_1 + \int_{T_1}^T (e^K - (1 - Ke^{-K})e^{r(t-T_1)+K}) dt$$

Con estas ecuaciones se tiene un sistema de 3 ecuaciones algebraicas para 3 valores (v_0, T_1, T) .

Ahora, resolviendo el periodo 1, se tiene:

$$\begin{aligned} \max_K -\sqrt{K} + \int_0^{T_1(K)} e^{-rt} (2K - C(K, K)) dt \\ + \int_{T_1(K)}^{T(K)} e^{-rt} (2(e^K - (1 - Ke^{-K}))e^{r(t-T_1(K))+K} - C(q, K)) dt \end{aligned}$$

Dado que se busca maximizar respecto a un valor, se debe derivar la expresión anterior respecto a K e igualar a 0.

Capítulo 12: El efecto de los impuestos y royalties

En este capítulo se estudia el efecto que tienen los impuestos y *royalties* sobre las decisiones que deben realizar las empresas mineras en cuanto a la explotación de sus depósitos minerales. Es importante notar en primer lugar que los impuestos y *royalties* corresponden a conceptos diferentes, como se explica a continuación.

El impuesto es un tributo que pagan las empresas y/o personas con el objeto de asegurar que el país mantenga sus instituciones (por ejemplo, el poder judicial), y las empresas puedan funcionar (generando así renta). El impuesto más clásico es el impuesto a la renta, que afecta a las utilidades que hace la empresa, y también está el impuesto a las personas, que se refiere al porcentaje de sus ingresos que van al Estado. El nivel de impuesto varía de país en país, teniendo en un extremo países que prácticamente no entregan nada a las personas en términos de institucionalidad debido a una baja tasa de impuestos. Por otro lado, existen países donde existen una gran cantidad de servicios provistos por el Estado, lo que generalmente se encuentra asociado con altos impuestos.

El *royalty*, por su parte, se refiere a un concepto específico a bienes para los cuales el país es dueño, y, que debido a su naturaleza de no-renovabilidad del recurso, una vez producido se pierde como riqueza y nunca más es posible producir dichos recursos. En este caso se considera un *royalty* para asegurar que el Estado tenga una justa retribución por parte de la riqueza que una vez extraída se deja de obtener y que es parte del capital natural inicial.

En el caso del *royalty*, este se asocia generalmente a la producción física. En este caso se debería cobrar un cierto valor por unidad extraída o producida. El problema es que contablemente es difícil para el fisco cobrarle a las empresas por las toneladas de mineral procesadas en planta debido al desconocimiento de la producción. Para eliminar esta problemática, muchos países cobran un *royalty* no en términos de valor por una unidad física de producción, sino que más bien con respecto a algo que es más fácil de monitorear como por ejemplo las ventas o las utilidades operacionales.

En cuanto a la tasa de impuestos o *royalty* hacia el final del capítulo de mostrará que no es trivial definir cuánto es el impuesto justo. Sin embargo, sí es posible estudiar las bases de su determinación desde una perspectiva netamente económica (excluyéndose de esta la componente política, la que sin duda juega un rol también relevante).

El *royalty* es cobrado sobre una base muy diversa. Así, por ejemplo, en Chile el *royalty* sigue una función lineal a tramos, la que se representa en la Figura 12.1. Cabe notar que la mayoría de los países mineros posee un impuesto a las ventas y el sistema de *royalty* de Chile, dependiente de la utilidad operacional, es único. Se mostrará más en detalle la estructura de *royalty* de Chile y otros países en la sección 12.6.

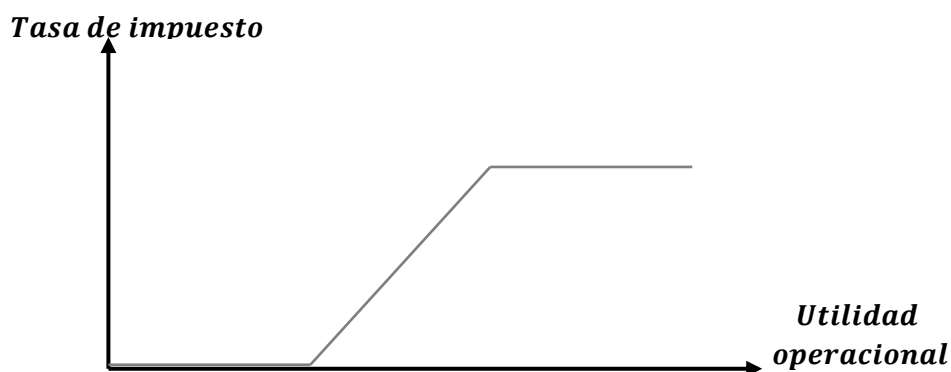


Figura 12.1. Estructura del royalty en Chile

12.1 *Royalty*

Otto *et al.* (2006) define como *royalty* a cualquier impuesto que cumpla con una o más de las siguientes cuatro características:

- La ley que crea el impuesto llama a ese impuesto *royalty*.
- La intención del impuesto es hacer un pago al dueño del mineral en compensación por transferir al deudor del impuesto la propiedad de ese mineral o el derecho a vender ese mineral.
- La intención del impuesto es la de cobrar al productor del mineral por el derecho a minar el mineral producido.
- El impuesto es especial para las minas y no se extrapola a otras industrias.

Existen dos preguntas básicas al momento de establecer un *royalty*: ¿qué tipo de impuesto aplicar (*unit-based*, *ad valorem*, a la renta o híbridos)? y ¿cuál será su valor o tasa de impuesto?

La manera en que se tasa el impuesto es propia de cada país y dependerá exclusivamente de que tan cercana y madura es la relación entre el organismo que define y controla los impuestos y la industria minera, por lo que existen casi tantos sistemas de tasación como países.

La intuición indica que cada mineral debiera tener un impuesto específico, pero esto hace difícil la administración de los *royalties* para el Estado, debido a que por ejemplo los concentrados poseen más de un tipo de mineral o porque el sistema de tasación debería tener en cuenta aspectos económicos como la inflación o la fluctuación de los precios. El impuesto tendría que modificarse constantemente para que se pudiera realizar la recaudación. Por esto, lo más común es optar por utilizar un sistema de tasación más simple. Sin embargo, países más desarrollados y que poseen una fuerte base en tasación de impuestos mineros, utilizan un sistema complejo de impuestos según el tipo de mineral. Un ejemplo es el caso de Australia (discutido en mayor detalle en la sección de Anexos de este capítulo).

Otto *et al.* (2006) indica que los *royalties* más comunes son:

- *Royalties* específicos para cada mineral, definiendo leyes y precios: En este sistema, el gobierno define un *royalty* específico para cada mineral extraído en el país. Además, se definen leyes y precios fijos en las que se aplica el impuesto. Este tipo de impuesto está sujeto a constantes cambios en la tasa del impuesto.
- *Royalties* específicos para cada mineral, evitando problemas de inflación y contenido metálico: Este tipo de impuesto, al igual que el otro, nos indica una tasa que se debe pagar por cada mineral extraído en el país; sin embargo, los impuestos no asumen leyes

y precios fijos, si no que se aplican impuestos *unit-based* o *ad valorem*. Si bien representan una mejora en comparación con el sistema anterior, este sistema también está sujeto a futuros cambios en las tasas.

- *Royalties* uniformes para cada clase de mineral: Este tipo de sistema define una tasa específica de impuesto no para cada mineral en particular, si no que para cada tipo de mineral. Por ejemplo, una tasa fija τ_1 para las piedras preciosas, una tasa fija τ_2 para los metales preciosos, una tasa fija τ_3 para metales base, etc.
- Régimen de *royalties* definidos para cada mina: En este sistema, el organismo encargado de definir las tasas de impuestos específicas para cada mina en particular, por lo que se debe revisar exhaustivamente la situación económica de la empresa y las proyecciones económicas del proyecto antes de definir las tasas (alto costo administrativo).
- Régimen de *royalties* definidos para cada mina sujeto a un rango prescrito: Similar al anterior con la salvedad de que la tasa de impuestos no puede estar fuera de un rango previamente definido por el organismo tasador o por lo explicitado por el poder legislativo.

La segunda dimensión importante a la hora de definir un impuesto es el tipo de *royalty*. Como se mencionó anteriormente, estos pueden ser *unit-based*, *ad valorem*, a la renta o híbridos (es decir, una mezcla de los anteriores). A continuación, se explicarán estos tipos de *royalty* y cuál es el efecto que tienen en las decisiones de la empresa.

12.2 Impuesto *unit-based*

Este tipo de impuesto se basa en las unidades producidas. Es decir, el fisco cobra una cierta cantidad de dinero por unidad de masa o de volumen del mineral extraído. Las ventajas de este impuesto son más administrativas que económicas. Esto se debe a que su simplicidad le permite al Estado una recaudación fiscal constante y transparente. Además, produce ingresos en los primeros años de producción de la mina.

Por otro lado, este tipo de impuesto es desventajoso económicamente para las empresas mineras, ya que reduce directamente los ingresos, afecta las decisiones de producción y no

discrimina entre proyectos marginales y proyectos económicamente robustos, por lo que se desincentiva el desarrollo de nuevos proyectos. Otra forma en que afecta este tipo de impuestos es, por ejemplo, en las minas que mantienen un *stock*, ya que el impuesto también se aplica al mineral extraído que va a este destino, generando así un desincentivo al uso de *stocks*.

Una ventaja de este tipo de impuestos, y que se hará explícita más adelante, es su aplicación a minerales de bajo precio que se transan en grandes cantidades. Este tipo de minerales, una vez extraídos, son transados directamente en el mercado, por lo que el impuesto puede ser transferido al consumidor a través del precio.

Sea $\tau(t)$ el impuesto que la empresa paga en un instante de tiempo t , con $0 \leq \tau(t) \leq 1$. Típicamente, la tasa de impuesto no es constante en el tiempo, sino más bien es común que varíe cada cierto tiempo. Así, por ejemplo, en el caso de Chile la reforma tributaria implementada en 2015 tiene una tasa de impuesto que es creciente en el tiempo hasta el año 2018 y de ahí se mantiene constante. Por lo tanto, la tasa de impuesto en estricto rigor puede ser variable en el tiempo.

El impuesto total que deberá pagar la empresa al Estado viene dada por $\tau(t)q(t)$, por lo que dicho monto puede asociarse a un costo extra de producción. En el siguiente ejemplo se tratará precisamente este caso.

12.2.1 Ejemplo

El problema de una mina afecta a un *royalty* del tipo *unit-based* corresponde al siguiente:

$$\max_{q(t)} \int_0^T e^{-rt} (P(t)q(t) - C(q(t)) - \tau(t)q(t)) dt \quad (12.1)$$

s. a.

$$\dot{S} = -q(t) \quad (12.2)$$

$$S(0) = S_0 \quad (12.3)$$

$$S, q \geq 0 \quad (12.4)$$

Se supone una tasa de *royalty* constante en el tiempo, es decir, $\tau(t) = \tau$ y un costo $C(q(t)) = cq(t)$, y el LOM como variable exógena, se procede a resolver mediante control óptimo. Sea así el Hamiltoniano en valor corriente viene dado por:

$$\widehat{H} = P(t) q(t) - cq(t) - \tau q(t) + v(-q(t)) \quad (12.5)$$

Las condiciones del principio del máximo serán:

i) Condición del máximo:

$$\max_{q(t)} \widehat{H} \Rightarrow \widehat{H}_q = P(t) - c - \tau - v = 0 \quad (12.6)$$

Notar que el Hamiltoniano es lineal en $q(t)$.

ii) Ecuación de estado:

$$\dot{s} = -q \quad (12.7)$$

iii) Ecuación adjunta:

$$\dot{v} = rv - \widehat{H}_s \quad (12.8)$$

$$\dot{v} = rv \Leftrightarrow v(t) = v(0)e^{rt} \quad (12.9)$$

Reemplazando en la ecuación i):

$$P(t) - c - \tau = v(0)e^{rt} \quad (12.10)$$

Derivando con respecto al tiempo:

$$\dot{P} = v(0)re^{rt} \quad (12.11)$$

Dividiendo (2) en (1):

$$\frac{\dot{P}}{P-c-\tau} = r \quad (12.12)$$

La solución para $p(t)$ es:

$$P(t) = (P(0) - c - \tau)e^{rt} + c + \tau \quad (12.13)$$

El comportamiento del precio para escenarios con y sin impuesto se muestra gráficamente en la Figura 12.2.

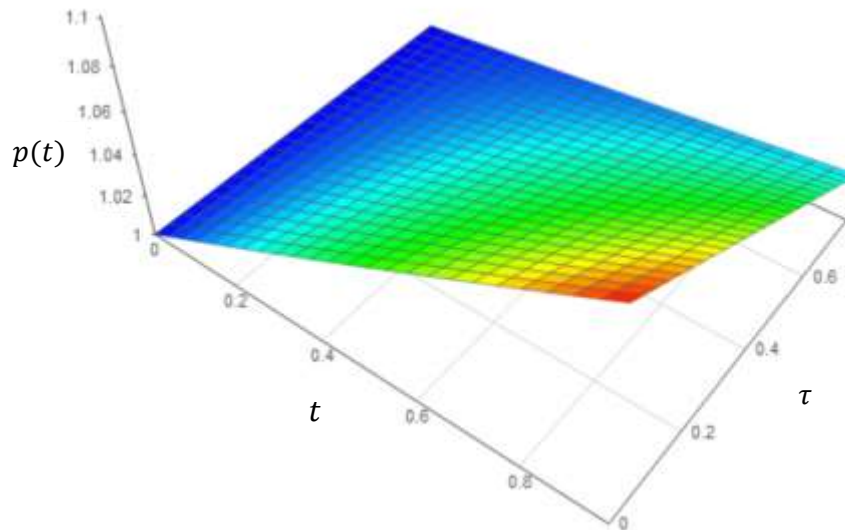


Figura 12.2. Comportamiento del precio en el tiempo en un mercado con impuesto *unit-based*

De esta figura se observa que, para cada τ , en $t = 0$ el precio aumenta linealmente; sin embargo, a medida que aumenta el impuesto, la pendiente de la curva va disminuyendo en el tiempo.

12.2.2 Ejemplo

Se considera en este ejemplo la inclusión del *royalty* en una empresa minera que debe decidir no solo cuánto producir sino también cuál es el LOM óptimo.

El problema se representa matemáticamente como:

$$\max_{q(t), T} \int_0^T e^{-rt} (P(t)q(t) - C(q, S) - \tau q(t)) dt \quad (12.14)$$

s. a.

$$\dot{S} = -q(t) \quad (12.14)$$

$$S(0) = S_0 \quad (12.15)$$

$$S, q \geq 0 \quad (12.16)$$

Resolviendo por control óptimo:

$$\hat{H} = P(t)q(t) - C(q, S) - \tau q(t) + v(-q(t)) \quad (12.17)$$

Las condiciones del principio del máximo vienen dadas por:

i) Condición del máximo:

$$\max_{q(t)} \widehat{H} \Rightarrow \widehat{H}_q = P(t) - C_q - \tau - v = 0 \quad (12.18)$$

Se asume que \widehat{H} es cóncavo.

ii) Ecuación de estado:

$$\dot{S} = -q \quad (12.19)$$

iii) Ecuación adjunta:

$$\dot{v} = rv - \widehat{H}_s \quad (12.20)$$

$$\dot{v} = rv + c_s \quad (12.21)$$

iv) Transversalidad:

$$\widehat{H}_{(T)} = P(T)q(T) - C(q(T), S(T)) - \tau q(T) - v(T) q(T) = 0 \quad (12.23)$$

Derivando i) respecto al tiempo:

$$\dot{P} - C_{qq}\dot{q} - C_{qs}\dot{S} - rv - C_s = 0 \quad (12.24)$$

$$\dot{P} - C_{qq}\dot{q} - C_{qs}\dot{S} - r(p - C_q - \tau) - C_s = 0 \quad (12.25)$$

Reemplazando ii) en (12.25):

$$\dot{P} - C_{qq}\dot{q} + C_{qs}q - r(p - C_q - \tau) - C_s = 0 \quad (12.26)$$

Esta es una ecuación diferencial ordinaria para q , de donde se obtiene la producción óptima $q^*(t)$.

Sean $C(q, s) = \frac{\gamma q^2}{2}$ y $\dot{P} = 0$:

$$C_q = \gamma q \quad (12.27)$$

$$C_s = 0 \quad (12.28)$$

$$C_{qq} = \gamma \quad (12.29)$$

$$C_{qs} = 0 \quad (12.30)$$

$$v(t) = v(0) e^{rt} \quad (12.31)$$

Reemplazando en (12.26) se obtiene:

$$-\gamma \dot{q} - r(P - \gamma q - \tau) = 0 \quad (12.32)$$

$$\dot{q} - r q + \frac{r(P-\tau)}{\gamma} = 0 \quad (12.33)$$

$$q(t) = A e^{rt} + \frac{P-\tau}{\gamma} \quad (12.34)$$

Para encontrar A , $v(0)$ y T se utilizan las condiciones iniciales:

$$\begin{cases} \hat{H}(T) = 0 \\ \int_0^T q(s) ds = s_0 \\ v(t) = P - \gamma \left(A e^{rt} + \frac{P-\tau}{\gamma} \right) - \tau \end{cases} \quad (12.35)$$

Finalmente, se obtiene:

$$q^*(t) = \frac{P-\tau}{\gamma} (1 - e^{r(t-T)}) \quad (12.36)$$

$$A = -\frac{P-\tau}{\gamma} e^{-rT} \quad (12.37)$$

El plan de producción óptima en escenario con y sin impuesto a la venta del ejemplo anterior se muestra en la Figura 12.3.

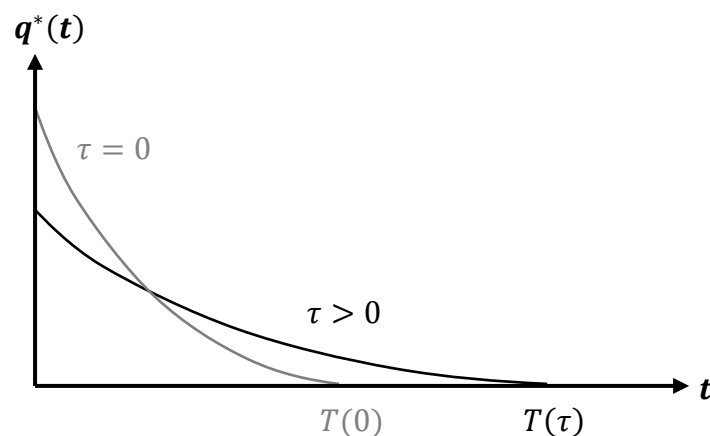


Figura 12.3. Plan de producción en el tiempo, con y sin impuesto a las ventas

Como se observa en la Figura 12.3 una tasa de *royalty* mayor desincentiva la producción, pero como en definitiva se extraerá la misma cantidad de recursos, finalmente se alargará la vida de la mina.

Una de las razones por las que los impuestos de esta forma desincentivan la producción es debido a que el impuesto descontado será menor en el futuro, por lo que se decide postergar la extracción de mineral. Como notara Conrad y Hool (1984): “Estos efectos se revierten si la tasa del impuesto es variable y tiene una velocidad de crecimiento lo suficientemente alta”.

12.3 Impuesto a la utilidad o impuesto a la renta

Este tipo de impuesto es el más eficiente en términos económicos para las empresas, ya que el impuesto se paga siempre y cuando durante ese periodo hayan existido utilidades económicas. Esto ayuda a eliminar el impacto de un impuesto *unit-based* o *ad valorem* en proyectos emergentes. Además, es sensible al precio y apoya la eficiencia de la producción. Se habla que este tipo de impuestos es el más pertinente si es que se utiliza el concepto de *royalty* como una compensación ya que se paga solamente si realmente la extracción del mineral produce beneficios, lo que se explica en Otto *et al.* (2006) de la siguiente forma:

“Un *royalty* mineral es una compensación al dueño por el agotamiento de un activo e idealmente, por lo tanto, debe fijarse en una cifra que tenga alguna relación con el valor del mineral mientras yace en el suelo. Por ejemplo, la venta del mineral recuperado menos un cargo razonable por la extracción, tratamiento y transporte al punto de venta, suficientes para cubrir todos los costos y gastos generales incluyendo un retorno razonable en el gasto capital junto con la provisión para la amortización de ese capital.”

Por otra parte, este tipo de impuesto es en general costoso para el Estado, ya que es posible que en los primeros años del proyecto no se generen ingresos fiscales, debido a que los flujos de ingreso no son estables y se requiere de fiscalización para evitar que las empresas intervengan en la definición de su renta, reduciendo o evitando el impuesto.

Para la determinación del impacto que tiene el cobro de este impuesto en la explotación óptima de una mina considérese la utilidad en cada instante de tiempo t por $\pi(t) = P(t)q(t) - C(q(t))$. De esta forma, la cantidad de impuesto pagada por la empresa al Estado vendrá dada

por $\tau(t)\pi(t)$, la que corresponde precisamente a la recaudación fiscal. Por su parte, $(1 - \tau(t))\pi(t)$ corresponde a las utilidades de la empresa después de impuesto.

El problema de la mina, asumiendo un *LOM* exógeno, se expresa entonces de la siguiente forma:

$$\max_{q(t)} \int_0^T e^{-rt} (1 - \tau(t)) (P(t)q(t) - C(q(t))) dt \quad (12.38)$$

s. a.

$$\dot{S} = -q(t) \quad (12.39)$$

$$S(0) = S_0 \quad (12.40)$$

$$S, q \geq 0 \quad (12.41)$$

En el caso general en que la tasa de impuesto depende del tiempo, la tasa de extracción, es decir, $q(t)$, no necesariamente va a coincidir con la producción en el cual la mina no paga el impuesto. En otras palabras, si la tasa de impuesto es variable en el tiempo, puede afectar la política de extracción óptima de la mina. A modo de ejemplo para demostrar la incidencia del cambio de tasa de impuesto en la producción de una mina, si la tasa de impuesto fuese 100% por los primeros 5 años y luego cayera a 0%, la mina no produciría nada sino hasta el inicio del sexto año.

En general entonces, la tasa de impuesto variable afecta el comportamiento de las empresas. No obstante, si la tasa de impuesto es constante el problema (12.38)-(12.41) ese convierte en:

$$(1 - \tau) \max_{q(t)} \int_0^T e^{-rt} (P(t)q(t) - C(q(t))) dt \quad (12.42)$$

s. a.

$$\dot{S} = -q(t) \quad (12.43)$$

$$S(0) = S_0 \quad (12.44)$$

$$S, q \geq 0 \quad (12.45)$$

En este caso no se generan distorsiones en las decisiones del productor, ya que, si τ es constante, el problema anterior es equivalente al problema de determinar la extracción óptima sin consideraciones de impuestos.

12.4 Impuesto a las ventas (*ad valorem*)

El impuesto a las ventas o impuesto *ad valorem* (es decir, de acuerdo al valor) corresponde a una fracción de las ventas generadas por la empresa. Este tipo de impuesto presenta las mismas desventajas económicas que el impuesto *unit-based*, con la salvedad de que este sí es sensible a los precios del mercado, permitiendo así diversificar en cierto grado el riesgo de mercado de las empresas.

Uno de los problemas de este tipo de impuesto en la práctica es que dependiendo del mercado el Estado podría no tener claridad de cuál es el precio de mercado del mineral. Si el *commodity* es transado en bolsa, en general este problema no existe, pero si el *commodity* en cuestión se produce en un mercado de productores (Tilton y Guzmán, 2016), entonces no necesariamente es posible para el Estado contrastar el precio de venta de la empresa – la cual por el solo hecho de existir este tipo de impuesto tiene incentivos a reducir el valor de venta.⁶⁶

En el caso del impuesto *ad valorem* el problema que resuelven las empresas viene dado por:

$$\max_{q(t)} \int_0^T e^{-rt} (P(t)q(t) (1 - \tau(t)) - C(q(t))) dt \quad (12.46)$$

s. a.

$$\dot{S} = -q(t) \quad (12.46)$$

$$S(0) = S_0 \quad (12.47)$$

$$S, q \geq 0 \quad (12.48)$$

Evidentemente en este problema que la tasa de impuesto *ad valorem* sea nula ($\tau(t) = 0$) o no genera problemas diferentes y por tanto la extracción óptima se verá afectada si $\tau(t) > 0$.

Para mostrar lo anterior se resolverá un caso simplificado en el cual $\tau(t) = \tau$ (es decir, la tasa del impuesto es constante).

⁶⁶ A modo de ejemplo considérese el cuestionamiento que CORFO ha hecho sobre el precio de venta del carbonato de litio de SQM desde 2014, el que responde a un precio definido por la compañía debido a que no existe algo como un “precio de mercado”, por no transarse este mineral en bolsa.

12.4.1 Ejemplo I

Sea una tasa de impuesto τ (constante) y $C(q(t)) = cq(t)$, con c constante (equivalente a que el costo marginal de producción es constante e igual a c). El problema de la mina es entonces:

$$\max_{q(t)} \int_0^T e^{-rt} (P(t)q(t)(1 - \tau) - cq(t)) dt \quad (12.49)$$

s. a.

$$\dot{S} = -q(t) \quad (12.50)$$

$$S(0) = S_0 \quad (12.51)$$

$$S, q \geq 0 \quad (12.52)$$

Resolviendo mediante control óptimo el problema, es posible escribir el Hamiltoniano en valor corriente como:

$$\hat{H} = P(t)q(t)(1 - \tau) - cq(t) + v(-q(t)) \quad (12.53)$$

De esta forma, las condiciones del principio del máximo vendrán dadas por:

i) Condición del máximo:

$$\max_{q(t)} \hat{H} \Rightarrow \hat{H}_q = P(t)(1 - \tau) - c - v = 0 \quad (12.54)$$

Se debe notar que en este caso el Hamiltoniano es lineal en $q(t)$ y por tanto el q óptimo no se encontrará derivando e igualando a cero.

ii) Ecuación de estado:

$$\dot{s} = -q \quad (12.55)$$

iii) Ecuación adjunta:

$$\dot{v} = rv - \hat{H}_s \quad (12.56)$$

$$\dot{v} = rv \Leftrightarrow v(t) = v(0)e^{rt} \quad (12.57)$$

Reemplazando (12.57) en la ecuación (12.54):

$$P(t)(1 - \tau) - c = v(0)e^{rt} \quad (12.58)$$

Derivando esta ecuación con respecto al tiempo:

$$\dot{P}(1 - \tau) = v(0)re^{rt} \quad (12.59)$$

Dividiendo (12.58) en (12.59):

$$\frac{\dot{P}(1-\tau)}{P(1-\tau)-c} = r \quad (12.60)$$

La solución para $P(t)$ es:

$$P(t) = \left(P(0) - \frac{c}{1-\tau}\right)e^{rt} + \frac{c}{1-\tau} \quad (12.61)$$

Notar que si $\tau = 0$:

$$P(t) = (P(0) - c)e^{rt} + c \quad (12.62)$$

El comportamiento del precio para escenarios con y sin impuesto se muestra gráficamente en la Figura 12.4.

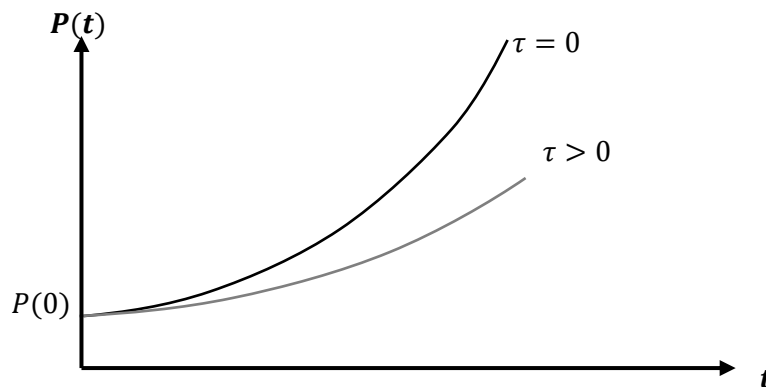


Figura 12.4. Comportamiento del precio en el tiempo en un mercado con y sin impuesto a las ventas

El impuesto a las ventas distorsiona así la extracción de las minas y por tanto termina distorsionando también al mercado.

Debe notarse que desde un punto de vista normativo en general un economista preferirá un impuesto que sea neutral al proceso de toma de decisiones de los agentes del mercado, porque de esta forma los efectos de dicho impuesto pueden ser predichos de forma relativamente sencilla.

12.4.2 Ejemplo II

Inclusión del *royalty* en una empresa minera que debe decidir no solo cuánto producir sino también durante cuánto tiempo (es decir, el LOM es endógeno al problema). Sea el problema:

$$\max_{q(t), T} \int_0^T e^{-rt} (P(t)q(t)(1 - \tau) - C(q, S)) dt \quad (12.63)$$

s. a.

$$\dot{S} = -q(t) \quad (12.64)$$

$$S(0) = S_0 \quad (12.65)$$

$$S, q \geq 0 \quad (12.66)$$

Resolviendo por control óptimo, el Hamiltoniano viene dado por:

$$\hat{H} = P(t)q(t)(1 - \tau) - C(q, s) + v(-q(t)) \quad (12.67)$$

De esta forma, las condiciones del principio del máximo serán:

i) Condición del máximo:

$$\max_{q(t)} \hat{H} \Rightarrow \hat{H}_q = P(t)(1 - \tau) - C_q - v = 0 \quad (12.68)$$

Donde se asume que \hat{H} es cóncavo.

ii) Ecuación de estado:

$$\dot{S} = -q \quad (12.69)$$

iii) Ecuación adjunta:

$$\dot{v} = rv - \hat{H}_s \quad (12.70)$$

$$\dot{v} = rv + C_s \quad (12.71)$$

iv) Transversalidad:

$$\hat{H}(T) = P(T)q(T)(1 - \tau) - C(q(T), S(T)) - v(T)q(T) = 0 \quad (12.72)$$

Derivando (12.68) respecto al tiempo:

$$\dot{P}(1 - \tau) - C_{qq}\dot{q} - C_{qs}\dot{S} - rv - C_s = 0 \quad (12.73)$$

$$\dot{P}(1 - \tau) - C_{qq}\dot{q} - C_{qs}\dot{S} - r(P(1 - \tau) - C_q) - C_s = 0 \quad (12.74)$$

Reemplazando en (12.69):

$$\dot{P}(1 - \tau) - C_{qq}\dot{q} + C_{qs}q - r(P(1 - \tau) - C_q) - C_s = 0 \quad (12.75)$$

Esta es una ecuación diferencial ordinaria para P . De aquí, se obtiene la producción óptima $q^*(t)$.

Para resolver algebraicamente el sistema anterior considérense las funciones $C(q, s) = \frac{\gamma q^2}{2}$ y $\dot{P} = 0$:

$$C_q = \gamma q \quad (12.76)$$

$$C_s = 0 \quad (12.77)$$

$$C_{qq} = \gamma \quad (12.78)$$

$$C_{qs} = 0 \quad (12.79)$$

$$v(t) = v(0) e^{rt} \quad (12.80)$$

Reemplazando (12.80) en (12.74) se obtiene:

$$-\gamma \dot{q} - r(P(1 - \tau) - \gamma q) = 0 \quad (12.81)$$

$$\dot{q} - r q + \frac{rP(1-\tau)}{\gamma} = 0 \quad (12.82)$$

$$q(t) = A e^{rt} + \frac{P(1-\tau)}{\gamma} \quad (12.83)$$

Para encontrar A , $v(0)$ y T se utilizan las condiciones iniciales:

$$\begin{cases} \hat{H}(T) = 0 \\ \int_0^T q(s) ds = s_0 \\ v(0) = (1 - \tau)P - \gamma \left(A + \frac{P(1-\tau)}{\gamma} \right) \end{cases} \quad (12.84)$$

De donde se obtiene:

$$q^*(t) = \frac{P(1-\tau)}{\gamma} (1 - e^{r(t-T)}) \quad (12.85)$$

$$A = -\frac{P(1-\tau)}{\gamma} e^{rT} \quad (12.86)$$

El plan de producción óptima en escenario con y sin impuesto a la venta del ejemplo anterior se muestra en la Figura 12.5.

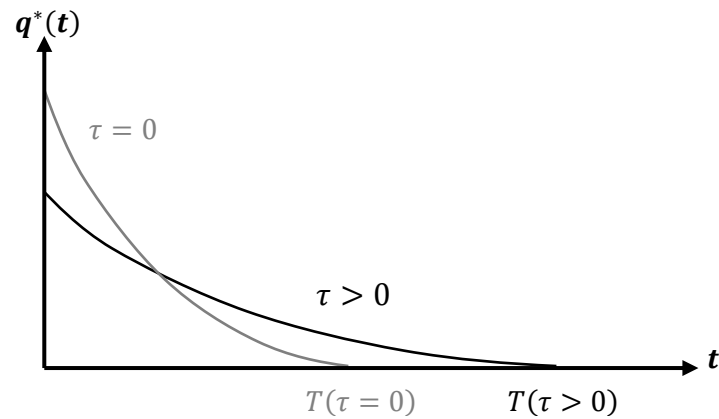


Figura 12.5. Plan de producción en el tiempo, con y sin impuesto a las ventas

Se observa en los dos últimos ejemplos que tanto los impuestos *unit-based* como *ad valorem* afectan a los mismos factores de decisión y de mercado, produciendo por tanto similares distorsiones económicas en las empresas mineras. Aun así, mientras que un impuesto *ad valorem* constante en general solo afecta la producción, un impuesto variable podría cambiar también la selección de las leyes de corte en las minas (Conrad y Hool, 1984).

12.4.3 Ejemplo III

Considérese el problema de maximizar el VAN de una mina con una inversión inicial y un impuesto a la renta constante τ , el que puede describir matemáticamente por:⁶⁷

$$\max_{q(t), K, T} -\Phi(K) + (1 - \tau) \int_0^T e^{-rt} (P(t) q(t) - c(q, s)) dt \quad (12.87)$$

s. a.

$$\dot{S} = -q(t) \quad (12.88)$$

$$S(0) = S_0 \quad (12.89)$$

$$0 \leq q \leq K \quad (12.90)$$

$$S \geq 0 \quad (12.91)$$

⁶⁷ Para efecto de simplificar la exposición se asume la depreciación de la inversión no se descuenta del pago de impuestos.

Anteriormente se determinó que el plan de producción óptimo de la mina no se ve afectado por un impuesto a la renta; sin embargo, al existir una inversión inicial, no es posible extraer el impuesto del operador de maximización, por lo que se trata de un problema distinto.

Al existir un impuesto a la renta, parte de la riqueza que la empresa espera generar con su inversión inicial en definitiva no va a ser capturada por ella misma, por lo que una variación de la tasa de impuesto incide sobre la inversión.

Este problema dinámico se resuelve como en el Capítulo 11, es decir, en dos etapas secuenciales, las que se presentan a continuación.

Etapla 2:

$$\max_{q(t), T} \int_0^T e^{-rt} (P(t) q(t) - C(q, S)) dt \quad (12.92)$$

s. a.

$$\dot{S} = -q(t) \quad (12.93)$$

$$S(0) = S_0 \quad (12.94)$$

$$0 \leq q \leq K \quad (12.95)$$

$$S \geq 0 \quad (12.96)$$

Etapla 1:

$$\max_K -\Phi(K) + (1 - \tau) VAN^*(K) \quad (12.97)$$

La representación gráfica del VAN se muestra gráficamente en la Figura 12.6.

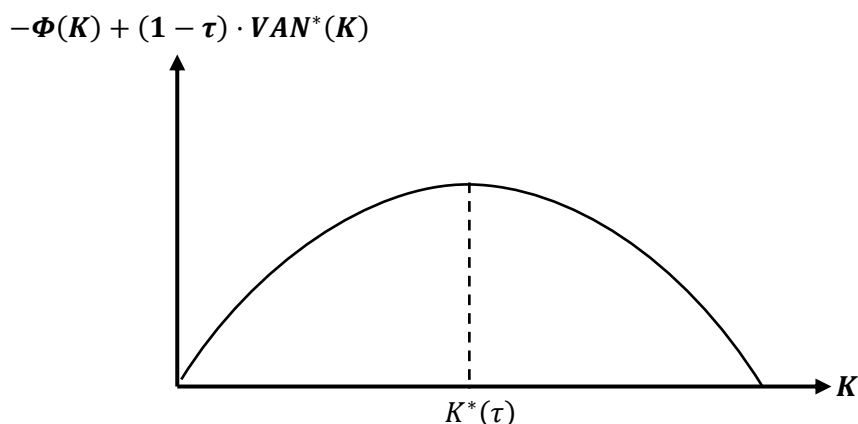


Figura 12.6. Representación del VAN dada una capacidad K como función del impuesto a la renta

En general la capacidad óptima a instalar en el problema anterior será del tipo $K^* = K^*(\tau)$ (con $\frac{dK^*(\tau)}{d\tau} < 0$). De esta forma, el comportamiento de la inversión de las empresas mineras no es indiferente al marco impositivo de un país. Si hay cambios en ese marco impositivo, sin duda que habrá cambios en la inversión.

12.4.4 Ejemplo IV

Con objeto de ahondar en la solución del problema anterior considérense las siguientes funciones:

$$VAN^*(K) = V_0 (1 - e^{-rK}) \quad (12.98)$$

$$\Phi(K) = \alpha K \quad (12.99)$$

El problema que resuelve la empresa se expresa como sigue:

$$\max_K -\Phi(K) + (1 - \tau) VAN^*(K) \quad (12.100)$$

$$\max_K -\alpha K + (1 - \tau) V_0 (1 - e^{-rK}) \quad (12.101)$$

Derivando respecto a K e igualando a 0 se tiene que:

$$-\alpha + (1 - \tau) V_0 r e^{-rK^*} = 0 \quad (12.102)$$

$$K^* = \frac{1}{r} \log\left(\frac{(1-\tau) V_0 r}{\alpha}\right) \quad (12.103)$$

De aquí, es claro que K^* depende de forma inversa de τ . Gráficamente se puede determinar el comportamiento de K^* respecto a τ como se muestra en la Figura 12.7.

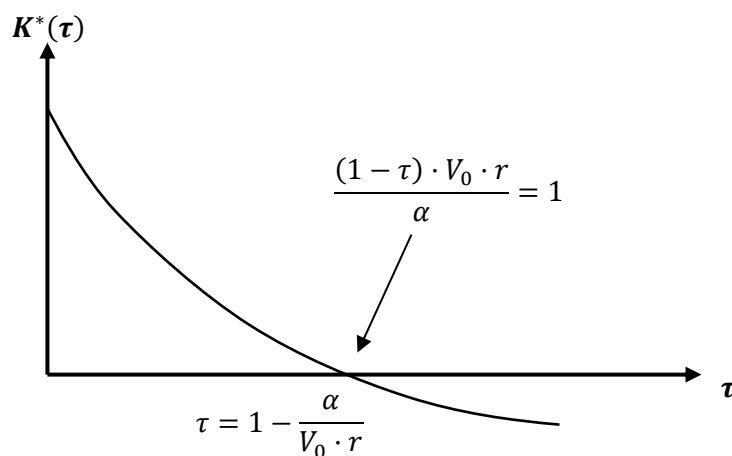


Figura 12.7. Ejemplo de comportamiento de la capacidad en función de la tasa de impuesto

El Estado obtiene de esta forma una suma de flujos de recaudación fiscal descontados equivalente a:

$$\text{Recaudación fiscal} = \tau \text{VAN}(K^*(\tau)) \quad (12.104)$$

Luego, el problema que debe resolver el Estado (en una etapa anterior al problema que resuelve la mina) es:

$$\max_{\tau} \tau \text{VAN}(K^*(\tau)) \quad (12.105)$$

Típicamente existirá una función de recaudación fiscal que será como se muestra en la Figura 12.8. Si el rol del Estado es maximizar la recaudación fiscal para después poder, por ejemplo, redistribuir la riqueza generada en educación, salud, sistema judicial, etc., entonces teóricamente debiera existir un valor de impuesto óptimo que maximiza la recaudación fiscal. Esto no significa necesariamente expropiar las minas (lo que implicaría una tasa de impuesto de 1), debido a que esto permite maximizar la recaudación en el corto-mediano plazo, pero al no desarrollarse nueva inversión en el largo plazo la recaudación se desvanece.⁶⁸ Este *trade-off*

⁶⁸ Son incontables los ejemplos de expropiación de recursos minerales que terminan en una merma de la recaudación fiscal precisamente por una disminución sustancial en el tiempo de la producción (a causa de una

entre el corto y largo plazo es particularmente crítico en minería debido a los largos ciclos de inversión de esta industria.

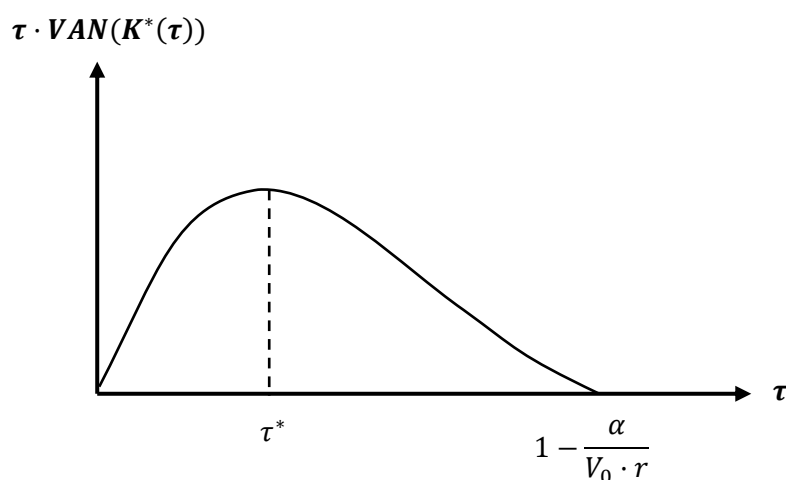


Figura 12.8. Curva de Laffer. Representación de la recaudación fiscal en términos de la tasa de impuesto

La curva de la Figura 12.8 es una conceptualización teórica del economista americano Arthur Laffer y se conoce como Curva de Laffer (véase Recuadro 12.1). En esta se muestra precisamente el *trade-off* entre imponer una tasa de impuestos alta o baja genera una tasa de impuesto óptima para el Estado, τ^* .

En base a las funciones del ejemplo, se puede derivar la tasa de descuento óptima por medio de:

$$\max_{\tau} \tau V_0 \left(1 - e^{-r \frac{1}{r} \log\left(\frac{(1-\tau)V_0 r}{\alpha}\right)} \right) \quad (12.106)$$

$$\max_{\tau} \tau V_0 \left(1 - \frac{\alpha}{(1-\tau)V_0 r} \right) \quad (12.107)$$

Derivando respecto a τ e igualando a 0 se obtiene:

$$\tau^* = 1 - \sqrt{\frac{\alpha}{V_0 r}} \quad (12.108)$$

abrupta caída en la inversión). Ejemplos recientes de esto corresponden a la industria del petróleo en Venezuela o la industria minera en Zimbabue.

Es importante notar que:

$$\tau^* = 1 - \sqrt{\frac{\alpha}{V_0 r}} \leq 1 - \frac{\alpha}{V_0 r} \quad (12.109)$$

La expresión del lado derecho de esta desigualdad es, como se mostró anteriormente, el valor máximo de tasa de impuesto de forma de obtener recaudación y que se realice inversión. Por lo tanto, el óptimo se encuentra al interior de la Curva de Laffer.

RECUADRO 12.1

LA CURVA DE LAFFER (MANKIW, 2012)

Un día de 1974 el economista americano Arthur Laffer se reunió con algunos destacados periodistas y políticos en un restaurante de Washington. Tomó una servilleta y dibujó cómo afectan los impuestos a la recaudación fiscal. La curva que graficó era similar a la Figura 12.8. Laffer sugirió que Estados Unidos se encontraba en el tramo de pendiente negativa de esta curva. En su opinión, los impuestos eran tan altos que, si bajaran, la recaudación fiscal aumentaría.

La mayoría de los economistas se mostraron escépticos ante la sugerencia de Laffer. La idea de que una reducción de los impuestos podría elevar los ingresos fiscales era correcta desde el punto de vista de la teoría económica, pero había más dudas de que lo fuera en la práctica. No existía ninguna prueba a favor de la idea de Laffer de que los impuestos hubieran alcanzado realmente unos niveles tan extremos.

No obstante, la curva de Laffer (como acabó conociéndose) atrajo la imaginación de Ronald Reagan. Cuando éste se presentó a la presidencia en 1980, incluyó la reducción de impuestos en su programa. Sostenía que los impuestos eran tan altos que estaban disuadiendo de trabajar mucho, y que una reducción daría a los individuos los incentivos adecuados para trabajar, lo que mejoraría el bienestar económico y quizás incluso los ingresos fiscales.

La historia no confirmó la conjetura de Laffer. Durante los dos mandatos de Reagan y muchos años después, el Estado incurrió en grandes déficits presupuestarios. Sin embargo, el argumento de Laffer no debe descartarse a priori. Aunque un recorte general de los impuestos normalmente reduce los ingresos fiscales, a veces algunos contribuyentes posiblemente se encuentren en el lado equivocado de la curva. Así, en 1980 los ingresos fiscales generados por los americanos de mayores ingresos, que están sujetos a impuestos más altos, aumentaron cuando se bajaron sus impuestos. Por otra parte, el

argumento de Laffer tal vez sea más razonable cuando se aplica a otros países, en los que los impuestos son mucho más altos que en Estados Unidos.

12.5 Impuesto híbrido

Este tipo de impuesto consiste en aplicar, al mismo tiempo, una combinación de dos o más impuestos. Generalmente se utiliza este tipo de impuesto con el fin de disminuir el riesgo que comparte el gobierno con la empresa a la hora de aplicar un impuesto a la renta, asegurándose de esta forma el Estado una parte del pago para cubrir de esta forma sus gastos (que generalmente no dependen el precio de los *commodities* minerales).

Un ejemplo de impuesto híbrido de común aplicación en los países respecto a la industria minera es la de complementar al impuesto a la renta con un impuesto *ad valorem*.

Lo anterior se explica pues, aunque un impuesto a la renta es ideal para las empresas (desde el punto de vista económico), ya que no afecta en sus decisiones de producción, actúa como discriminador entre proyectos pequeños y grandes y se aplica siempre y cuando el periodo haya sido rentable, afectando de esta forma solo a las decisiones de inversión. Sin embargo, para el Estado representa un riesgo significativo, pues comparte con la empresa el riesgo a no producir ingresos fiscales en los periodos que la mina no es rentable (algo que escapa completamente del control del Estado).

El objetivo de la inclusión del impuesto *ad valorem* en este caso es mitigar este riesgo para el Estado.

Los dos métodos más comunes para la implementación de impuestos híbridos de esta naturaleza son:

- Escoger una tasa para el *ad valorem*, una tasa para el impuesto a la renta y pagar solo el que produzca mayor flujo.
- Definir una tasa base *ad valorem* como *buffer*, en caso de que el periodo no haya sido rentable, y sobre él agregar el ingreso producido por el impuesto a la renta.⁶⁹

⁶⁹ Un ejercicio para este tipo de impuesto será desarrollado al final de este capítulo.

12.6 Impuestos mineros en Chile y en el resto del mundo

En Chile, el *royalty* minero fue introducido dentro de la legislación chilena en 2005 a través de la Ley N° 20.026 sobre el impuesto específico a la actividad minera, la cual modificaba el Decreto Ley N° 824 sobre impuesto a la renta promulgado en 1974. El objetivo de esta ley era la de corregir dos situaciones que se presentaban en la industria minera, las cuales eran denotadas por el expresidente de la República Ricardo Lagos en su mensaje ejecutivo (2004) como:

“No cobrar por el uso de un insumo, provoca una disminución artificial en los costos de extracción y procesamiento de productos mineros. Esta disminución artificial en el costo de explotación genera incentivos a sobreexplotar los minerales, ya que los oferentes toman decisiones de producción sobre la base de los costos enfrentados por ellos. Además, dada la naturaleza no renovable de los minerales, ante un eventual agotamiento de estos recursos, el país perdería una importante fuente de ingresos y bienestar.”

Esta ley incluía un impuesto con una tasa progresiva y ascendente para aquellos productores que durante el periodo vendieran más de 12.000 toneladas métricas de cobre fino (TMCF) y menos de 50.000 TMCF.

Posteriormente, esta ley sufrió un cambio en el 2010 dada por la ley N° 20.469, que fue impulsada por el terremoto ocurrido el 27 de febrero del mismo año, con objeto de esta forma de contribuir a la “reconstrucción del país”. El expresidente Sebastián Piñera presentó este proyecto de ley frente a la Cámara de Diputados en conjunto con la Ley N° 20.444 y la Ley N° 20.455 como un conjunto de leyes que le permitiría al país poder llevar el proceso de reconstrucción y regreso a la vida normal de las personas en las comunidades afectadas.

La nueva ley requería de un mayor aporte de las mineras en términos tributarios (cuidando los derechos básicos a inversiones de estas), ya que se entendía que la industria minera podía entregar más de lo que estaban aportando con la ley N° 20.026. Este requerimiento extra se traducía en nuevas tasas progresivas y ascendentes para aquellos productores que vendieran más de 50.000 TMCF (toneladas métricas de cobre fino) en un periodo, sin embargo, las tasas se asignan según su Margen Operacional Minero (MOM), que es la razón entre la Renta Imponible Operacional Minera (RIOM) y los Ingresos Operacionales Mineros (IOM).

Actualmente, el impuesto específico a la actividad minera se aplica directamente al RIOM, el cual se define como el resultado de efectuar los ajustes especificados en el Artículo N° 64 a la Renta Líquida Imponible (RLI) determinada en los Artículos N° 29 a N° 33 de la Ley N° 824 (para mayor información referirse a esta ley). Las tasas efectivas se pueden apreciar en las Figuras 12.9 y 12.10.

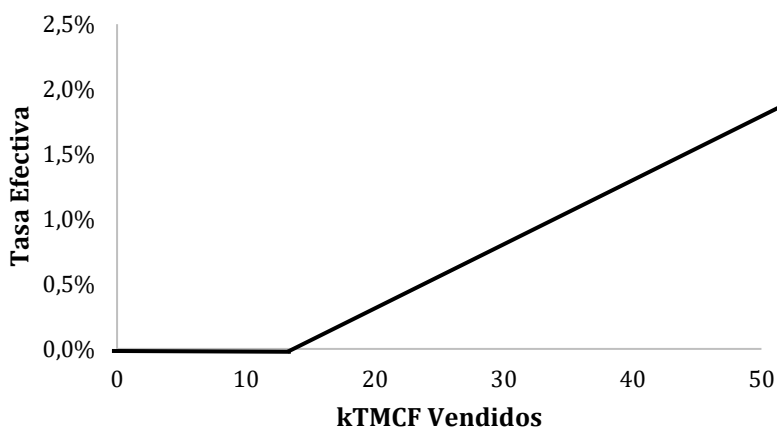


Figura 12.9. Tasas efectivas por TMCF Representación las tasas efectivas del impuesto minero chileno para ventas entre 12.000 y 50.000 TMCF

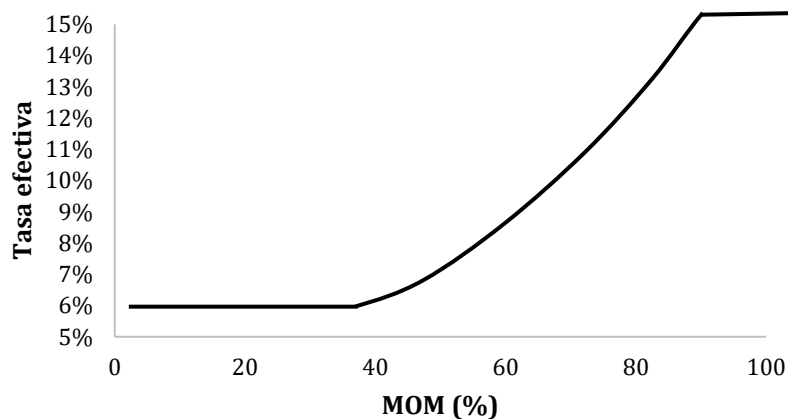


Figura 12.10. Tasas efectivas por MOM Representación las tasas efectivas del impuesto minero chileno para ventas mayores o iguales a 50.000 TMCF

Tabla 12.1. Tabla comparativa entre royalties para nueve países distintos de Chile en las industrias de cobre, oro y hierro.

PAÍS	NOMBRE DEL IMPUESTO	BASE	COBRE	ORO	HIERRO
Brasil	Compensación Financiera por la Exploración de Recursos Minerales (CFEM)	El CFEM actúa directamente sobre la venta del mineral, aplicándose directamente en el ingreso neto de la venta, o en caso de reutilización del material, calculándose el CFEM en función de los costos de extracción y fundición.	2%	1%	2%
Sudáfrica	<i>Royalty</i> a los Recursos Minerales y Petroleros	Este tipo de impuestos aplica tasas porcentuales variables a las ventas brutas ajustadas. Las tasas porcentuales dependen si el material está refinado o no. La deuda se calcula a través de un impuesto base (a las ventas brutas) multiplicado por la tasa porcentual.	0,5%- 7%	0,5%- 5%	0,5%- 5%
República Democrática del Congo	<i>Royalty</i> Minero	Este impuesto se aplica a la producción mineral evaluada a precio de mercado menos transporte, muestreo, seguros y costos de marketing.	2%	2,50%	0,50%
Canadá	<i>Royalties</i> Provincianos	Las bases en que se aplica el impuesto cambian por provincia, pero como regla general se aplica sobre ingresos específicos mineros menos costos específicos mineros con varios costos no deducibles.	1%- 17%	1%- 17%	1%- 17%

Con objeto de finalizar la exposición de las distintas tasas de impuestos a la minería, en la siguiente tabla se presenta una comparación entre los *royalties* aplicados en ocho países para las industrias del cobre, oro y hierro.

Tabla 12.1. Tabla comparativa entre royalties para nueve países distintos de Chile en las industrias de cobre, oro y hierro. (Cont.)

PAÍS	NOMBRE DEL IMPUESTO	BASE	COBRE	ORO	HIERRO
China	Impuesto al Recurso	Este impuesto se aplica directamente a las unidades producidas (volumen o masa)	CNY 5- CNY 7 por tonelada	CNY 3- CNY 10 por tonelada	CNY 3- CNY 10 por tonelada
Brasil	Tasas de Compensación por Recursos Minerales	Este impuesto se aplica directamente al ingreso de las ventas	2% BRL 1100- BRL 1500 por año	4% BRL 1100- BRL 1500 por año	2% BRL 1100- BRL 1500 por año
	Tasa de Royalty por Derecho de Exploración y Explotación	Este impuesto se calcula en base al área minada			
Sudáfrica	El Royalty Minero	Se aplica sobre las ganancias operacionales, obtenidas por el ingreso generado por la venta de los recursos minerales para cada trimestre menos los costos de ventas y operacionales.	1%-12%		
	El Impuesto Minero Especial		2%-8,4%		
	La Contribución Minera Especial		4%-13,12%		
República Democrática del Congo	Por uso de Tierra Federal	Se aplica sobre los ingresos (solo para minas de carbón)	0%		
	Los Impuestos Netos sobre los Ingresos de Nevada	Se aplica sobre los "Profit Before Taxes" (PBT) ajustado	2%-5%		
	Otros impuestos por Estado				

12.7 Problemas resueltos

Problema 12.1

Una mina está realizando la planificación de largo plazo de sus operaciones, la que extrae un único *commodity* mineral. Para efectos comerciales, se asume que la mina es tomadora de precios en el mercado, y que estos evolucionarán en el tiempo según P (constante). Por otro lado, los ingenieros de mina y procesos de la operación han derivado que el gasto total en cada instante de tiempo es una función dada por $C(q, S)$ con $C(q, S) < P$, donde $q(t)$ es la producción del *commodity* mineral en el instante t . La mina paga un impuesto a las utilidades operacionales dada por un porcentaje τ de las mismas en cada instante de tiempo t , pudiendo descontar de dicho pago todo el gasto realizado en exploración E . El gasto asociado se relaciona con el descubrimiento de nuevas reservas $D(E)$ mediante $D(E) = \alpha \ln(E)$, con α una constante positiva. Suponiendo que no existen restricciones de capacidad, que la tasa de descuento en tiempo continuo de la empresa es r , que el LOM de la mina tampoco ha sido determinado y que en el presente las reservas del *commodity* mineral vienen dadas por S_0 .

- Formule el problema de optimización dinámica de la mina, especificando función objetivo y restricciones que deben considerarse.
- Determine la ecuación diferencial que la producción óptima de la mina debe satisfacer en cada instante de tiempo.

Solución

- El problema de optimización dinámica de la mina es:

$$\max_{q(t), T} \int_0^T e^{-rt} (1 - \tau) (P q(t) - C(q, s)) dt - \int_0^T e^{-rt} E dt$$

s. a.

$$\dot{S} = -q + \alpha \ln(E)$$

$$S(0) = S_0$$

$$D(t), S(t), q(t), T \geq 0$$

- Para resolver se plantea el Hamiltoniano en valor corriente:

$$\hat{H} = (1 - \tau) (P q(t) - C(q, S)) - E + v(\alpha \ln(E) - q(t))$$

Condiciones del principio del máximo:

i) Condición del máximo:

$$\max_{q(t)} \hat{H} \Rightarrow \hat{H}_q = (1 - \tau) (p - c_q) - v = 0$$

$$v = (1 - \tau) (p - c_q)$$

Se verifica mediante la condición de segundo orden:

$$\hat{H}_{qq} = -C_{qq} (1 - \tau) < 0$$

ii) Ecuación de estado:

$$\dot{s} = -q(t) + \alpha \ln(E)$$

iii) Ecuación adjunta:

$$\dot{v} = r v - \hat{H}_s$$

$$\dot{v} = r v + (1 - \tau) C_s$$

iv) Transversalidad:

$$\hat{H}(T) = (1 - \tau) (P q(T) - C(q(T), s(T))) - E + v(T) (\alpha \ln(E) - q(T)) = 0$$

Derivando i) respecto a t y reemplazando en iii):

$$-(C_{qq} \dot{q} + C_{qs} \dot{s}) (1 - \tau) = r (P - C_q) (1 - \tau) + C_s (1 - \tau)$$

$$-(C_{qq} \dot{q} + C_{qs} \dot{s}) = r (P - C_q) + C_s$$

Reemplazando en ii):

$$-(C_{qq} \dot{q} + C_{qs} (-\dot{q} + \alpha \ln(E))) = r (P - C_q) + C_s$$

Despejando \dot{q} :

$$\dot{q} = -\frac{r (P - C_q) + C_s + (\alpha \ln(E) - q(t)) C_{qs}}{C_{qq}}$$

Esta es una ecuación diferencial ordinaria para q , de la cual se obtiene la producción óptima $q^*(t)$.

De esta ecuación y la ecuación de estado se observa que ni la producción ni las reservas dependen del impuesto que se aplique a la mina.

Problema 12.2

Una empresa está buscando realizar un proyecto minero en un yacimiento que se conoce contiene S_0 unidades del *commodity* mineral de interés. Luego de un estudio de ingeniería la empresa ha determinado que la inversión de capital en $t = 0$ requerida para una capacidad de K , viene dada por $\phi(K) = \ln(K)$, se asume que las instalaciones están listas en $t = 0$. Por otro lado, se ha determinado que, debido a la presencia de economías de escala, el gasto total asociado a una producción q del *commodity* mineral vendrá dado por $C(q, S, K) = \frac{\gamma}{2} e^{-K} \frac{q^2}{S+1}$ donde S son las reservas remanentes. La empresa posee una tasa de descuento r y el precio esperado $P(t)$ es constante e igual a P para todo t .

El Estado ha determinado que para proyectos que exploten este tipo de *commodity* se les deberá aplicar un impuesto híbrido compuesto por un impuesto base *ad valorem* de tasa constante τ_2 y un impuesto a la renta de tasa constante τ_1 .

Plantee el problema de optimización y encuentre la capacidad óptima, el LOM y la producción de la operación.

Solución

El problema de optimización vendrá dado por:

$$\max_{q(t), T, K} -\ln(K) + (1 - \tau_1) \int_0^T e^{-rt} \left(P q(t) (1 - \tau_2) - \frac{\gamma}{2} e^{-K} \frac{q(t)^2}{S(t) + 1} \right) dt$$

$$\begin{aligned} \text{s.a.} \\ \dot{S}(t) &= -q(t) \\ 0 &\leq q(t) \leq K \\ S(0) &= S_0 \\ T, S(t), K &\geq 0 \end{aligned}$$

Si se asume que se ha encontrado el K óptimo, luego, el problema de optimización se reducirá a:

$$\max_{q(t), T} \int_0^T e^{-rt} \left(P q(t) (1 - \tau_2) - \frac{\gamma}{2} e^{-K} \frac{q(t)^2}{S(t) + 1} \right) dt$$

s.a.

$$\dot{S}(t) = -q(t)$$

$$0 \leq q(t) \leq K$$

$$S(0) = S_0$$

$$T, S(t), K \geq 0$$

Mediante control óptimo se tiene que el Hamiltoniano vendrá dado por:

$$\widehat{H} = P q (1 - \tau_2) - \frac{\gamma}{2} e^{-K} \frac{q^2}{S+1} - v q + \lambda (K - q)$$

De aquí, las condiciones del principio del máximo:

i) Condición del máximo:

$$\max_{q(t)} \widehat{H} \Rightarrow \widehat{H}_q = P (1 - \tau_2) - \gamma e^{-K} \frac{q}{S+1} - v - \lambda = 0$$

Se verifica mediante la condición de segundo orden:

$$\widehat{H}_{qq} = -\frac{\gamma e^{-K}}{S+1} < 0$$

ii) Ecuación de estado:

$$\dot{S} = -q$$

iii) Ecuación adjunta:

$$\dot{v} = r v - \widehat{H}_s$$

$$\dot{v} = r v - \frac{\gamma}{2} e^{-K} \frac{q^2}{(S+1)^2}$$

iv) Transversalidad:

$$\widehat{H}(T) = 0$$

v) KKT (Karush-Kuhn-Tucker):

$$\lambda(t) = \begin{cases} \lambda(t) & \text{si } 0 < t < T_1 \\ 0 & \text{si } T_1 < t < T \end{cases}$$

$$q(t) = \begin{cases} K & \text{si } 0 < t < T_1 \\ q(t) & \text{si } T_1 < t < T \end{cases}$$

vi) Restricción de Recursos:

$$S_0 = K T_1 + \int_{T_1}^T q(t) dt$$

De i) se obtiene:

$$v = P (1 - \tau_2) - \gamma e^{-K} \frac{q}{S+1}$$

Derivando en función del tiempo:

$$\dot{v} = -\gamma e^{-K} \left(\frac{q(S+1) - q\dot{S}}{(S+1)^2} \right) = -\gamma e^{-K} \left(\frac{\dot{q}}{S+1} + \frac{q^2}{(S+1)^2} \right)$$

Reemplazando en iii):

$$-\gamma e^{-K} \frac{\dot{q}}{S+1} - \gamma e^{-K} \frac{q^2}{(S+1)^2} = r P (1 - \tau_2) - r \gamma e^{-K} \frac{q}{S+1} - \frac{\gamma}{2} e^{-K} \frac{q^2}{(S+1)^2}$$

$$\rightarrow r P (1 - \tau_2) + \gamma e^{-K} \frac{\dot{q}}{S+1} + \frac{\gamma}{2} e^{-K} \frac{q^2}{(S+1)^2} - r \gamma e^{-K} \frac{q}{S+1} = 0$$

Lo que nos da un sistema de ecuaciones diferenciales dado por:

$$\begin{cases} r P (1 - \tau_2) + \gamma e^{-K} \frac{\dot{q}}{S+1} + \frac{\gamma}{2} e^{-K} \frac{q^2}{(S+1)^2} - r \gamma e^{-K} \frac{q}{S+1} = 0 \\ \dot{S} = -q \end{cases}$$

Sistema cuya solución viene dada por:

$$\begin{cases} S(t, \tau_2, K) = -1 + A e^{rt} + \frac{A^2}{4B} e^{c_1 t} + B e^{c_2 t} \\ q(t, \tau_2, K) = -r A e^{rt} - \frac{A^2}{4B} C_1 e^{c_1 t} + B C_2 e^{c_2 t} \end{cases}$$

Con A y B constantes tales que:

$$C_1 = \frac{\gamma r - \sqrt{\gamma r (\gamma r + 2 p (1 - \tau_2) e^{-K})}}{\gamma}$$

$$C_2 = \frac{\gamma r + \sqrt{\gamma r (\gamma r + 2 p (1 - \tau_2) e^{-K})}}{\gamma}$$

Luego, se tienen las siguientes 4 ecuaciones:

$$\begin{cases} S(T, \tau_2, K) = 0 \\ S(T_1, \tau_2, K) = S_0 - K T_1 \\ q(T_1, \tau_2, K) = K \\ \hat{H}(T) = 0 \end{cases}$$

Con estas ecuaciones es posible resolver $A(\tau_2, K), B(\tau_2, K), T_1(\tau_2, K), T(\tau_2, K)$ y $q^*(t, \tau_2, K)$.

Ahora, se debe encontrar la capacidad K óptima por medio de resolver el siguiente problema:

$$\max_K -\ln(K) + (1 - \tau_1) VAN(\tau_2, K)$$

Con:

$$\begin{aligned} VAN(\tau_2, K) = & \int_0^{T_1(\tau_2, K)} e^{-rt} \left(P K (1 - \tau_2) - \frac{\gamma}{2} e^{-K} \frac{K^2}{(S_0 - K t) + 1} \right) dt \\ & + \int_{T_1(\tau_2, K)}^{T(\tau_2, K)} e^{-rt} \left(P q(t, \tau_2, K) (1 - \tau_2) - \frac{\gamma}{2} e^{-K} \frac{q(t, \tau_2, K)^2}{S(t, \tau_2, K) + 1} \right) dt \end{aligned}$$

Derivando con respecto a K se obtiene:

$$\frac{1}{K} = (1 - \tau_1) \frac{\delta}{\delta K} VAN(\tau_2, K)$$

Con cuya ecuación es posible despejar $K(\tau_1, \tau_2)$.

Se puede apreciar que el impuesto *ad valorem* no solo afecta al LOM de la mina, sino que también afecta el tiempo en que la mina puede extraer y procesar a la máxima producción K . También se puede apreciar que la capacidad máxima no solo se ve afectada por el impuesto a la renta, sino que también por el impuesto *ad valorem*.

Parte IV

Problemas Estocásticos

Capítulo 13: Fuentes de incertidumbre en minería

En el presente capítulo se estudiarán distintas fuentes de incertidumbres en minería, tanto internas como externas a la operación, con especial atención en los movimientos de los precios de los *commodities* minerales. En este último caso se discutirá dónde se trazan en la práctica los precios, así como se detallará el concepto de volatilidad y sus consecuencias en la explotación de minas. Se discutirá asimismo la derivación del precio en dos horizontes temporales: corto y largo plazo, así como la forma en que las curvas de oferta y demanda afectan su comportamiento para luego introducir los distintos modelos de procesos utilizados para la estimación de precios.

13.1 Fuentes de incertidumbre en un proyecto minero

La incertidumbre se refiere a la inexistencia de certeza total sobre alguna variable o parámetro en la estimación. De esta manera, debido a que en minería en general el ambiente de trabajo dista de ser uno de certidumbre absoluta, los problemas – incluido el de optimización de minas – se deben plantear y resolver como si estuvieran insertos en un ambiente impredecible. Es por esto que es necesario considerar todas las posibles fuentes de incertidumbre relevantes, para la toma de decisiones respectivas a una inversión.

Aunque en la práctica existe un número infinito de variables inciertas, en general al analizar un problema en minería se debe plantear el listado de incertidumbres que son relevantes a incluir en el problema. Como ejemplo, Guzmán (2011a) menciona que, en el caso de evaluaciones de

proyectos mineros bajo incertidumbre, el primer paso corresponde precisamente a determinar cuáles son las incertidumbres relevantes a considerar, es decir, aquellas incertidumbres que se considera tienen un mayor impacto sobre la inversión o ganancias futuras, de manera que se logre simplificar el análisis a realizar (sin perder, por otro lado, elementos relevantes para el análisis).

Para el caso particular de la explotación de recursos minerales, Guzmán (2011a) recomienda identificar las variables que se consideren relevantes las cuales podrían llegar a tener los siguientes tres alcances:

1. Afectar la viabilidad económica del proyecto.
2. Modificar la envolvente económica de la mina resultante.
3. Cambiar la tasa y secuenciamiento óptimo.

Si no se tiene un objetivo bien definido *a priori*, existe el peligro de incluir variables que resulten irrelevantes para el análisis (lo que aumenta los costos del mismo), o, más importantemente, de no incluir algunas otras que sí pudieran serlo (lo que podría llevar a tomar decisiones equivocadas).

Desafortunadamente, no todos los recursos mineros pueden ser evaluados con las mismas variables inciertas. De hecho, la identificación tiene valor únicamente si es realizada sobre una base particular para cada recurso. Esto, debido a las características únicas de cada depósito, tales como ley, mineralogía, país en el que se encuentra ubicado, tecnología a utilizar, características propias de la empresa o mercado en el que participa, etc. Luego, mientras una incertidumbre pudiera correctamente ser considerada para la evaluación de una operación podría estar incorrectamente siendo considerada en la evaluación de otra.

Aun así, existen ciertas incertidumbres – como el precio del *commodity* principal extraído, que se discutirá en extenso en el resto del capítulo – que suelen impactar en todos los procesos de evaluación económica de una mina. La clave está entonces en ser capaz de complementar a las incertidumbres que siempre deberán ser incluidas con aquellas que pudieran considerarse específicas a la contingencia de la operación misma.

Es por esto que para enfrentar las fuentes de incertidumbre se recomienda hacerlo con un equipo multidisciplinario luego de identificarlas previamente. Luego de su identificación, se

recomienda clasificarlas. De hecho, en los proyectos mineros las fuentes de incertidumbre se pueden descomponer en dos: externas e internas. Scoble y Kazakidis (2003) proponen una lista de posibles fuentes de incertidumbre en la empresa minera, la que se reproduce esquemáticamente en la Figura 13.1.

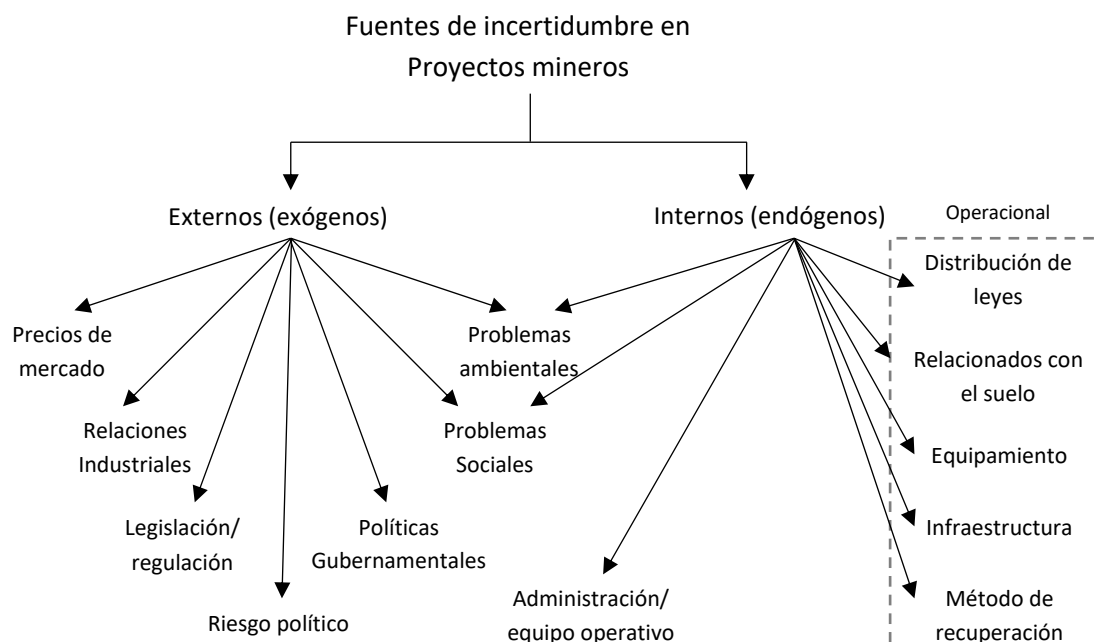


Figura 13.1. Tipos de incertidumbre en proyectos mineros (Kazakidis y Scoble, 2003)

13.1.1 Fuentes de incertidumbre externas

Las fuentes de origen externa son aquellas ajenas a la empresa en cuestión. En minería, tal vez la principal fuente de incertidumbre externa sea el precio de los *commodities* minerales (al menos en mercados que se pueden considerar perfectamente competitivos) y el tipo de cambio, razón por la cual muchas veces se asocia a las incertidumbres externas como de mercado. Aun así, existen múltiples fuentes de incertidumbres externas además de las de mercado, tales como políticas, legislación, sociales, ambientales, así como aquellas relacionadas con la industria a la cual pertenece la empresa.

En la Tabla 13.1 se presentan las incertidumbres por tipos principales y sus ejemplos más comunes. Esta lista ha sido elaborada por el autor en base a más de 10 años de experiencia aplicando análisis de riesgos en la industria minera. Aun así, no puede ser considerada en ningún caso exhaustiva sino solo referencial.

TIPO	INCERTIDUMBRES MÁS COMUNES
Mercado	Precio del <i>commodity</i> principal, precio de subproductos, tasa de cambio, precios de energía y otros insumos críticos, costos de mano de obra, monto de la inversión, tasa de descuento
Financiera	Tasa de interés, disponibilidad de recursos financieros
Política	Expropiación de recursos, estabilidad gubernamental
Legislación	Cambio en tasa de impuesto y/o royalties, cambio en leyes laborales
Sociales	Demandas de la comunidad, estabilidad social
Ambientales	Cambio en la regulación (material particulado, gaseoso y otros), permisos ambientales
Comerciales	Cambio en especificaciones de compra
Industriales	Guerra de precios, producción del resto de productores, confiabilidad de los proveedores, entrada de nuevos productores, poder de mercado de los clientes, sustitución.
Tecnológicas	Mejoramiento de la tecnología actual, capacidad de tratamiento de nuevo mineral

13.1.2 Fuentes de incertidumbre internas

En cuanto a las incertidumbres de origen internas, puede decirse que estas son dictadas por los activos (incluido el depósito obviamente) y organización propia de la empresa. Los principales tipos de fuentes de incertidumbre interna son: geológica, geotécnica, metalúrgica, operacionales, administración y organizacionales.

En la Tabla 13.2 se detallan las principales fuentes de incertidumbre internas en la minería de acuerdo a Guzmán (2011b).

Tabla 13.2. Fuentes de incertidumbres internas. Fuente: (Guzmán, 2011b).

TIPO	INCERTIDUMBRES MÁS COMUNES
------	----------------------------

Geológica	Distribución de leyes, tonelaje de reservas, continuidad de las unidades geológicas, variabilidad del índice de Bond
Geotécnica	Colapso de roca, estallido de roca, falla en paredes de la mina
Metalúrgica	Recuperación (%), tiempo de procesamiento (cinemática) calidad del producto
Operacionales	Disponibilidad de equipos, disponibilidad de recursos humanos, falla en infraestructuras, variabilidad de la mezcla a planta, disponibilidad de insumos, ambiental, dilución, productividad de equipos, condiciones climáticas
Proyectos	Atraso de proyectos, <i>Ramp-up</i> , Capacidad de extracción, Capacidad de procesamiento
Organizaciones	Huelgas, productividad laboral

A modo de ejemplo, la recuperación metalúrgica utilizada en cada operación minera es una función distinta para cada espécimen mineral, pero hay que entender que esa recuperación proviene de un análisis de regresión el cual tiene una gran cantidad de variables explicativas las cuales fueron ajustadas a una curva. Este ajuste no es perfecto, por lo cual existe incertidumbre en torno a ese valor; es decir, cuando se menciona que un depósito es bien conocido y su recuperación corresponde a un 87%, en realidad será de $87\% \pm \varepsilon$, donde ε seguirá una distribución de probabilidades cuya variabilidad dependerá del nivel de incertidumbre propia del modelo metalúrgico.

Por su parte, para el caso de la incertidumbre de carácter geológico, la ley de un bloque es estimada mediante técnicas geoestadísticas, y a mayor densidad de malla menor es el error de estimación. Debido a esto para poder tomar una decisión es necesario hacer un *trade-off* entre los costos asociados en utilizar una malla más densa y la baja en el nivel de incertidumbre que se estaría ganando al aumentar la densidad de información geológica.

Dentro de las incertidumbres internas más relevantes en todo proyecto minero se encuentra la incertidumbre geológica, y en particular la asociada a la categorización de los recursos minerales. Los recursos son clasificados como probados y probables, de los cuales los primeros tienen un mayor grado de confianza en su conocimiento para poder hacer un plan minero. A medida que transcurren los períodos, la cantidad de reservas pueden variar tanto en descubrimiento de nuevas reservas, mayor conocimiento de recursos medidos, y mayor o menor clasificación de recursos como reservas de acuerdo con las condiciones técnico-económicas presentes en la mina.

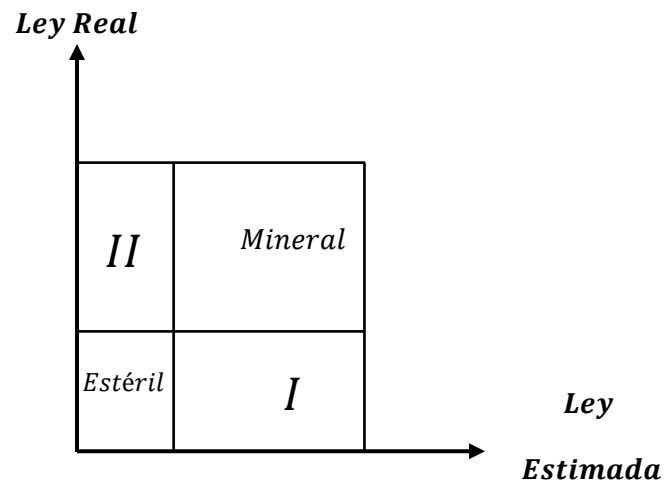
RECUADRO 14.1

**EFFECTO EN EL BENEFICIO DADA UNA SECUENCIA DE EXTRACCIÓN EN BASE A LA INCERTIDUMBRE
GEOLÓGICA**

El autor se enfrentó en 2013 al siguiente problema en el cual la incertidumbre geológica cumplía un rol primordial.

Una empresa en Chile se encontraba buscando revisar su elección de la malla de sondajes óptima a elegir con el fin de minimizar el costo de exploración y producción al que incurría en el caliche. Por mucho tiempo se había estado usando una malla de 50x50 metros, sin ningún fundamento específico que explicara el motivo de esta densidad de malla. El problema surgía porque con la malla actual la variabilidad en la ley de cada bloque de 50x50 metros era alrededor de 20%. Esto significaba que si la ley promedio de un bloque indicaba un valor de 400 ppm, con el 95% de confianza se tendría una ley de entre 240 - 560 ppm, lo que claramente mostraba una gran incertidumbre y variación al valor esperado.

Es posible representar la diferencia de la ley estimada con la ley real de la siguiente manera:



Una vez definida la ley de corte, existe material que era bien clasificado como mineral, sobre la ley de corte, tanto en estimación como en la realidad, y material bien clasificado como lastre, bajo ley de corte en ambos casos. Pero en dos de las cuatro regiones puede clasificarse erróneamente el material debido a la incertidumbre geológica, lo que conllevaba a un costo. De hecho, si se estima mal un bloque comparado a la realidad, se puede caer en dos tipos de errores:

Error tipo I: La ley estimada es mayor a la ley de corte, pero la real es menor, lo que se traduce al envío de material sin valor a la planta, lo que conlleva costos sin obtención de beneficios.

Error tipo II: La ley estimada es menor a la ley de corte, pero la real es mayor, lo que se traduciría en no enviar mineral con valor a la planta, dejando de obtenerse ese beneficio adicional.

Por lo anterior, la densidad (d) de la malla de sondajes afecta de manera directa al costo C producido por el error tipo I y el error tipo II, al influir en la variabilidad de la estimación de las leyes estimadas por sondajes. Además de este costo, se consideró el costo de exploración (E) que trae asociado cada tamaño de malla a utilizar, siendo más costoso al ser mallas de menor tamaño, al crecer el número de sondajes para menor densidad de malla. Con esto finalmente se obtuvo una función de costos total de:

$$E[C(d)] + E(d)$$

En la ecuación anterior, se formuló el problema de minimización de costos, considerando el valor esperado del costo asociado al tratarse de errores estadísticos. Tras el análisis, se obtuvo una malla óptima de 100x100 metros que minimizaba el costo de exploración y clasificación, con lo cual la empresa se ahorró alrededor de 2,5 MUSD al año, así como la posibilidad de explorar casi 4 veces más rápido al utilizar mallas de mayor densidad!

De lo anterior, se puede apreciar como al aprovechar las incertidumbres se pueden tomar mejores decisiones en un proyecto minero. Otra forma alternativa de resolver este problema habría sido determinar la malla óptima usando el valor esperado de la ley, lo que hubiese dado resultados distintos, y probablemente sub-óptimos.

13.2 Relevancia de la incertidumbre de precios de *commodities* en la explotación minera

Dentro del problema de la optimización minera, uno de los principales factores de incertidumbre es justamente el precio que tomarán los *commodities* en el futuro, ya que es imposible conocer de manera exacta a cuánto corresponderá el precio de cualquier metal tranzado durante el próximo año, ni menos cuánto va a ser el precio en diez años más.

Sin embargo, es sabido que sin ese precio futuro no es posible realizar un plan minero. Entonces, la pregunta es: ¿De qué manera es posible tomar decisiones hoy sabiendo que estas van a tener un impacto en el largo plazo y que a su vez estas decisiones no serán modificables de manera sencilla en el largo plazo sobre una variable (como el precio) desconocida de forma precisa?

Esto aplica para cualquier variable que tenga incertidumbre en minería, tales como ley, recuperación, costos, etc. Ya que la existencia de estas fuentes de variabilidad (sean internas o externas) afectan la planificación minera y toma de decisiones. Algunas variables pueden ser más críticas que otras, lo que dependerá generalmente del depósito y nivel de información que el dueño tenga. Sin embargo, la aplicación demuestra que comparada con el precio del *commodity* principal de una mina, las demás variables suelen ser de segundo o incluso tercer orden.⁷⁰

Para la evaluación de proyectos bajo incertidumbre por lo general se utiliza la regla del *VAN*, tomando como correctas las decisiones que tengan como consecuencia un *VAN* positivo, es decir, aquella cuyas ganancias futuras renten por lo menos lo invertido (considerando la tasa de descuento de la compañía). Para evaluar las decisiones de inversión en minería, se suele

⁷⁰ El autor ha podido comprobar, por ejemplo, que los proyectos mineros de cobre más del 70% de la variabilidad total de un proyecto viene dada precisamente por el precio del cobre.

reemplazar en la práctica los parámetros con incertidumbre por valores esperados o pronósticos de estos, lo que conlleva a un resultado muchas veces subóptimo ya que no se está considerando la incertidumbre en la toma de decisiones. Esto se conoce como *VAN* determinístico, y constituye una de las mayores falacias de la minería ya que se asume generalmente que el *VAN* evaluado en los valores esperados de sus variables (leyes, recuperación, costos, precios, etc.) es equivalente al valor esperado del *VAN* (Guzmán, 2011a).⁷¹

Bajo un ambiente de incertidumbre, el problema minero más real consiste en maximizar el *VAN* esperado y no el *VAN* en base a parámetros esperados, tal como mencionan Auger y Guzmán (2010), quienes estudiaron el potencial de pérdida económica (en términos de *VAN*) producida por la incertidumbre del precio del cobre en 51 proyectos cuyo inicio de operación se produjo entre 1950 y 2000. Los resultados de esta investigación arrojaron que un correcto pronóstico del precio implicaba generalmente modificar el *timing* y capacidad de producción en la mayoría de los casos (para poder aprovechar de esta forma los precios), logrando finalmente un *VAN* un 49% superior a lo obtenido dado el *timing* de entrada realizado y la capacidad finalmente instalada por los proyectos.

Aunque no es imposible conocer el valor del precio de un *commodity* a futuro, una correcta aplicación de técnicas de evaluación bajo incertidumbre sí permiten capturar parte del *VAN* que sin considerar incertidumbre en el precio de otra forma se perdería. De hecho, según estimaciones de Guzmán (2011a) la captura podría llegar a 15% y hasta 40% con respecto a la brecha de máximo *VAN* potencial (es decir, el que se obtendría en caso de resolver la incertidumbre del precio).

Aunque muchas industrias de minerales se podrían considerar afortunadas hasta cierto punto en comparación a otras industrias no minerales, debido a que es posible operar en base a un plan minero creado en base a la producción óptima, ya que no existe la problemática de la incertidumbre en la demanda, puesto que todo lo producido siempre será vendido. Mientras este típicamente es el caso de la mayoría de los metales que se tranzan en la bolsa, en general no ocurre en cualquier tipo de industrias, siendo esta una de las mayores dificultades existentes operacionalmente para las empresas, pues deben planificar sin conocer la producción física que

⁷¹ La desigualdad de Jensen (ver Capítulo 7) permite invalidar esta premisa.

podrán vender en el mercado (lo que ocurre por ejemplo en la industria automotriz, inmobiliaria o agrícola).

Por su parte, en muchas industrias de minerales siempre será posible vender lo producido, por lo que no hay incertidumbre sobre la cantidad a vender. Desafortunadamente, las mineras enfrentan la incertidumbre del precio de venta, el que en general es altamente incierto y volátil.

Mientras las compañías mineras son, en general, simples espectadores de la variación del precio en el tiempo, en otras industrias no se tiene la seguridad sobre la cantidad a vender, pero sí es posible influir en la determinación del precio al cual se venderá el producto.⁷²

Desde el punto de vista de la ingeniería, y en particular de la planificación minera, es considerablemente más simple optimizar un plan de producción en un ambiente donde todo lo producido será vendido en comparación a un ambiente donde una variable de producción vendible es incierta.

Mientras las grandes preguntas de las industrias no-minerales son si será posible vender tal o cual cantidad en minería la pregunta típica se refiere a determinar la cantidad óptima a producir dados los precios de venta (y otras características internas tales como los costos de producción).

13.3 Mercados de *commodities*

Como detallan Tilton y Guzmán (2016), los mercados están definidos por la naturaleza de sus productos y el área geográfica donde ocurre la compra venta del producto. Para el caso de los *commodities* minerales, estos son transados de diferentes maneras en espacios previamente institucionalizados, los cuales reflejan el tamaño de sus mercados, la facilidad de almacenamiento y transporte y las medidas de estandarización.

Los cuatro tipos de mercados minerales en cuanto a la forma que se transan sus productos son:

13.3.1 Bolsas especializadas de *commodities*:

En estos mercados se ofrecen ventas presentes y futuras. Los participantes de los mercados *spot* compran y venden a un precio actual con envío inmediato, mientras que las empresas que

⁷² Los dos elementos que explican el poder o no imponer precios son el poder de mercado y la diferenciación de productos (Tilton y Guzmán, 2017).

compran o venden a futuro acuerdan una cantidad del *commodity*, un precio y un horizonte de tiempo en el cual se realizará la transacción física.

- Bolsa de metales de Londres (LME): Aquí se transa aluminio, cobre, estaño, níquel, zinc, plomo, cobalto y molibdeno, entre otros.
- Bolsa de Shanghái: Comercia aluminio, cobre, plomo, níquel, estaño y zinc.
- New York Mercantile Exchange (NYMEX): Posee dos divisiones. En la correspondiente a materias primas (COMEX) se transa aluminio, cobre, oro, plata, platino, paladio y uranio.

13.3.2 *Over the counter* (OTC):

Este tipo de mercados implica el comercio directo entre los participantes (productores y consumidores), por lo que únicamente se ven involucradas el comprador y vendedor, sin existir un mecanismo común de intercambio. De todas maneras, como en todas las bolsas de intercambio de *commodities*, los precios son fijados por los mercados OTC para asegurar el equilibrio entre la oferta y la demanda. Algunos ejemplos son:

- The London Bullion Market Association (LBMA).
- The London Platinum and Palladium Market (LPPM).

13.3.3 Precios del productor:

En algunos mercados, en particular aquellos donde la cantidad de productores es pequeña, estos simplemente anuncian el precio al que venden el *commodity*. Por lo general este valor es casi el mismo para todos los productores, por lo que en este tipo de mercados la volatilidad tiende a ser menor. Solo algunos productos minerales como diamantes de gema, metales del grupo platino, potasio y boratos se continúan transando de esta manera.

13.3.4 Negociación de precios:

Este tipo de mercado se basa en contratos bilaterales entre compradores y vendedores, donde no existe alguna institución que actúe como mediadora de la transacción. También puede ocurrir que existan intermediarios entre productores y consumidores. Algunas revistas industriales (como por ejemplo Platts Metals Week o Roskill) juegan también un rol importante

en este mercado, ya que en estas se publican precios de referencia (basados en encuestas confidenciales), los cuales ayudan a regular el equilibrio entre la oferta y demanda.

13.4 Derivación conceptual del precio en la industria de los *commodities* minerales

En la próxima sección se retomará el estudio de la incertidumbre del precio a través de algunos procesos estocásticos de Itô, estudiados en el Capítulo 7. Con objeto de entender las implicancias prácticas de dichos modelos, y cuan esperable es que se ajusten a los precios de los *commodities* minerales en la realidad, en esta sección se presentan las bases conceptuales que deben satisfacer los precios.

A modo de ejemplo, en la Figura 13.2 se presenta la evolución del precio del cobre desde 1970 en base anual y real (moneda de 2017). De aquí es posible notar que las fluctuaciones en el corto plazo son significativamente mayores que en el largo plazo (cuando se toman promedios de 10 o más años). Esta volatilidad muchas veces genera problemas, especialmente para estabilizar los mercados de los *commodities*. En esta figura es posible advertir que, hasta 2003, la tendencia del precio en el largo plazo había sido descendiente para el precio real, revirtiendo desde 2003 dicha tendencia (Tilton y Guzmán, 2016).

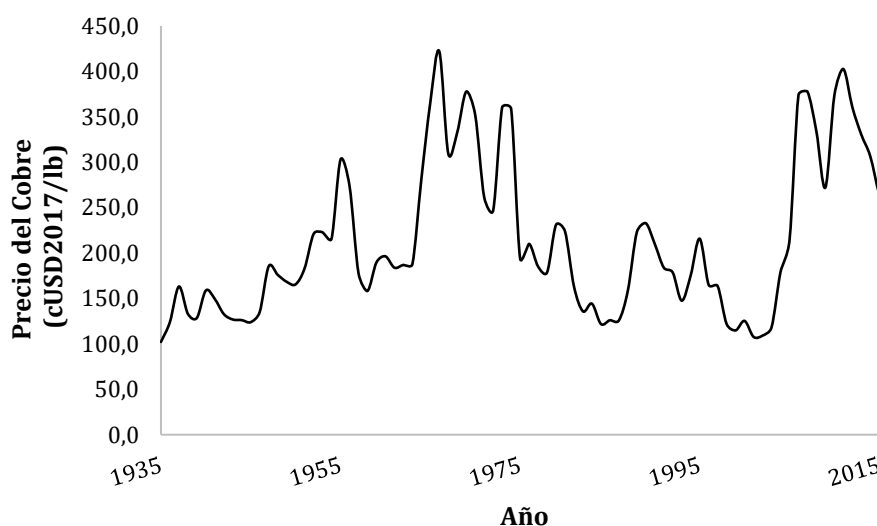


Figura 13.2. Evolución del precio del cobre. Fuente: Elaboración propia en base a Cochilco (2017)

Para entender la evolución de una serie de precios como la dada en la Figura 13.2 es necesario entender en primer lugar el tipo de estructura de mercado, es decir, si el mercado puede ser considerado como perfectamente competitivo, monopólico o intermedio entre ambos (oligopólico). Puesto que gran parte de los *commodities* minerales de mayor envergadura en cuanto a ventas pueden considerarse pertenecen a mercados perfectamente competitivos, a continuación se limita la exposición precisamente a este caso.

En los mercados perfectamente competitivos, el precio de un producto se calcula de acuerdo al equilibrio entre la curva de oferta (típicamente representada por los costos marginales de producción y venta) y demanda, o que, no obstante, dependen del horizonte a considerar. En las siguientes sub-secciones se presenta la determinación conceptual del precio de un *commodity* mineral tanto en el corto como largo plazo. Para mayores antecedentes de esta se puede consultar Tilton y Guzmán (2016).

13.4.1 El precio de los *commodities* en el corto plazo

Para responder cómo se deriva el precio de un *commodity* mineral en el corto plazo en primer lugar se debe construir la curva de oferta (en la práctica conocida como curva de costos C1), la cual se puede observar a continuación en la Figura 13.3. Básicamente esta curva representa los costos de producción (o *cash cost*) de cada operación, los que se presentan con descuentos por créditos de los subproductos que la mina pudiera producir. En esta figura se presenta con una línea punteada vertical la capacidad de producción de la industria, la que señala el límite efectivo de producción en el corto plazo.

Es relevante mencionar que la curva de oferta para el corto plazo no necesariamente corresponde exactamente a la curva de *cash cost*. De hecho, como se discute en Guzmán (2008a), en general la curva de costos marginales (que teóricamente corresponde a la curva de oferta en un mercado perfectamente competitivo) es conceptualmente distinta a la curva de *cash cost*, pues esta representa más bien costos medios más que costos marginales de producción.

En minería, el *cash cost* o C1 corresponde a aquel costo realizado en efectivo una vez que la faena se encuentra en operación, y que incluye los costos directos de mina, molienda, concentración, transporte de concentrado, maquila, entre otros, menos los ingresos generados por la venta de subproductos. De esta forma, el *cash cost* de una operación minera permite proyectar el costo de producir una tonelada, libra u onza de algún *commodity* mineral,

entregando el C1 la posición estratégica y competitiva de la producción de un *commodity* (Cantallops *et al.*, 2015).

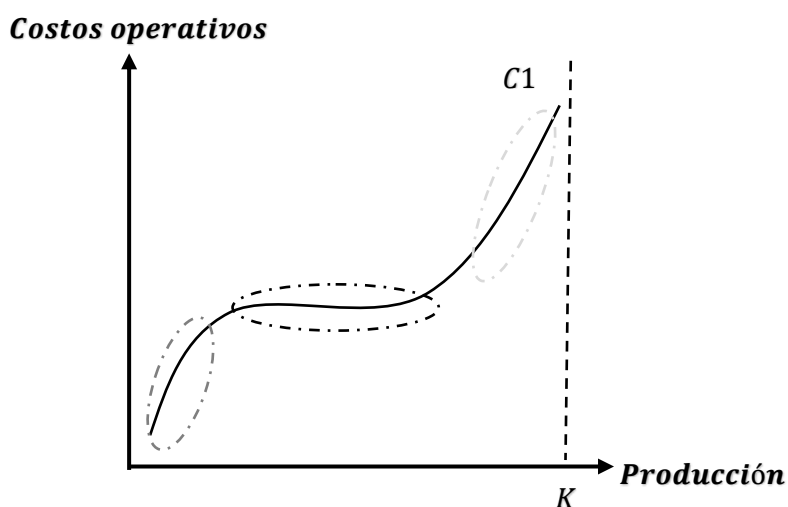


Figura 13.3. Curva de oferta a Corto Plazo

Realizando un análisis a nivel mundial en 2009, en la Figura 13.4, los países que representaban una mejor posición estratégica respecto al resto fueron Indonesia, Perú y Estados Unidos. De hecho, estos son los únicos países con *cash costs* menores a la media, la que se encontraba en alrededor de 99 (*cUS\$/lb*). Es decir, para producir una libra de cobre, estos países gastaban menos que el promedio de los principales países productores de cobre, por lo que debieran presentar una ventaja comparativa con el resto de los productores debido a que en caso de una caída del precio del cobre ellos tienen holgura respecto al resto para continuar generando utilidades.

En la curva de la Figura 13.4 se puede apreciar, en general, que existe relativamente poca producción a muy bajo costo (típicamente el primer cuartil de la curva), mucha producción a un costo intermedio (segundo y tercer cuartil) y no tanta producción a costos crecientes (cuarta producción) los cuales van creciendo rápidamente a medida que la curva de oferta se comienza a acercar a la capacidad de producción de la industria *K* (línea vertical punteada en la Figura 13.3).

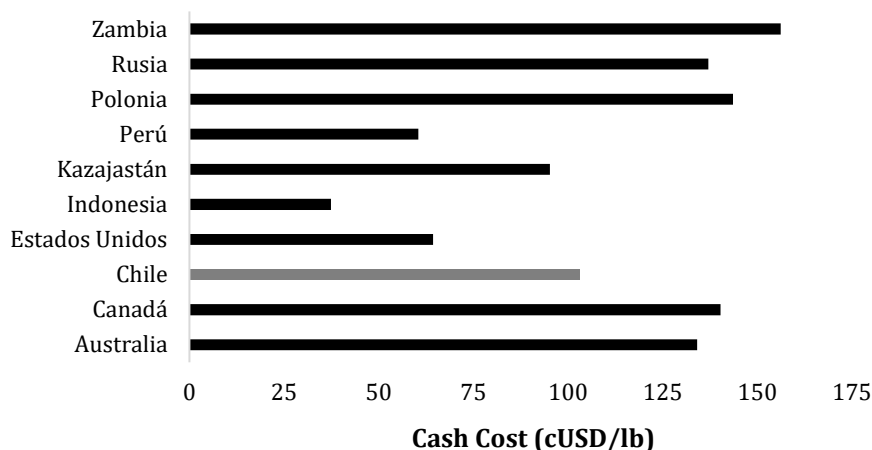


Figura 13.4. Cash cost 2009 Principales países productores de cobre. Fuente: Brook Hunt (2007)

En la industria minera, la determinación de la oferta depende principalmente de las siguientes variables (Guzmán, 2008b):

- El precio del *commodity*: un aumento en el precio implica un aumento en el beneficio, pero una disminución del precio impacta negativamente a los productores con altos costos de caja.
- El costo de producción: un aumento en los costos produce un impacto negativo en las utilidades, por lo que impacta negativamente en la curva de oferta (particularmente en la de los productores con mayores *cash cost*).
- El cambio tecnológico y tiempo de operación de la mina: al incidir negativamente en los *cash cost*, repercuten también de manera negativa en la curva de oferta. Esto se debe a que las faenas que llevan más tiempo en operación manejan infraestructura más antigua y menores leyes, sumando – de acuerdo a estudios del autor – alrededor de 5 centavos de dólar por cada 10 años de operación.
- La estructura del mercado: mientras menor sea la cantidad de productores que manejan el mercado del *commodity*, mayor será su poder de mercado.
- Las actividades gubernamentales: el cambio de regulaciones medioambientales, impuestos y *royalties* impactan de manera negativa la curva de oferta, de la misma manera que incentivos a la inversión afectan de manera positiva.
- La paralización de la producción por razones fuera de control de la empresa.

Para determinar el precio a corto plazo, luego de construida una curva de oferta de un periodo de tiempo específico (mediante recopilación de información de mercado), se debe construir una curva de demanda de manera teórica a partir de un consumo dado por una cantidad Q . Esta curva de demanda (D_0 en la Figura 13.5), intercepta la curva de oferta en un punto (el cual es la cantidad producida previamente mencionada), relacionando esta cantidad Q a un precio a corto plazo tal como se muestra en la Figura 13.5.

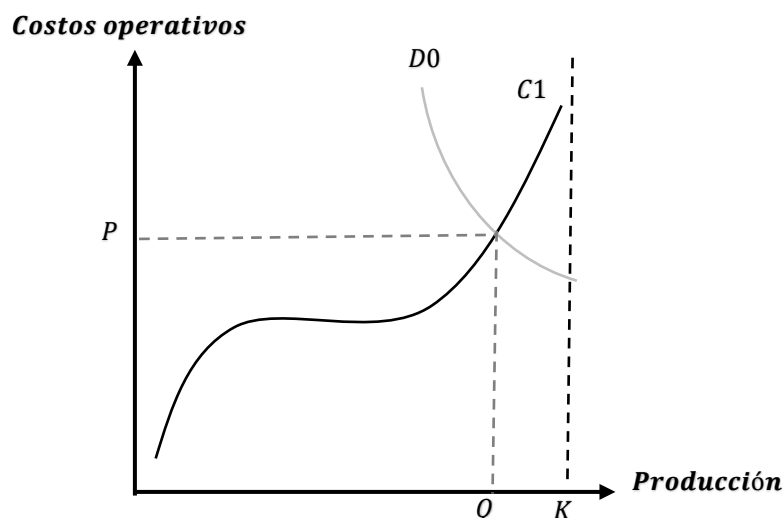


Figura 13.5. Curva de oferta y demanda en el corto plazo

Ahora, analizando la sensibilidad del precio respecto a la demanda, es importante destacar que un cambio en la demanda en el corto plazo se puede traducir en un cambio significativo en el precio. Esto queda en evidencia en la Figura 13.6, pues al mover ligeramente la curva de demanda a la izquierda (D_1) o hacia la derecha (D_2) el precio cambia significativamente. Esto ocurre debido a que, cuando la curva de oferta se acerca a la restricción de capacidad, esta se vuelve inelástica por lo que la sensibilidad del precio a la demanda aumenta considerablemente. Debe notarse que en muchos *commodities* minerales, la curva se suele posicionar cerca de la capacidad de producción, por lo que en estos el precio varía significativamente como lo anticipa este modelo conceptual.

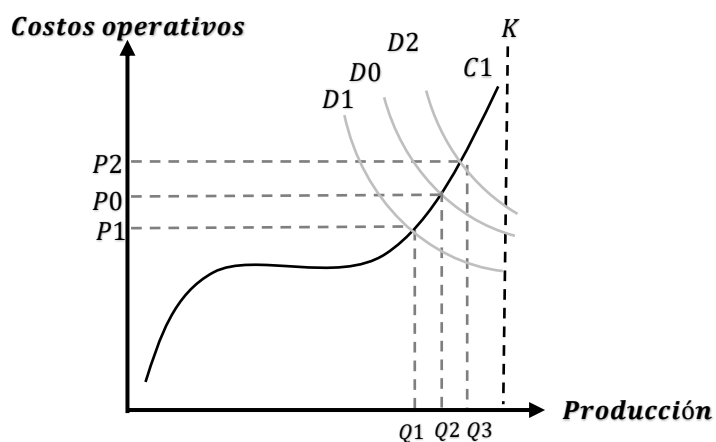


Figura 13.6. Sensibilidad en el precio de corto plazo

En la vida real, sin embargo, la curva de oferta no es conocida de manera cierta, ya que, si bien es posible obtener una estimación en los costos, la información sobre los costos reales no es completamente confiable (pues la mayoría de las operaciones no los publican). Por otro lado, la demanda tampoco es conocida de manera precisa, ya que esta curva está construida de manera abstracta y teórica en base a recopilación de información de mercado. Por lo tanto, solo es posible estimar ambas curvas, pero no conocerlas de manera cierta. Esto se traduce que en la práctica solo es posible estimar el precio con cierto grado de error, sumando este error a la incertidumbre del precio (por sobre aquella asociada a la evolución futura de la oferta y demanda).

13.4.2 El precio de los *commodities* en el largo plazo

En el largo plazo, la curva de oferta es distinta a la de corto plazo. Esto se explica principalmente debido a que en el largo plazo no existen restricciones de capacidad (por definición en el largo plazo la capacidad es parte de los factores que las empresas pueden variar). De hecho, sería teóricamente posible entrar con todos los proyectos conocidos en la medida que estos fuesen rentables. Aunque los costos de las operaciones (que en el caso del largo plazo se refieren a costos totales o C3 más costos de capital requeridos para entrar a producir) van aumentando, su tasa de crecimiento, como se aprecia en la Figura 13.7, es baja. Esto debido a que la curva se encuentra lejos de la restricción de capacidad y geológicamente existe una gran concentración de minerales de calidades marginales.

En el largo plazo, aunque no existe una restricción de capacidad activa sí existe una restricción de recursos conocidos (aquellos que aún no se han descubiertos o no se han levantados como proyectos se asume no alcanzarán a entrar en el largo plazo, y requerirán en general un horizonte mayor, conocido como “muy largo plazo”). Esto se aprecia por medio de la línea vertical punteada *R* en la Figura 13.7.

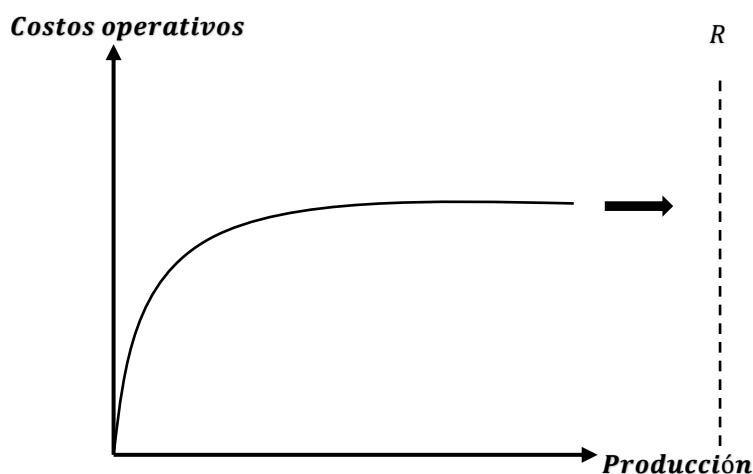


Figura 13.7. Curva de oferta a largo plazo

Es posible observar en la Figura 13.8 que la demanda en el largo plazo puede variar de manera significativa, pero debido a que la curva de oferta es horizontal en un tramo extenso (donde típicamente se mueve la demanda), la variación en el precio es baja. Es decir, para valores completamente distintos de demanda (y oferta) se obtienen precios prácticamente idénticos. De esta manera, es posible concluir que mientras que en el corto plazo el determinante del precio en un *commodity* mineral es la demanda, en el largo plazo es la oferta Tilton y Guzmán (2016).

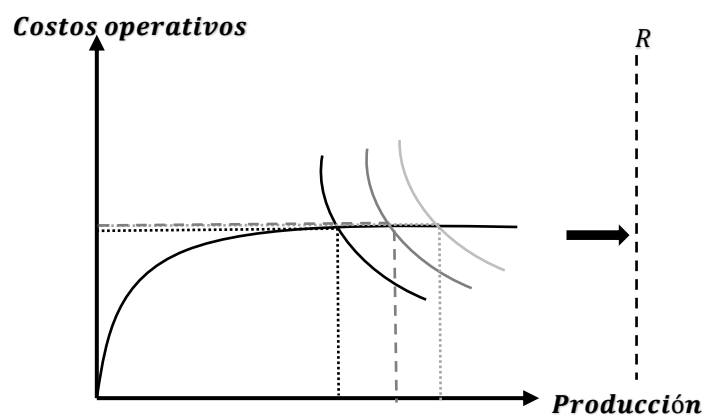


Figura 13.8. Sensibilidad en el precio por la curva de demanda

En la práctica no es posible, sin embargo, observar la curva de oferta de largo plazo por lo que esta debe estimarse. Para esto, es necesario estimar los costos de producción y de capital, pero a pesar de que tampoco es posible tener exactitud absoluta sobre estos valores son bastante más sencillos de estimar que los correspondientes a la curva de demanda. Por lo tanto, la incertidumbre en el precio a largo plazo es menor que la incertidumbre en el precio de corto plazo.

A modo de ejemplo, mientras que el precio del cobre durante el año 2018 (estimación de corto plazo dado que el pronóstico se realiza en 2017) podría estimarse con un 95% de confianza entre 180 ($cUS\$/lb$) y 350 ($cUS\$/lb$), en el largo plazo con igual nivel de confianza se podría estimar un rango significativamente menor, de por ejemplo 230 ($cUS\$/lb$) y 310 ($cUS\$/lb$). Es decir, en un corto plazo el rango dentro del cual puede variar el precio es menor que el del largo plazo, lo que se aprecia en la Figura 13.9, a pesar de que sigue siendo bastante alto, ya que los planes mineros correspondientes a los escenarios extremos de precios son completamente diferentes, pero el rango de incertidumbre del largo plazo va a ser mucho menor (prácticamente la mitad) en comparación con el rango de incertidumbre del corto plazo.

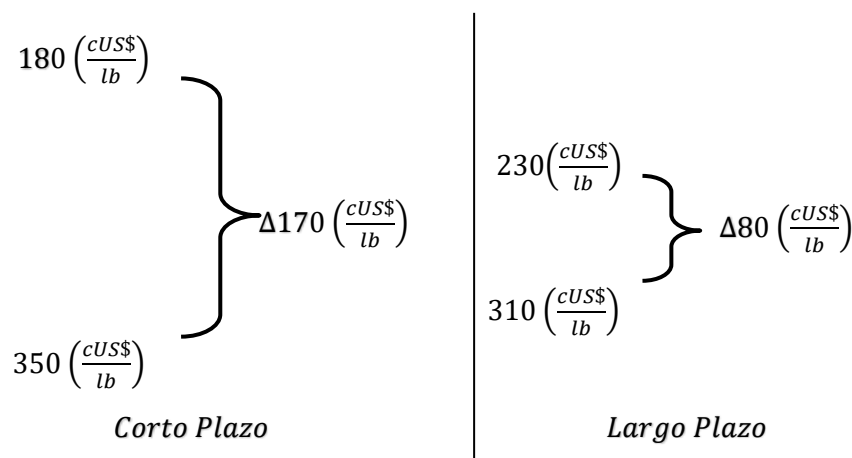


Figura 13.9. Ejemplo incertidumbre corto vs largo plazo para el precio del cobre

En el caso del cobre el rango correspondiente a la estimación de la curva de oferta de largo plazo podría alcanzar un 10% a 15% con respecto a una estimación media (lo que se representa conceptualmente en la Figura 13.10), lo que hace que efectivamente la estimación de precios correspondientes al largo plazo pueda llegar a variar cerca de 80 ($cUS\$/lb$) con respecto a un precio promedio de 270 (en moneda real de 2017). Nótese que la incertidumbre en la curva de oferta se refiere en este caso a incertidumbre propia en la estimación del costo de producción e inversión en capacidad.

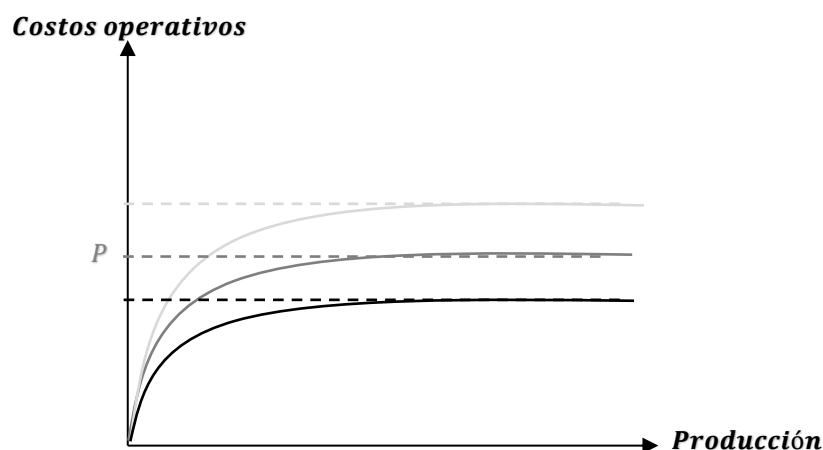


Figura 13.10. Incertidumbre de la curva de oferta

13.5 Procesos estocásticos para cálculos de precios de *commodities*

En la práctica, el precio de un *commodity* mineral evoluciona estocásticamente debido a que en cada instante de tiempo tanto las curvas de oferta como demanda evolucionan estocásticamente. Puesto que en parte los movimientos de ambas curvas responden a factores conocidos en cierta medida, se suelen modelar los precios sumando una componente determinística con una componente estocástica, siendo esta última a la que se le atribuye precisamente la volatilidad del precio.⁷³

Dependiendo del número de variables inciertas que consideren estos modelos se denominan modelos de N factores, donde N representa precisamente el número de variables inciertas. Así por ejemplo, cada vez que solo el precio de corto plazo del *commodity* sea incierto se denominará al modelo como de 1 factor. Si alguna otra variable (que influye en el precio de corto plazo) es además incierta este será un modelo de 2 factores, y así sucesivamente.

En las siguientes sub-secciones se describirán los modelos estocásticos de 1 factor más comunes para el pronóstico de precios de *commodities* minerales, para luego discutir un tipo de modelo de 2 factores.

⁷³ Para una discusión más profunda respecto a la volatilidad del precio de los *commodities* minerales se puede consultar García y Guzmán (2017).

13.5.1 Proceso con reversión a la media

En un proceso con reversión a la media, por ejemplo, existe la idea de que se convergerá (en términos de probabilidad) a un precio de largo plazo, lo que se condice con el modelo conceptual presentado en la sección anterior. En este caso la ecuación diferencial estocástica que debe satisfacer el precio viene dada por (más detalles en Capítulo 7):

$$dP = \eta(\bar{P} - P)dt + \sigma Pdz \quad (13.1)$$

Donde η representa la velocidad de reversión, \bar{P} es el precio a largo plazo al que debe converger el precio y σ representa la volatilidad. Nótese que la velocidad de reversión se refiere al tiempo que le tomaría al precio de corto plazo alcanzar (en valor esperado) la situación de equilibrio de largo plazo.⁷⁴

Este proceso corresponde precisamente al de un precio de corto plazo pero que depende en todo momento del precio a largo plazo, debido a que, si el precio de corto plazo es más bajo que el precio de largo plazo, entonces este tenderá a subir (pues algunos productores dejarán el mercado), y al revés, si el precio de corto plazo es más alto que el valor correspondiente al largo plazo entonces el precio tenderá a bajar (debido a la presión que ejercerá la entrada de nuevas operaciones o expansiones de las faenas en actual operación). Esto se aprecia en la Figura 13.11.

Aun cuando este modelo es conceptualmente robusto, no se ha podido comprobar que la simulación estocástica de los precios de *commodities* con este modelo sea completamente coherente con los datos de los últimos veinte años. De hecho, Schöne (2014) concluye que las propiedades estadísticas de la reversión a la media parecen no tener cabida en el pasado reciente, ni en el futuro con la persistente volatilidad de los mercados de *commodities*.

⁷⁴ De hecho, $1/\eta$ más que η satisface dicha definición.

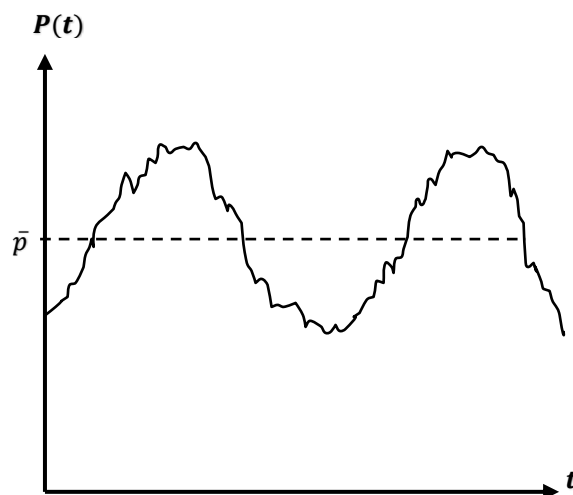


Figura 13.11. Proceso con reversión a la media

A juicio del autor, este proceso es general bastante representativo para modelar a gran escala el precio de muchos *commodities* minerales (tales como metales base, petróleo o carbón). Sin embargo, uno de los inconvenientes que este modelo posee es que no limita el signo del precio, pudiéndose en efecto derivar precios negativos que en muchos mercados carecen de sentido.⁷⁵

13.5.2 Proceso geométrico Browniano

Dentro de los *commodities* de mineral, el oro obedece más a un proceso geométrico Browniano que a uno con reversión a la media. Esto porque el precio del oro, que se comporta más como activo financiero que físico, tiende a crecer de manera exponencial a una tasa α y volatilidad σ , correspondiendo la esperanza del precio a $E(p(t)) = p_0 e^{\alpha t}$. Este proceso considera que el precio futuro no está necesariamente relacionado con los cambios de precios anteriores, generándose de hecho una volatilidad constante. Como se discutió en el Capítulo 7, en este caso la ecuación diferencial estocástica viene dada por la ecuación (13.2) mientras que la Figura 13.12 representa gráficamente una posible iteración del proceso (línea continua), junto con su valor esperado (línea discontinua):

$$dP = \alpha P dt + \sigma P dz \quad (13.2)$$

⁷⁵ Este no necesariamente es el caso de ciertos productos que pueden ser considerados en ciertos periodos de tiempo como *bienes* y en otros como *males*. Un ejemplo notable de esto en minería es el ácido sulfúrico, el que antes de la alta demanda requerida por las minas de óxidos era considerado un mal de la producción de cobre a partir de fundición y tenía un precio negativo.

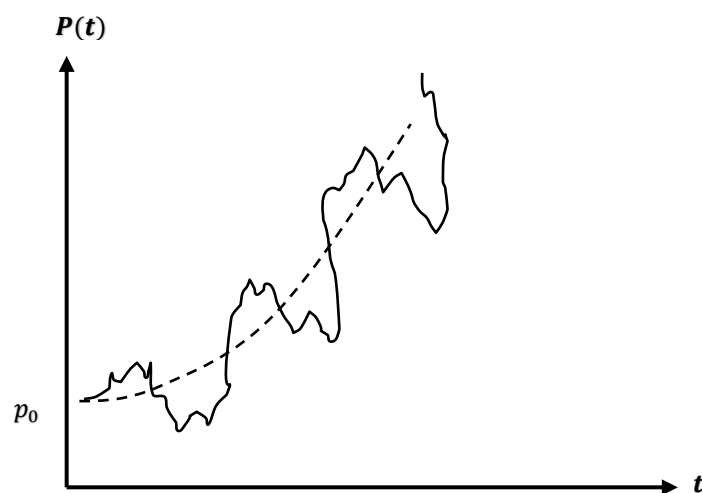


Figura 13.12. Proceso geométrico Browniano

13.5.3 Proceso geométrico Browniano con reversión a la media

Para el caso de muchos *commodities* minerales (cobre, petróleo, uranio, etc.), el autor ha podido comprobar empíricamente que el mejor modelo de 1 factor para modelar su precio es el denominado proceso geométrico Browniano con reversión a la media, que mezcla ambos modelos antes presentados. Como se presentó en el Capítulo 7 en este caso el modelo viene dado por:

$$dP = \eta(\log(\bar{P}) - \log(P))Pdt + \sigma Pdz \quad (13.3)$$

, donde η es la velocidad de reversión, σ la volatilidad y $\log(\bar{P})$ corresponde al logaritmo natural del precio de largo plazo. La Figura 13.13 representa gráficamente una posible iteración de este proceso.

Debe mencionarse que la principal ventaja de este proceso, con respecto al dado por el de reversión a la media, es que en este el precio es no-negativo,⁷⁶ característica que le otorga la componente geométrica Browniana del proceso.

⁷⁶ De hecho, de alcanzar un valor nulo el proceso obliga al precio a mantenerse en dicho nivel para siempre.

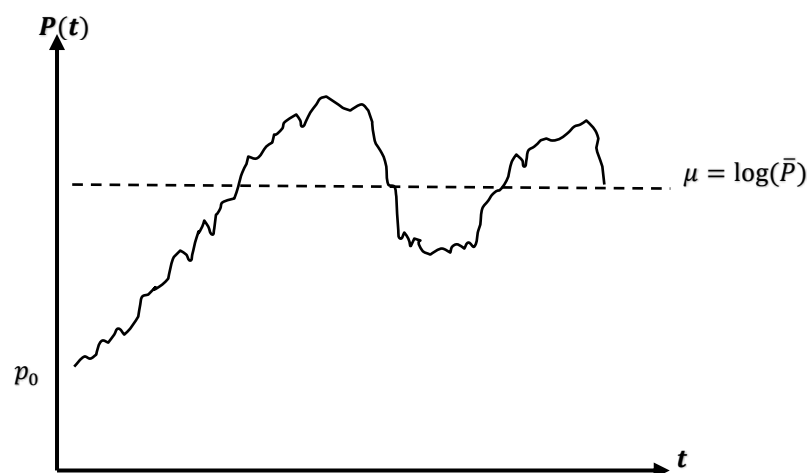


Figura 13.13. Proceso Geométrico Browniano con reversión a la media

En la Tabla 13.3 se muestran valores estimados econométricamente por la empresa consultora GEM de η y σ para el precio de algunos *commodities*, utilizando como base de estimación el periodo comprendido entre 1960 y 2013.

Tabla 13.3. Valores de η y σ estimados para algunos commodities. Fuente: Base de datos históricos 1960-2013 (GEM, 2015)

COMMODITY	PRECIO DE LARGO PLAZO	VELOCIDAD DE REVERSIÓN	DESV. ESTÁNDAR DEL PRECIO (%)	UNIDAD
Aluminio	[0,98;1,22]	0,41	22%	USD/libra
Cobre	[2,62;3,57]	0,18	25%	USD/libra
Estaño	[8,61;11,34]	0,11	20%	USD/libra
Carbonato de litio	[5.300;9.600]	0,17	14%	USD/tonelada
Molibdeno	[15;40]	0,41	80%	USD/libra
Níquel	[8,16;9,53]	0,37	38%	USD/libra
Oro	[1.133;1.414]	0,05	14%	USD/onza
Plata	[17,00;25,93]	0,27	40%	USD/onza
Plomo	[0,95;1,10]	0,26	31%	USD/libra
Potasio (KCL)	[400;800]	0,21	33%	USD/tonelada
Zinc	[0,85;1,03]	0,50	38%	USD/libra

Por ejemplo, si se toma el caso del cobre, el precio posee una velocidad de reversión estimada de $\eta = 0,18$. Es decir, le tomará en promedio 5,5 años ($1/0,18$) alcanzar el precio de largo plazo. Por otro lado, $\sigma = 0,25$ se puede entender como que entre un año y otro el precio variará $\pm 25\%$ con un 66% de probabilidad. Al comparar el valor de σ del cobre con el respectivo del carbonato de litio, se observa que este último posee una menor volatilidad, por lo que cambia de valor menos entre un año y otro. Aunque en algún periodo el precio pueda sufrir modificaciones abruptas, esta no es la tendencia o generalidad.

En cuanto al molibdeno, se ve que tiene una alta volatilidad del precio y posee una respuesta rápida de reversión al valor histórico. La razón es que es rápido en este caso decidir dejar de producirlo y/o cerrar sus minas, pues más del 50% se presenta como un subproducto de minas que producen cobre. Así, generalmente solo se requiere de una planta de recuperación de molibdeno, la que se puede instalar con relativo bajo costo en alrededor de dos años. De esta forma, la reacción de esta industria es mucho más elástica a los cambios de precio que en el caso del cobre.

En el caso del oro, sus indicadores muestran, como se había anticipado anteriormente, un bajo o nulo comportamiento según un proceso de reversión a la media. En la realidad su precio es similar a un movimiento geométrico Browniano, tal como se estudió en la sección anterior.

13.5.4 Proceso estocástico de dos factores

En cuanto a los modelos de dos factores, la homogeneidad en la elección de las variables de estado desaparece al introducir una segunda variable estocástica en los modelos de *commodities* de minerales, siendo en la mayoría de los casos esta segunda variable de estado el retorno por conveniencia⁷⁷ (*convenience yield*). Otros modelos de dos factores consideran, además del precio de corto plazo incertidumbre en el precio de largo plazo o en su volatilidad. De esta forma, se obtienen procesos que permiten ajustar de mejor manera el precio real de los *commodities* (Lautier, 2005), lo que en principio no debe sorprender puesto que en general la inclusión de un mayor número de grados de libertad permite ajustar mejor a un conjunto de observaciones.

⁷⁷ El retorno por conveniencia es el beneficio obtenido por mantener la posesión de un activo físico (*commodity* en este caso) en lugar de haber tenido una posición *forward*, ya que en este caso el comprador es quién tendría este ingreso.

Para ejemplificar este tipo de modelos considérese el sistema formado por las ecuaciones (13.4) y (13.5). En la ecuación (13.4) se modela el precio en el corto plazo P , mientras que la ecuación (13.5) representa la evolución del retorno por conveniencia C . En dichas ecuaciones, σ_P y σ_C representan la volatilidad del precio y del retorno por conveniencia respectivamente, dz_p y dz_c el diferencial de Wiener asociados a P y C , respectivamente, α la media al largo plazo del retorno por conveniencia, μ a la velocidad de reversión del precio y k la velocidad de ajuste del retorno por conveniencia:

$$dP = (\mu - C)Pdt + \sigma_P P dz_p \quad (13.4)$$

$$dC = [k(\alpha - C)]dt + \sigma_C dz_c \quad (13.5)$$

La Figura 13.14 presenta una evolución tipo del sistema (13.4)-(13.5). En dicha evolución se asume que el retorno por conveniencia inicial viene dado por C_0 , el que además evolucionará en el tiempo (tendiendo siempre a una media determinística). De esta forma el precio de corto plazo podrá revertir a una media variable en el tiempo, pero en intervalos suficientemente grandes estará obligado a moverse en torno a la media esperada para el retorno por conveniencia.

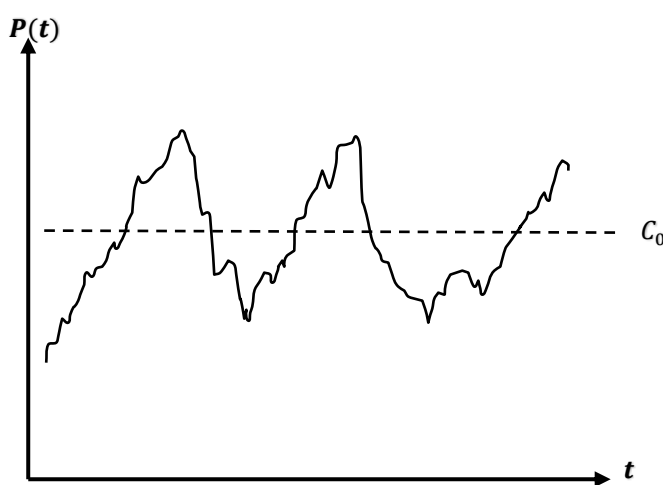


Figura 13.14. Proceso Estocástico de dos factores

Aunque pudiera parecer que los modelos de dos factores son suficientes para recuperar la complejidad del movimiento de precios, lo cierto es que típicamente un sinnúmero de variables podrían afectar el precio de corto plazo. En esta línea, por ejemplo, Guzmán y Silva (2017) derivan econométricamente un modelo de 16 factores para modelar el precio del cobre. En este,

5 factores son propios del mercado del cobre mientras que 11 factores se asocian a variables macroeconómicas y financieras mundiales.

13.6 Problemas resueltos

Problema 13.1

Una empresa minera desea resolver el siguiente problema de optimización:

$$\max_{q(t)} E[VAN(q(t))] = E \left[\int_0^T e^{-rt} \{P(t)q(t) - C(q(t), S(t))\} dt \right]$$

s. a.

$$dP = \alpha P dt + \sigma_P P dz_P$$

$$dS = -q(t) dt + \sigma_S dz_S$$

Donde $S(t)$ son los recursos de mineral remanentes en t , $q(t)$ es la producción instantánea en t , $P(t)$ es el precio del *commodity* mineral en t , σ_P y σ_S son dos constantes positivas que dan cuenta del nivel de incertidumbre en la estimación del precio del *commodity* mineral y los recursos originalmente estimados en $t = 0$ dados por S_0 , respectivamente. T se asume fijo y conocido por la empresa. En la condición de agotabilidad, dz_P y dz_S corresponde a diferenciales de Wiener y la empresa considera que $E(dz_P dz_S) = 0$.

- Mediante optimización dinámica estocástica derive la derivada esperada de la producción respecto al tiempo. ¿Cómo se compara esta solución con el caso $\sigma_S = 0$?
- ¿La producción esperada derivada respecto al tiempo para $\sigma_S > 0$ será menor, mayor o igual que la producción esperada derivada respecto al tiempo para $\sigma_S = 0$? ¿De qué depende la respuesta? Explique.
- Para $C(q, S) = \frac{\gamma q^2}{2S}$, con γ una constante positiva, encuentre la condición que debe cumplir σ_S para que la producción esperada sea decreciente en todo instante de tiempo.
- ¿Qué pasaría si la restricción $dp = \alpha p dt + \sigma_P p dz_P$ se modifica a $dp = \eta(\bar{p} - p) dt + \sigma_P dz_P$?

Solución

a) Por principio de optimalidad de Bellman, se tiene:

$$J(S, P, t) = \max_q E\{\pi_d(t)\Delta t + J(S + \Delta S, P + \Delta P, t + \Delta t)\}$$

$$0 = \max_q E\{\pi_d(t)\Delta t + J(S + \Delta S, P + \Delta P, t + \Delta t)\} - J(S, P, t)$$

$$0 = \max_q E\{\pi_d(t)\Delta t + \Delta J\}$$

$$0 = \max_q \{\pi_d(t)\Delta t + E(\Delta J)\} / \frac{1}{\Delta t}$$

De modo, que la condición de equilibrio es:

$$0 = \max_q \left\{ \pi_d(t) + \frac{1}{dt} E(dJ) \right\}$$

Luego,

$$dJ = \left[J_t + \alpha P J_P + \frac{1}{2} \sigma_P^2 P^2 J_{PP} + (-q) J_S + \frac{1}{2} \sigma_S^2 J_{SS} \right] dt + \sigma_P P J_P dz_P + \sigma_S J_S dz_S$$

Reemplazando en la condición de equilibrio:

$$0 = \max_q \left\{ \pi_d(t) + \left(J_t + \alpha P J_P + \frac{1}{2} \sigma_P^2 P^2 J_{PP} + (-q) J_S + \frac{1}{2} \sigma_S^2 J_{SS} \right) \right\}$$

$$\frac{\partial \pi_d(t)}{\partial q} + (-J_S) = 0$$

$$\frac{\partial \pi_d}{\partial q} = J_S$$

Ahora, derivando la condición de equilibrio respecto a S:

$$\frac{\partial \pi_d}{\partial S} + J_{tS} + \alpha P J_{PS} + \frac{1}{2} \sigma_P^2 P^2 J_{PPS} - q J_{SS} + \frac{1}{2} \sigma_S^2 J_{SSS} = 0$$

$$\frac{\partial \pi_d}{\partial S} + \frac{1}{dt} E(dJ_S) = 0$$

De donde se obtiene que:

$$\frac{1}{dt} E \left[d \left(\frac{\partial \pi_d}{\partial q} \right) \right] = - \frac{\partial \pi_d}{\partial S}$$

De acuerdo al problema:

$$\pi_d = [Pq - C(q, S)]e^{-rt}$$

$$\frac{\partial \pi_d}{\partial q} = (P - C_q)e^{-rt}$$

$$- \frac{\partial \pi_d}{\partial S} = C_S e^{-rt}$$

Entonces:

$$\frac{1}{dt} E \left[d \left((P - C_q)e^{-rt} \right) \right] = C_S e^{-rt}$$

$$dC_q(q, S) = C_{qq}dq + C_{qS}dS + \frac{1}{2}C_{qqq}(dq)^2 + \frac{1}{2}C_{qSS}(dS)^2$$

Por Lema de Itô:

$$dq(t, p, S) = \left[q_t + \alpha P q_p + \frac{1}{2} \sigma_P^2 P^2 q_{PP} + (-q)q_S + \frac{1}{2} \sigma_S^2 q_{SS} \right] dt + (\sigma_P P) q_P dz_P + (\sigma_S) q_S dz_S$$

Y recordando que:

$$(dt)^2 = dt\sqrt{dt} = 0$$

$$dz = \varepsilon\sqrt{dt}$$

$$(dz)^2 = \varepsilon^2\sqrt{dt}$$

Con:

$$E(\varepsilon^2) = 1$$

Se obtiene:

$$(dq)^2 = (q_p \sigma_P p dz_P)^2 + (q_S \sigma_S dz_S)^2 + q_p \sigma_P p q_S \sigma_S (dz_P dz_S)$$

Pero además se sabe que:

$$E(dz_p dz_s) = 0$$

$$E(dq)^2 = E(q_p^2 \sigma_p^2 p^2 + q_s^2 \sigma_s^2) dt$$

$$E(dS)^2 = E(-q dt + \sigma_s dz_s)^2 = \sigma_s^2 dt$$

Por lo tanto:

$$\frac{1}{dt} E \left[d \left((dP - dC_q) e^{-rt} - r(P - C_q) e^{-rt} dt \right) \right] = C_s e^{-rt}$$

$$\frac{1}{dt} E \left[d \left((dP - dC_q) - r(P - C_q) dt \right) \right] = C_s$$

$$Ed = \alpha P dt$$

$$E(dC_q) = E \left(C_{qq} dq + C_{qs} dS + \frac{1}{2} C_{qqq} (dq)^2 + \frac{1}{2} C_{qss} (dS)^2 \right)$$

Reemplazando en la expresión anterior:

$$\alpha P - \frac{1}{dt} Ed(dC_q) - rP + C_q = C_s$$

$$\alpha P - \left(C_{qq} \frac{1}{dt} E(dq) + C_{qs} \frac{1}{dt} E(dS) + \frac{1}{2} C_{qqq} \frac{1}{dt} E(dq)^2 + \frac{1}{2} C_{qss} \frac{1}{dt} E(dS)^2 \right) - rP + rC_q = C_s$$

$$\alpha P - \left(C_{qq} \frac{1}{dt} E(dq) + C_{qs} \frac{1}{dt} (-q dt) + \frac{1}{2} C_{qqq} \frac{1}{dt} (q_p^2 \sigma_p^2 P^2 + q_s^2 \sigma_s^2) dt + \frac{1}{2} C_{qss} \frac{1}{dt} \sigma_s^2 dt \right) - rP + rC_q = C_s$$

$$\alpha P - \left(C_{qq} \frac{1}{dt} E(dq) - q C_{qs} + \frac{1}{2} C_{qqq} (q_p^2 \sigma_p^2 P^2 + q_s^2 \sigma_s^2) + \frac{1}{2} C_{qss} \sigma_s^2 \right) - rP + rC_q = C_s$$

$$\frac{1}{dt} E(dq) = \frac{\alpha P + q C_{qs} - \frac{1}{2} C_{qqq} (q_p^2 \sigma_p^2 P^2 + q_s^2 \sigma_s^2) - \frac{1}{2} C_{qss} \sigma_s^2 - rP + rC_q - C_s}{C_{qq}}$$

Reordenando términos:

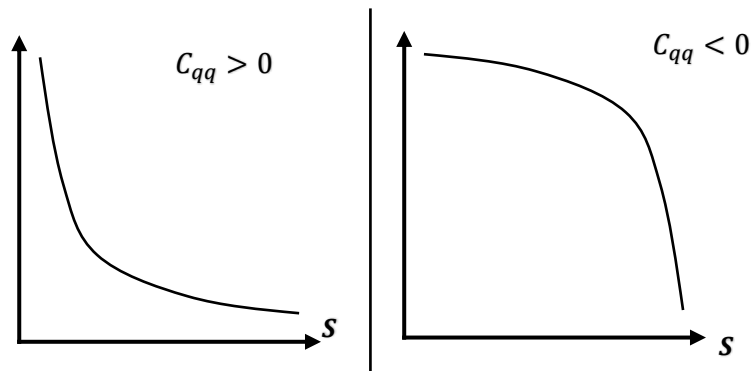
$$\frac{1}{dt}E(dq) = -\frac{1}{C_{qq}} \left[(r - \alpha)p - qC_{qs} + \frac{1}{2}C_{qqq}(q_P^2\sigma_P^2P^2 + q_S^2\sigma_S^2) + \frac{1}{2}C_{qss}\sigma_S^2 - rC_q + C_s \right]$$

Haciendo $\sigma_S = 0$,

$$\frac{1}{dt}E(dq) = -\frac{1}{C_{qq}} \left[(r - \alpha)P - qC_{qs} + \frac{1}{2}C_{qqq}(q_P^2\sigma_P^2P^2) - rC_q + C_s \right]$$

, que corresponde a la solución del problema planteado.

- b) La producción esperada derivada respecto al tiempo $\sigma_S > 0$ (en comparación al caso $\sigma_S = 0$) será menor cuando $C_{qss} > 0$, mayor cuando $C_{qss} < 0$ e indiferente cuando $C_{qss} = 0$. Gráficamente:



- c) Sea:

$$C(q(t), S(t)) = \frac{\gamma q^2}{2S}, \gamma > 0$$

$$C_{qqq} = 0$$

$$C_q = \frac{\gamma q}{S}$$

$$C_S = -\frac{\gamma q^2}{2S^2}$$

$$C_{qq} = \frac{\gamma}{S}$$

$$C_{qS} = \frac{\gamma q}{S^2}$$

$$C_{qSS} = \frac{2\gamma q}{S^3}$$

Y considerando la solución para $\frac{1}{dt}E(dq)$ hallada en la parte a), que es decreciente para todo instante de tiempo, se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{dt}E(dq) = & -\frac{1}{C_{qq}} \left[(r - \alpha)P - qC_{qS} + \frac{1}{2}C_{qqq}(q_P^2\sigma_P^2P^2 + q_S^2\sigma_S^2) + \frac{1}{2}C_{qSS}\sigma_S^2 - rC_q \right. \\ & \left. + C_s \right] < 0 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{dt}E(dq) = -\frac{1}{\gamma} \left[(r - \alpha)P - q\frac{\gamma q}{S^2} + \frac{1}{2}\frac{2\gamma q}{S^3}\sigma_S^2 - r\frac{\gamma q}{S} - \frac{\gamma q^2}{2S^2} \right] < 0$$

$$\frac{1}{dt}E(dq) = -\frac{S}{\gamma} \left[(r - \alpha)P - \frac{\gamma q^2}{2S^2} + \frac{\gamma q}{S^3}\sigma_S^2 - r\frac{\gamma q}{S} \right] < 0$$

$$\frac{1}{dt}E(dq) = -\frac{S}{\gamma} (r - \alpha)P - \frac{q^2}{2S} - \frac{q}{S^2}\sigma_S^2 + rq < 0$$

$$\frac{1}{dt}E(dq) = -\frac{S}{\gamma} (r - \alpha)P - \frac{q^2}{2S} + rq < \frac{q}{S^2}\sigma_S^2$$

$$\frac{1}{dt}E(dq) = -\frac{S^3}{q\gamma} (r - \alpha)P - \frac{qS}{2} + rS^2 < \sigma_S^2$$

$$\frac{1}{dt}E(dq) = \sqrt{-\frac{S^3}{q\gamma} (r - \alpha)P - \frac{qS}{2} + rS^2} < \sigma_S$$

- d) Para realizar esta pregunta, en primer lugar, se debe repetir el procedimiento realizado en el inciso anterior. Por ende, del principio de optimalidad de Bellman, se tiene que la condición de equilibrio es:

$$0 = \max_q \left\{ \pi_d(t) + \frac{1}{dt}E(d) \right\}$$

$$\text{Luego, } dJ = \left[J_t + \eta(\bar{P} - P)J_P + \frac{1}{2}\sigma_P^2P^2J_{PP} + (-q)J_S + \frac{1}{2}\sigma_S^2J_{SS} \right] dt + \sigma_PJ_Pdz_P + \sigma_SJ_Sdz_S$$

Reemplazando en la condición de equilibrio resulta:

$$0 = \max_q \left\{ \pi_d(t) + J_t + \eta(\bar{p} - p)J_p + \frac{1}{2}\sigma_p^2 p^2 J_{pp} + (-q)J_s + \frac{1}{2}\sigma_s^2 J_{ss} \right\}$$

$$\frac{\partial \pi_d}{\partial q} = J_s$$

Ahora, derivando la condición de equilibrio con respecto a S se obtiene:

$$\frac{\partial \pi_d}{\partial S} + J_{ts} + \eta(\bar{P} - P)J_{ps} + \frac{1}{2}\sigma_p^2 J_{pps} + (-q)J_{ss} + \frac{1}{2}\sigma_s^2 J_{sss} + \frac{\partial \pi_d}{\partial S} + \frac{1}{dt}E(dJ_s) = 0$$

A partir de esta expresión, y aplicando $\frac{1}{dt}E()$ se obtiene:

$$\frac{1}{dt}E\left(\frac{\partial \pi_d}{\partial q}\right) = -\frac{\partial \pi_d}{\partial S}$$

De acuerdo al problema, $\pi_d = [Pq - C(q, S)]e^{-rt}$ y derivando respecto a q y S respectivamente se obtiene:

$$\frac{\partial \pi_d}{\partial q} = (P - C_q)e^{-rt} \quad -\frac{\partial \pi_d}{\partial S} = (C_q)e^{-rt}$$

Entonces:

$$\frac{1}{dt}E\left[d\left((P - C_q)e^{-rt}\right)\right] = C_s e^{-rt} \quad y \quad dC_q(q, S) = C_{qq}dq + C_{qs}dS + \frac{1}{2}C_{qqq}(dq)^2 + \frac{1}{2}C_{qss}(dS)^2$$

Por Lema de Itô se tiene que:

$$dq(t, P, S) = \left[q_t + \eta(\bar{P} - P)q_p + \frac{1}{2}\sigma_p^2 q_{pp} + (-q)q_s + \frac{1}{2}\sigma_s^2 q_{ss} \right] dt + \sigma_p q_p dz_p + \sigma_s q_s dz_s$$

Y recordando que $(dt)^2 = dt\sqrt{dt} = 0$, $dz = \varepsilon\sqrt{dt}$ y $\varepsilon^2 dt$ se tiene que:

$$(dq)^2 = (q_p \sigma_p dz_p)^2 + (q_s \sigma_s dz_s)^2 + 2\sigma_p q_p q_s \sigma_s (dz_p dz_s)$$

Dado que $E(dz_p dz_s) = 0$:

$$E(dq)^2 = E(q_p^2 \sigma_p^2 + q_s^2 \sigma_s^2) dt \rightarrow E(dS)^2 = E(-q dt + \sigma_s dz_s)^2 = \sigma_s^2 dt$$

Por lo tanto:

$$\frac{1}{dt} E \left((dP - dC_q) e^{-rt} - r(P - C_q) e^{-rt} dt \right) = C_s e^{-rt}$$

$$\frac{1}{dt} E \left((dP - dC_q) - r(P - C_q) dt \right) = C_s$$

$$E(dP) = \eta(\bar{P} - P) dt$$

$$E(dC_q) = E(C_{qq} dq + C_{qs} dS + \frac{1}{2} C_{qqq} (dq)^2 + \frac{1}{2} C_{qss} (dS)^2)$$

$$\eta(\bar{P} - P) dt - \frac{1}{dt} E(dC_q) - rP + rC_q = C_s$$

$$\eta(\bar{P} - P) - [C_{qq} \frac{1}{dt} E(dq) + C_{qs} \frac{1}{dt} E(dS) + \frac{1}{2} C_{qqq} \frac{1}{dt} E(dq^2) + \frac{1}{2} C_{qss} \frac{1}{dt} E(dS^2)] - rP + rC_q = C_s$$

$$\eta(\bar{P} - P) - [C_{qq} \frac{1}{dt} E(dq) + C_{qs} \frac{1}{dt} (-q dt) + \frac{1}{2} C_{qqq} \frac{1}{dt} (q_P^2 \sigma_P^2 + q_S^2 \sigma_S^2) + \frac{1}{2} C_{qss} \frac{1}{dt} (\sigma_S^2 dt)] - rP + rC_q = C_s$$

$$\eta(\bar{P} - P) - [C_{qq} \frac{1}{dt} E(dq) - q C_{qs} + \frac{1}{2} C_{qqq} (q_P^2 \sigma_P^2 + q_S^2 \sigma_S^2) + \frac{1}{2} C_{qss} (\sigma_S^2)] - rP + rC_q = C_s$$

Obteniendo finalmente:

$$\frac{1}{dt} E(dq) = \frac{\eta(P - \bar{P}) + C_{qs} q - \frac{1}{2} C_{qqq} (\sigma_P^2 q_P^2 + q_S^2 \sigma_S^2) - \frac{1}{2} C_{qss} (\sigma_S^2) - rP + rC_q - C_s}{C_{qq}}$$

Problema 13.2

La Empresa Minera INGEX está en proceso de evaluación de la producción óptima de la mina Ojos Verdes. Se ha concluido mediante numerosas investigaciones que el precio responde a un proceso estocástico del tipo reversión a la media. Por ende, el problema a resolver está dado por:

$$\max_{q(t)} E[VAN(q(t))] = E \left[\int_0^T e^{-rt} \{P(t)q(t) - C(q(t), S(t))\} \right]$$

S. a.

$$dP = \eta(\bar{P} - P)dt + \sigma_P dz$$

$$dS = -q(t)dt$$

Donde η corresponde a la velocidad de reversión y \bar{P} al precio al largo plazo. Encuentre la tasa de evolución óptima para $q(t)$. ¿De qué forma afecta la velocidad de reversión del precio a dicha tasa?

Solución

A partir de la expresión derivada del principio de Bellman en el problema anterior:

$$\frac{1}{dt} E \left[d \left(\frac{\partial \pi_d}{\partial q} \right) \right] = - \frac{\partial \pi_d}{\partial S}$$

Se obtienen las siguientes relaciones:

$$\pi_d = [Pq - C(q, S)]e^{-rt}; \quad \frac{\partial \pi_d}{\partial q} = (P - C_q)e^{-rt}; \quad - \frac{\partial \pi_d}{\partial S} = C_s e^{-rt}$$

Entonces reemplazando las expresiones anteriores en la ecuación inicial:

$$\frac{1}{dt} E \left[d \left((P - C_q)e^{-rt} \right) \right] = C_s e^{-rt}$$

$$E(dP) = \eta(\bar{P} - P)dt$$

$$dC_q(q, S) = C_{qq} dq + C_{qs} dS + \frac{1}{2} C_{qqq} (dq)^2$$

Por Lema de Itô:

$$dq = \left[q_t + \alpha P q_p + \frac{1}{2} \sigma_P^2 P^2 q_{PP} - q q_s \right] dt + (\sigma_P) q_P dz_P$$

Por otro lado, se debe recordar que $(dt)^2 = dt\sqrt{dt} = 0$ se tiene que,

$$(dq)^2 = (\sigma_P q_P dz_P)^2$$

$$(dq)^2 = (\sigma_P^2 q_P^2) dt$$

Considerando que:

$$E(dP) = \eta(\bar{P} - P)dt$$

Entonces, desarrollando:

$$E(dC_q) = E(C_{qq} dq + C_{qs} dS + \frac{1}{2} C_{qqq} (dq)^2)$$

$$E(dC_q) = C_{qq} E(dq) + C_{qs} E(dS) + \frac{1}{2} C_{qqq} E(dq^2)$$

$$E(dC_q) = C_{qq} E(dq) + C_{qs} (dS) + \frac{1}{2} C_{qqq} (\sigma_P^2 q_P^2 dt)$$

Y reemplazando en la expresión anterior:

$$\frac{1}{dt} E((dP - dC_q) - r(P - C_q)dt) = C_s$$

$$\eta(\bar{P} - P) - C_{qq} \frac{1}{dt} E(dq) - C_{qs} \frac{1}{dt} (dS) - \frac{1}{2} C_{qqq} (\sigma_P^2 q_P^2) - r(P - C_q) = C_s$$

$$\eta(\bar{P} - P) - C_{qs} \frac{1}{dt} (dS) - \frac{1}{2} C_{qqq} (\sigma_P^2 q_P^2) - r(P - C_q) - C_s = C_{qq} \frac{1}{dt} E(dq)$$

, donde $\frac{1}{dt} (dS) = -q$, con lo cual se obtiene finalmente:

$$\frac{1}{dt} E(dq) = \frac{-1}{C_{qq}} (\eta(P - \bar{P}) - C_{qs}q + \frac{1}{2} C_{qqq} (\sigma_P^2 q_P^2) + r(P - C_q) + C_s)$$

Que corresponde precisamente a la tasa de evolución óptima de la producción. Si $C_{qq} > 0$ (supuesto que será validado en el capítulo siguiente) entonces un aumento en la tasa de reversión disminuye la tasa de extracción óptima esperada en la mina. Esto es razonable, puesto que un aumento en la velocidad de reversión disminuye la ciclicidad en el precio y por tanto la mina tiene menos incentivos a variar su producción en el tiempo.

Nótese que en el Capítulo 14 se desarrollará en más detalle la teoría asociada a dicha evolución.

Capítulo 14: El Problema de Determinar la Producción Óptima Bajo Incertidumbre

En este capítulo se identifica, explica y analiza el problema de las empresas mineras para determinar la ruta de producción óptima, sujeto a las incertidumbres propias presentes en la industria y mercado minero. En particular, se evalúa el efecto de las incertidumbres que siguen procesos estocásticos, tales como el precio del *commodity* principal de la mina, el tamaño de las reservas del yacimiento o la demanda del *commodity* en cuestión.

14.1 La incertidumbre en el problema de optimización de la producción

Al momento de construir el plan minero óptimo, muchos de los *inputs* esenciales que un planificador minero requiere son de naturaleza incierta (para mayor detalle ver Capítulo 13). Un ejemplo de esto lo constituye el precio futuro del *commodity* a explotar.

La planificación minera resuelve el problema de derivar la producción óptima a futuro mediante el uso de una estimación (única) de largo de plazo del precio del *commodity*, más que considerando de forma explícita la incertidumbre asociada al mismo.

Al pasar el tiempo las estimaciones asociadas al precio a largo plazo van cambiando. De hecho, las estimaciones diferirán del valor verdadero del *commodity* en el período estimado con

probabilidad 1 (debido a que el precio proviene de una distribución de probabilidades continua, la probabilidad de que tome exactamente un valor tiene probabilidad cero de ocurrir). Es decir, lo que las empresas mineras estimen como precio del *commodity* a futuro, ¡con total certidumbre será distinto a lo que la mina enfrentará en la realidad! Esto, sin duda introduce errores en la planificación y, consecuentemente, pérdidas de valor producto de una suboptimización en el plan minero.

La problemática real que enfrenta el planificador es la de construir un plan minero óptimo, dado que en estricto rigor no conoce ni el precio del *commodity* ni un sinnúmero de otras variables necesarias para elaborar el plan. En la práctica, la mayoría de las veces los planificadores mineros obvian esta problemática, y generan el mejor plan para el precio (u otras variables) estimadas puntualmente y para las cuales la empresa tiene nula probabilidad de acertar.

Esto genera gran preocupación para la industria minera, ya que generalmente la diferencia entre lo planificado y observado, tanto en lo que respecta a utilidades, productividad y producción, sucede precisamente por falta de un tratamiento adecuado de incertidumbres presentes en la minería (Rudloff, 2013).

Lo que se revisará en las próximas secciones es precisamente cómo cambia la conceptualización de la producción óptima cuando se consideran variables de incertidumbre, con respecto al caso en el que existe certidumbre.

Para efectos de mostrar las diferencias en la derivación de la producción óptima con y sin incertidumbre, se presentará un caso clásico en la literatura, desarrollado por Robert Pindyck en su artículo “*The Optimal Production of an Exhaustible Resource When Price Is Exogenous and Stochastic*” (Pindyck, 1981). En este se obtiene la solución del problema de la producción óptima bajo certidumbre de una mina para maximizar su VAN, para luego resolverlo considerando un precio con evolución estocástica, introduciendo así la incertidumbre.

14.2 El problema de la producción óptima con certidumbre

Lo que se buscará principalmente en este capítulo es analizar cómo diversas fuentes relevantes de incertidumbre pueden afectar la elaboración del plan minero óptimo, para comparar estos resultados con el caso determinístico. Con este objetivo en mente, interesa resolver entonces en

primera instancia el problema para el caso determinístico, el cual corresponderá al caso base de estudio. A partir de esto, se modificará el problema añadiendo fuentes de incertidumbre, cuyos efectos sobre el resultado final se tratarán con mayor atención más adelante.

Para esto considere una empresa que debe decidir su tasa de producción, $q(t)$, en base a un precio de mercado del *commodity* que explota, el cual se considera evoluciona en el tiempo con una tasa de crecimiento α . Además, se asume que la mina posee costos asociados a la extracción y procesamiento del *commodity*, los que pueden ser representados como una función de las reservas $S(t)$ y la tasa de extracción en dicho periodo, es decir, $C(q(t), S(t))$. Las reservas iniciales de la empresa vienen dadas por $S(0) = S_0$, el precio del *commodity* en cada instante de tiempo viene dado por $P(t)$ y la tasa de descuento de la empresa es r . Finalmente, el LOM se considera como una variable endógena al problema.

Si no se consideran restricciones de capacidad de extracción, el problema de la mina puede escribirse matemáticamente como:

$$\max_{q, T} \int_0^T [P(t)q(t) - C(q(t), S(t))]e^{-rt} dt \quad (14.1)$$

s. a.

$$\dot{S} = -q \quad (14.2)$$

$$S(0) = S_0 \quad (14.3)$$

$$q, S, T \geq 0 \quad (14.4)$$

$$\frac{\dot{P}}{P} = \alpha \quad (14.5)$$

Nótese que la ecuación (14.5) corresponde precisamente a la ecuación del precio del *commodity* para el enunciado señalado.

Para resolver el problema (14.1)-(14.5) mediante control óptimo se construye la función Hamiltoniana en valor corriente:

$$\hat{H} = Pq - C(q, S) + v(-q) \quad (14.6)$$

Las condiciones del principio del máximo son entonces:

$$i) \max_q \hat{H} \rightarrow P - C_q - v = 0 \quad (14.7)$$

$$\text{ii) } \dot{S} = -q \quad (14.8)$$

$$\text{iii) } \dot{v} = rv - \widehat{H}_S = rv + C_S \quad (14.9)$$

$$\text{iv) } \widehat{H}(T) = 0 \quad (14.10)$$

Combinando las condiciones (14.9) y (14.7) se obtiene:

$$\dot{P} - C_{qq}\dot{q} - C_{qs}\dot{S} - \dot{v} = 0 \quad (14.11)$$

$$\dot{P} - C_{qq}\dot{q} + C_{qs}q = rv + C_S \quad (14.12)$$

Despejando \dot{q} y considerando que $\dot{P} = \alpha P$:

$$\dot{q} = -\frac{1}{C_{qq}} [rv + C_S - C_{qs}q - \alpha P] \quad (14.13)$$

Utilizando la condición (14.7) en (14.13) se obtiene:

$$\dot{q} = -\frac{1}{C_{qq}} [r(P - C_q) + C_S - C_{qs}q - \alpha P] \quad (14.14)$$

Nótese que (14.14) es una ecuación diferencial ordinaria para $q(t)$, de donde se puede derivar precisamente el ritmo de producción óptimo de la mina. Sin embargo, no es posible derivar una solución explícita de (14.14), a menos que se establezcan especificaciones para las funciones involucradas. Aun así, como se desarrolla en las sub-secciones siguientes, es posible derivar algunos elementos cualitativos y cuantitativos relevantes para algunos casos de interés.

14.2.1 El comportamiento de la tasa de producción óptima

Aunque no es posible en general resolver $q(t)$ de (14.14), sí es posible decir algo con respecto a sus propiedades cualitativas, en particular con respecto a si dicha tasa es creciente o decreciente. Para esto se hace necesario examinar el signo de \dot{q} . Evidentemente dicho signo dependerá a su vez del signo de las variables presentes en el lado derecho de la ecuación (14.14):

- r : representa la tasa de descuento, la cual es siempre positiva.
- $P(t) - C_q$: El precio menos el costo marginal debe siempre ser no-negativo para que haya incentivos a producir.

- C_s : Representa el cambio en el costo con respecto al cambio en las reservas. Si las reservas disminuyen, el costo de extracción debiera aumentar, por lo que C_s debiese ser negativo.
- $\alpha P(t)$: Puede ser positivo o negativo, dependiendo de si el precio va disminuyendo o creciendo en el tiempo (es decir, α es negativo o positivo, respectivamente).
- q : La tasa de producción, la que siempre será no-negativa.
- C_{qS} : El costo marginal crece a medida que se agotan las reservas, por lo que esta variable también debiese ser negativa.
- C_{qq} : Esta variable puede ser tanto positiva como negativa. El costo marginal C_q en general es positivo. C_{qq} es positivo si la función de costos es convexa, y negativo si es cóncava. En minería pueden presentarse ambos casos, por lo que el signo no se conoce *a priori*.

Con todo lo anterior, si la producción disminuye o no en el tiempo dependerá fundamentalmente de la evolución del precio del *commodity* y de la concavidad (o convexidad) de la función de costos de producción.

14.2.2 Función de costos lineal respecto a la tasa de producción

A continuación, se estudiará el caso en el cual la función de costos es lineal con respecto a q . Es decir:

$$C(q, S) = \beta_0 q + \beta_1 S \quad (14.15)$$

Pindyck (1981) observa que la solución en este caso no puede resolverse mediante la ecuación (14.14), ya que $C_{qq} = 0$.

En este caso la función Hamiltoniana es lineal en q , lo que hace que la solución, al resolver y combinar las ecuaciones anteriores otorgue de resultado (considerando que C_s es una constante):

$$q(t) = \begin{cases} K & \text{si } P(t) - C_q > v_0 e^{rt} \\ q^*(t) & \text{si } P(t) - C_q = v_0 e^{rt} \\ 0 & \text{si } P(t) - C_q < v_0 e^{rt} \end{cases} \quad (14.16)$$

Pindyck (1981) obtiene directamente la solución del punto de indiferencia de producción óptima. De aquí:

$$q(t) = -\frac{1}{c_{qS}} [(r - \alpha)P(t) + C_S - rC_{qS}] \quad (14.17)$$

Con lo anterior se puede apreciar que al tener una función de costos que es lineal en q , donde los costos marginales no dependen del nivel de producción, se intentará siempre producir a capacidad máxima. Esto implicaría que en los primeros períodos \dot{q} será siempre positivo, con el objetivo de alcanzar la capacidad máxima, para luego mantenerse ahí en la medida de lo posible. Luego, la producción tendería a situarse en el punto de indiferencia de la ecuación (14.16), para finalmente llegar a 0 en el último periodo.

De aquí, el problema de encontrar la producción óptima bajo certidumbre no está definido *a priori* dado que no se pueden generalizar las condiciones a todas las minas (pues el resultado dependerá críticamente de las condiciones de mercado y estructura de costos de la mina). Esto contrasta con la regla empírica que en la práctica establece que un buen plan minero genera una producción necesariamente decreciente en el tiempo. Por lo aquí derivado, no necesariamente esta condición indica que el plan derivado es óptimo del punto de vista dinámico y por tanto es posible (y necesario) desafiar esta regla empírica.

14.3 El problema de la producción óptima con incertidumbre

14.3.1 El efecto de la incertidumbre del precio sobre la producción óptima

A continuación, se resolverá el caso presentado en la sección anterior, pero agregando la incertidumbre del precio del *commodity*, para así observar las diferencias y cambios en el ritmo de producción óptimo. Preliminarmente, al considerar un precio de un *commodity* con evolución estocástica, es posible esperar que se generen diferencias en la producción óptima. Si esto no fuese así, evidentemente no sería tema de estudio la inclusión de incertidumbre en la generación de plan minero.

Para el presente ejercicio se considerará el precio del *commodity* como un proceso de Itô del tipo geométrico Browniano, representando su variación en el tiempo por la ecuación:

$$dP = \alpha P dt + \sigma P dz \quad (14.18)$$

En este caso el precio ya no solo crece a una tasa α esperada, como en el caso determinístico, sino que además se agrega una componente de incertidumbre, lo que le dará variabilidad al precio futuro en base al coeficiente σ o volatilidad. Es importante mencionar además que en este tipo de procesos estocásticos el precio actual (inicial) se asume conocido (no es necesario tener que especular un precio inicial aleatorio).

Se procede a resolver el problema análogo al caso de certidumbre, pero con la nueva restricción. En este caso el problema matemático viene dado por:

$$\max_{q,T} E \left(\int_0^T e^{-rt} (P(t)q(t) - C(q,S)) dt \right) \quad (14.19)$$

s. a.

$$\dot{S}(t) = -q(t) \quad (14.20)$$

$$S(0) = S_0 \quad (14.21)$$

$$dP = \alpha P dt + \sigma P dz \quad (14.22)$$

$$q, S, T \geq 0 \quad (14.23)$$

Para resolver el problema se utilizará programación dinámica estocástica. Para esto se define en primer lugar la utilidad instantánea como:

$$\pi = P(t)q(t) - C(q,S) \quad (14.24)$$

Luego, se define la función de valor óptimo como:

$$J(S, P, t) = \max_q E[\pi dt + J(S + \Delta S, P + \Delta P, t + \Delta t) e^{-r\Delta t}] \quad (14.25)$$

Para resolver esta ecuación, se hace uso de la expansión de Taylor, de manera similar a la utilizada en los Capítulos 5 y 8. Desarrollando y usando que $e^{-r\Delta t}$ se puede aproximar a $(1 - rdt)$, se obtiene que:

$$E(rdtJ(S + \Delta S, P + \Delta P, t + \Delta t)) = \max_q E\{\pi dt + J(S + \Delta S, P + \Delta P, t + \Delta t) - J(S, p, t)\} \quad (14.26)$$

Dividiendo esta ecuación por dt y considerando que $\Delta J = J(S + \Delta S, P + \Delta P, t + \Delta t) - J(S, p, t)$:

$$E(rJ(S + \Delta S, P + \Delta P, t + \Delta t)) = \max_q E\{\pi + \frac{\Delta J}{\Delta t}\} \quad (14.27)$$

Aplicando el operador $\lim_{\Delta t \rightarrow 0}$ al lado izquierdo de esta ecuación, se obtiene:

$$rJ(S, P, t) = \max_q E(\pi) + \frac{E(dJ)}{dt} \quad (14.28)$$

$$rJ(S, P, t) = \max_q \pi + \frac{E(dJ)}{dt} \quad (14.29)$$

Nótese que (14.29) se deriva de (14.28) debido a que en el instante t se cumple que $E(\pi) = \pi$. Cabe señalar que en el caso de tomar inicialmente la variable $\pi = P(t)q(t) - C(q, S)$, y utilizar la función descontada:

$$\pi_d = e^{-rt}(P(t)q(t) - C(q, S)) \quad (14.30)$$

, es posible obtener una ecuación equivalente de la forma:

$$0 = \max_q \pi_d + \frac{E(dJ)}{dt} \quad (14.31)$$

Esta ecuación corresponde a la ecuación fundamental de optimización para el problema. Se puede apreciar una similitud al paso previo de la derivación de la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB), sin embargo, falta obtener de manera simplificada la parte del lado derecho de la ecuación.

Resulta interesante señalar que la derivada de J con respecto al tiempo no es posible de obtener sin aplicar primero el operador de esperanza matemática, debido a que J depende de una variable estocástica como lo es el precio del *commodity*.

Haciendo uso del Lema de Itô, es posible expandir el valor esperado del diferencial de J :

$$E(dJ) = E(J_s ds + J_p dP + J_t dt + \frac{1}{2} J_{pp} (dP)^2) \quad (14.32)$$

Reemplazando las condiciones:

$$E(dJ) = E(-qJ_s dt + J_p(\alpha P dt + \sigma P dz) + J_t dt + \frac{1}{2} J_{pp} \sigma^2 P^2 dt) \quad (14.33)$$

O equivalentemente:

$$E(dJ) = -qJ_s dt + J_p \alpha P dt + J_t dt + \frac{1}{2} J_{pp} \sigma^2 P^2 dt \quad (14.34)$$

Dividiendo por dt , y reescribiendo en la ecuación fundamental (14.31):

$$0 = \max_q \{ \pi_d + J_t - qJ_s + J_p \alpha P + \frac{1}{2} J_{pp} \sigma^2 P^2 \} \quad (14.35)$$

Mediante esta ecuación se ha logrado resolver el problema de derivar un funcional con funciones estocásticas. Finalmente, ahora se puede derivar respecto a q , tal como se mostró en el Capítulo 5 a partir de la ecuación HJB:

$$\frac{\partial \pi_d}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q} (P(t)q(t) - C(q(t), S(t)))e^{-rt} \quad (14.36)$$

Quedando así:

$$\frac{\partial \pi_d}{\partial q} = J_s \quad (14.37)$$

Lo interesante de este resultado es que en el lado izquierdo de la ecuación presenta la derivada de la utilidad descontada con respecto a q , mientras que el lado derecho muestra la derivada del valor esperado del VAN respecto a las reservas. Es decir, en el óptimo se debe satisfacer que la utilidad descontada adicional si se produce una unidad extra debe compensar exactamente la caída en el VAN esperado producto de la reducción en las reservas de dicha unidad.

Como en todo problema de optimización dinámica, extraer una unidad de mineral hoy tendrá en general efectos en la producción de mañana. Al determinar la producción óptima bajo incertidumbre en el precio del *commodity*, (14.37) es una condición necesaria que se debe cumplir para alcanzar la optimización del resultado.

Para continuar el análisis, es posible derivar la ecuación (14.35) respecto a la otra variable asociada a los costos de extracción, es decir, las reservas remanentes (S). Se debe recordar además que en este caso J dependerá en general de las reservas, por lo que la derivada no será tan sencilla como aquella con respecto a la tasa de extracción (que por definición es nula).

Derivando así la ecuación (14.35) con respecto a S se tiene que:

$$0 = \max_q \{ \frac{\partial \pi_d}{\partial S} + J_{ts} - qJ_{ss} + J_{ps} \alpha P + \frac{1}{2} J_{pps} \sigma^2 P^2 \} \quad (14.38)$$

Mediante el Lema de Itô es posible resolver $E(dJ_S)$ por:

$$E(dJ_S) = -qJ_{SS}dt + J_{pS}\alpha Pdt + J_{tS}dt + \frac{1}{2}J_{pps}\sigma^2 P^2 dt \quad (14.39)$$

Dividiendo la ecuación anterior por dt :

$$\frac{E(dJ_S)}{dt} = -qJ_{SS} + J_{pS}\alpha P + J_{tS} + \frac{1}{2}J_{pps}\sigma^2 P^2 \quad (14.40)$$

Reescribiendo (14.39):

$$0 = \frac{\partial \pi_d}{\partial S} + \frac{E(dJ_S)}{dt} \quad (14.41)$$

Finalmente se pueden combinar las ecuaciones (14.37) y (14.41) para obtener la ecuación fundamental de optimización dinámica estocástica para este tipo de problemas, dada por:

$$\frac{\partial \pi_d}{\partial S} = -\frac{1}{dt} E \left[d \left(\frac{\partial \pi_d}{\partial q} \right) \right] \quad (14.42)$$

Esta ecuación, tras un detenido análisis y observación, tiene una similitud sorprendente con la ecuación de Euler-Lagrange del cálculo de variaciones, dada por:

$$F_y - \frac{d}{dt} (F_{y'}) = 0 \quad (14.43)$$

La diferencia entre ambas se justifica fundamentalmente que en (14.42) no se puede derivar con respecto al tiempo directamente, al depender de funciones y variables estocásticas, sino que se debe aplicar un operador de Itô para encontrar el valor esperado, y luego derivar respecto al tiempo.

Nótese que la ecuación (14.42) indica que la utilidad marginal de extraer una unidad de reserva adicional deberá ser igual al valor esperado de la suma de los aumentos en utilidad descontada futura, obtenidas por no extraer la unidad (Pindyck, 1981).

Una vez que se encuentran definidos los significados y la interpretación de las condiciones necesarias obtenidas bajo precio incierto, interesa obtener una ecuación análoga al caso determinístico. Para esto se simplificará la ecuación fundamental reemplazando los valores originales, y mediante los operadores de Itô, se podrá obtener lo deseado:

$$\frac{\partial \pi_d}{\partial q} = (P(t) - C_q)e^{-rt} \quad (14.44)$$

$$\frac{\partial \pi_d}{\partial S} = -C_s e^{-rt} \quad (14.45)$$

Las tres ecuaciones propuestas por Pindyck para obtener la ecuación análoga al caso determinístico se obtienen incorporando las dos ecuaciones anteriores a la ecuación fundamental:

$$-r[p(t) - C_q] + \left(\frac{1}{dt}\right)E(dP) - \left(\frac{1}{dt}\right)E(dC_q) = C_s \quad (14.46)$$

En donde se pueden reemplazar las expresiones:

$$dP = \alpha P dt + \sigma P dz \quad (14.47)$$

$$E(dP) = \alpha P dt \quad (14.48)$$

Y además expandiendo $E(dC_q)$ por el Lema de Itô:

$$E(dC_q) = E(C_{qq}dq + C_{qs}ds + \frac{1}{2}C_{qqq}(dq)^2) \quad (14.49)$$

Y dividiendo por dt :

$$\frac{E(dC_q)}{dt} = C_{qq} \frac{1}{dt} E(dq) - qC_{qs} + \frac{1}{2}C_{qqq}\sigma^2 P^2 q_p^2 \quad (14.50)$$

El último término se obtiene entendiendo que en una trayectoria óptima, la producción óptima q^* en cada período dependerá tanto de las reservas como del precio en cada instante, es decir, $q = q^*(S, p)$.

Finalmente, combinando todas las expresiones anteriores se obtiene la ecuación buscada:

$$\frac{1}{dt} E(dq) = \frac{-1}{C_{qq}} [(r(P(t) - C_q) + C_s - C_{qs}q - \alpha P(t) + \frac{1}{2}C_{qqq}\sigma^2 P^2 q_p^2)] \quad (14.51)$$

Se aprecia de (14.51) que la producción cambia con respecto al precio en cada instante de tiempo. Es decir, la mina no se comprometerá a producir en un instante inicial una cierta cantidad en el futuro, sino que más bien su compromiso es condicional al precio futuro (en base al cual decidirá cuánto producir).

En la práctica, sin embargo, la decisión de cuánto producir en el futuro no es tan flexible, ya que, por ejemplo, en un rajo es necesario comprometer ciertas fases que no son modificables año a año. Lo que sí permite generar cierta flexibilidad es la ley de corte a utilizar en cada instante de tiempo, la cual definitivamente variará según el precio de el o los *commodities* de interés, de donde se concluye que la producción del *commodity* depende del precio.

Cabe destacar que (14.51) es una ecuación análoga a la ecuación (14.14) para \dot{q} determinada en el caso determinístico, salvo por algunos detalles. Así, el lado izquierdo de la ecuación en el caso estocástico tiene en lugar de \dot{q} el operador de Itô, ya que q no es derivable directamente al depender de variables estocásticas.

El lado derecho por su parte es idéntico, a excepción de un término adicional presente en el caso con incertidumbre (asociado a σ). Es decir, el valor esperado de la tasa de crecimiento de producción es igual al caso determinístico, más un término que surge por el efecto no-lineal entre costos de producción y precios.

Un análisis comparativo entre ambas ecuaciones indica que:

- Si $C_{qqq} > 0$ entonces $\frac{1}{dt} E(dq)$ es menor a \dot{q} .
- Si $C_{qqq} < 0$ entonces $\frac{1}{dt} E(dq)$ es mayor a \dot{q} .

En términos prácticos esto establece que a menos que la tercera derivada de $C(q, S)$ respecto a la producción sea nula, en general la introducción de la incertidumbre en el precio va a tener un efecto sobre la producción óptima. En otras palabras, el resultado obtenido dependerá de la no-linealidad de la función de costos marginales C_q . Si esta función es lineal, la tercera derivada será 0 y la producción estocástica será equivalente a la determinada en un ambiente determinístico. La no-linealidad de la función de costos marginales, sin embargo, produce que en general el resultado no sea idéntico al del caso determinístico.

Para explicar esta diferencia se debe recordar la desigualdad de Jensen (Capítulo 7). Esta hace mención a que, si una función es convexa (o cóncava), su valor esperado será distinto a la función evaluada en el valor esperado. Asimismo, si la función de costos marginales es convexa ($C_{qqq} > 0$), entonces el valor esperado del cambio de la producción en el tiempo va a diferir del cambio en la producción en el tiempo evaluado en el valor esperado. Específicamente, Pindyck (1981) observó que la incertidumbre en el precio, junto con una función de costos marginales convexa, genera una "desaceleración" en la velocidad en que decrece la tasa de producción, al tener un valor esperado de cambio menor al del caso determinístico.

Además, se indica que, con una función de costos marginales convexa, los aumentos y disminuciones en el precio tendrán el mismo efecto en la tasa de producción óptima en cada instante de tiempo. Sin embargo, una mayor extracción aumentará significativamente los costos

marginales, por lo que se buscará compensar dicho aumento extrayendo menos para evitar estos incrementos en costos. En el caso de una función de costos marginales cóncava ocurre precisamente lo contrario, y se tiende a aumentar la producción.

Lo anterior genera implicancias prácticas para el proceso de elaboración del plan minero óptimo: si se está frente a una función de costos marginales lineal, estimar un precio esperado y luego optimizar un plan minero en torno al precio estimado conllevará al mismo resultado que simplemente tomar el precio estocástico, optimizar considerando la incertidumbre en el precio del *commodity* y luego calcular el valor esperado de la optimización. Sin embargo, en la práctica la función de costos marginales es en general no-lineal. Por tanto, esperar que la incertidumbre no tenga efecto en la determinación del plan óptimo de producción de una mina es casi siempre una suposición errónea.⁷⁸

Este resultado indica claramente que no da lo mismo eliminar del análisis la incertidumbre. Así, derivar un plan minero utilizando solo el precio esperado del *commodity* en lugar de su proceso estocástico, que corresponde precisamente a la forma en que se planifica en prácticamente todas las minas del mundo en la actualidad, genera en general resultados sub-óptimos.

Según la experiencia del autor en diversos estudios prácticos indican que la diferencia en *VAN* perdido por no considerar la incertidumbre al momento de la generación del plan minero es alrededor de un 10-20%, lo que en proyectos de gran envergadura puede significar varios centenares de millones de dólares.

Cabe destacar que no solo el *VAN* se ve afectado por la incertidumbre, sino que también las decisiones que la mina debiera tomar (algunas de ellas, por lo demás, bastante irreversibles) cambian. Así, por ejemplo, la capacidad de planta que una mina pudiera decidir instalar sin incertidumbre podría ser menor o mayor a lo que considerando la incertidumbre podría decidir.

14.3.2 El efecto de la incertidumbre del precio sobre la secuencia de explotación de leyes

⁷⁸ Pindyck (1981) también muestra que en el caso de linealidad en la función de costos marginales la incertidumbre en precio también puede generar efectos sobre la producción. En particular, el precio podría situarse justo en la zona de indiferencia entre otorgar beneficios y generar pérdidas, por lo que la incertidumbre pudiese incentivar a no querer producir para evitar de esta forma el riesgo no necesariamente compensado por el bajo retorno esperado.

En una mina real, al introducir restricciones de capacidad y altos costos fijos, típicamente se buscará producir al máximo nivel que la capacidad de planta permita, hasta que ya no queden suficientes reservas para mantener dicho nivel de producción. Esto debiese traducirse en una explotación de carácter decreciente en términos de mineral extraído, aunque en términos de producción de *commodity* no siempre será conveniente (o posible) explotar de esta manera, ya que esto exige explotar desde las leyes altas a bajas de forma monotónica, y esto no siempre será óptimo desde el punto de vista dinámico (como queda demostrado en la sub-sección anterior).

Generalmente la extracción de un mineral de un yacimiento tiene asociado un incremento en los costos marginales incrementales relacionados a la cantidad de extracción ya realizada en los períodos anteriores. Así, si una mina decide explotar una gran cantidad de mineral de leyes altas, los costos de extracción serán cada vez mayores en el tiempo (al agotar rápidamente el recurso en términos de su calidad). Sin embargo, frente a una eventual disminución en el precio, explotar las leyes más bajas podría no ser rentable debido al pequeño beneficio que estas generan. De esta forma la explotación acelerada de las leyes altas podría comprometer la sustentabilidad de la mina en periodos de precios bajos.

La problemática de determinar no solo la cantidad a producir, sino que también la calidad asociada a dicha producción (en particular referida a leyes de mineral), es por tanto clave para la determinación de la explotación óptima de minas.

Para determinar el impacto de las leyes en la determinación del plan óptimo de producción, la presente sub-sección se basa en el artículo de Margaret Slade “*Grade Selection under Uncertainty: Least Cost Last and Other Anomalies*” (Slade, 1988). Mediante la introducción de incertidumbre en el precio del *commodity* de interés, Slade (1988) observa que no siempre será óptimo extraer las mayores leyes al principio de la operación, sino que la elección de la ley a extraer dependerá en general de múltiples características de los recursos y la operación de la mina.

El modelo planteado por Slade (1988) considera una empresa minera que posee dos depósitos de mineral, uno con una ley alta, y otro con una ley baja. Se asume que cada mina posee una función de costos marginales dependiente exclusivamente de la tasa de extracción de cada depósito.

Se puede definir así el siguiente problema de la mina bajo certidumbre:

$$\max_{q^i \dots q^n, T} \int_0^T e^{-rt} [P(t) \sum q^i(t) - \sum C_i(q^i(t))] dt \quad (14.52)$$

s. a.

$$\dot{S}^i(t) = -q^i(t) \quad (14.53)$$

$$S^i(0) = S_0^i \quad (14.54)$$

$$q^i, S^i, T \geq 0 \quad (14.55)$$

La resolución de este problema mediante control óptimo genera las siguientes condiciones (la primera de ellas corresponde al Hamiltoniano):

$$\hat{H} = P(t)q^i(t) - C_i(q) + v(t)(-q^i(t)) \quad (14.56)$$

$$i) P(t) - C_q - v(t) = 0 \quad (14.57)$$

$$ii) \dot{S}^i(t) = -q^i(t) \quad (14.58)$$

$$iii) \dot{v} = rv \rightarrow v = v_0 e^{rt} \quad (14.59)$$

Finalmente, combinando las ecuaciones (14.57)-(14.59) se obtiene:

$$P(t) = C_q^i + v_0 e^{rt} \quad (14.60)$$

Al igual que en la sección anterior, se asume una tasa de crecimiento del precio $\alpha < r$, con el fin de justificar la extracción (y no postergarla al último instante de tiempo), en base a la ecuación (para el caso determinístico):

$$\dot{P}(t) = \alpha P \quad (14.61)$$

Slade (1988) concluye que al tener la mina costos marginales constantes, se obtiene como resultado el que la mina busque producir a máxima capacidad (cuando el precio es mayor al costo marginal), no produzca (cuando el precio es menor al costo marginal), o exista indiferencia con respecto a cuánto producir (cuando el precio es idéntico al costo marginal de producción). Este último caso, sin embargo, no es de interés.

Interesa derivar el caso con costos marginales que se incrementan a medida que son explotados, lo que se asemeja más a la realidad (debido, por ejemplo, a que la distancia de transporte aumenta con la profundidad de un rajo).

De igual forma a cómo se derivó la ecuación (14.14), en este caso en particular la tasa óptima de explotación de cada mina vendrá dada por:

$$\dot{q}^i = \frac{-1}{C_{qq}^i} \{r(P(t) - C_q^i) - \alpha P(t)\} \quad (14.62)$$

A simple vista se puede apreciar en esta ecuación que, a medida que los costos marginales son más altos, el cambio en la tasa de producción es mayor. De esta forma, si la tasa estuviese disminuyendo, a mayor costo marginal la disminución de extracción en el período siguiente será mayor en ese depósito.

Esta ecuación indica además que la tasa óptima conllevará a extraer el depósito de leyes altas hasta que los costos marginales sean suficientemente altos, momento en el cual se decidirá extraer el depósito de leyes bajas, tal como se realiza en la práctica.

Para analizar qué ocurre en el modelo determinístico en el caso estocástico, se introduce una componente de incertidumbre en el precio del *commodity* de interés. Para esto, Slade (1988), utiliza el siguiente proceso estocástico para el precio:

$$dP = \alpha P dt + \sigma dz \quad (14.63)$$

El modelo planteado por Slade para el caso estocástico queda entonces:

$$\max_{q^i, \dots, q^n, T} E \left\{ \int_0^T e^{-rt} [p(t) \sum q^i(t) - \sum C_i(q^i(t))] dt \right\} \quad (14.64)$$

, sujeto a las restricciones (14.53)-(14.55) y (14.63).

Resolviendo de manera análoga a la resolución del precio sobre la producción óptima bajo incertidumbre de la sección anterior, se obtiene la ecuación fundamental para optimización dinámica estocástica:

$$\frac{d\pi_d}{ds^i} = -\frac{1}{dt} E \left(d \left(\frac{d\pi_d}{dq^i} \right) \right) \quad (14.65)$$

, con:

$$\pi_d = e^{-rt} [P(t) \sum q^i(t) - \sum C_i(q^i(t))] \quad (14.66)$$

Reemplazando la ecuación (14.66) en (14.65) se obtiene:

$$r[P(t) - C_q^i] = \left(\frac{1}{dt} \right) E(dP) - \left(\frac{1}{dt} \right) E(dC_q^i) \quad (14.67)$$

Esta ecuación es prácticamente idéntica a la obtenida en el caso del precio sobre la producción óptima, a excepción de que en este caso el costo no depende de las reservas, por lo que la componente C_S no aparece. En base a esto se puede simplificar ambos términos esperados con el Lema de Itô:

$$dP = \alpha P dt + \sigma P dz \quad (14.68)$$

$$E(dP) = \alpha P dt \quad (14.69)$$

$$\frac{E(dP)}{dt} = \alpha P \quad (14.70)$$

De donde:

$$\frac{E(dC_q^i)}{dt} = C_{qq}^i \frac{1}{dt} E(dq^i) + \frac{1}{2} C_{qqq}^i \sigma^2 q_p^{i^2} \quad (14.71)$$

Se debe notar nuevamente la diferencia con la sección anterior, donde el término relacionado a las reservas no está presente, y el término con componente de volatilidad no está multiplicado por P^2 debido a la estructura de la fórmula estocástica del precio.

Finalmente, combinando las ecuaciones anteriores se obtiene la fórmula deseada para el valor esperado del cambio en el tiempo de la producción:

$$\frac{1}{dt} E(dq^i) = \frac{-1}{C_{qq}^i} \{r(P(t) - C_q^i) - \alpha P(t) + \frac{1}{2} C_{qqq}^i \sigma^2 q_p^{i^2}\} \quad (14.72)$$

De aquí, se obtienen diversas conclusiones del efecto de la incertidumbre del precio sobre el secuenciamiento de la extracción de leyes. De manera análoga al caso de la producción óptima, se aprecia que la incertidumbre en el precio solamente tiene un efecto en la medida que la función de costos marginales sea convexa o cóncava, y por tanto la segunda derivada de los costos marginales (C_{qqq}^i) sea no nula. Esa conclusión es compartida tanto por Slade (1988) como por Pindyck (1981). Con una función de costos marginales convexa, un incremento en el precio futuro afectará menos al VAN que un decrecimiento en el precio, por lo que hay incentivos desacelerar la producción. El caso contrario ocurre cuando la función de costos marginales es cóncava.

Al considerarse un precio cambiante estocásticamente en el tiempo, este tendrá un efecto en cuánto y qué mineral se extraerá en el tiempo. En particular, a un precio más alto en un principio, las leyes bajas (que pudieran no ser viables en condiciones de precios más bajos)

pasarían a ser económicamente atractivas, por lo que a un mayor precio se podrá optar a sacar leyes de depósitos de menor calidad, observándose de esta forma una ley menor a mayores precios, lo que va contra la percepción habitual en minería. Esta establece que al aumentar el precio del *commodity* de interés se maximiza la utilidad de corto plazo por medio de aumentar la ley del mineral extraído, lo que en un contexto de optimización estocástico Slade (1988) demostró no necesariamente es el caso.

Sumado a lo anterior, en un período de precios altos, la mina puede optar por extraer grandes cantidades de mineral de baja ley para aprovechar el precio, y una menor cantidad de mineral de alta ley, para no incrementar mucho los costos marginales de producción a futuro (cuando es posible el precio sea menor).

14.3.3 El efecto de la incertidumbre de las reservas sobre la producción óptima

Como se ha mencionado anteriormente en el presente capítulo las reservas no siempre son conocidas, como se asume en la práctica. Aunque generalmente los planes mineros en muchos *commodities* se construyen únicamente considerando las reservas probadas (es decir, con alta confiabilidad estadística), todavía en estos casos existen errores propios de la estimación.

Dentro de las consideraciones que debe tener en cuenta el planificador minero se encuentra por esto el cómo fluctúan las reservas a lo largo del tiempo. Estas pueden cambiar a partir de factores como:

- Nuevos descubrimientos derivados de la exploración.
- Cambios en el precio del *commodity* y por tanto en la caracterización de las reservas.
- Cambios tecnológicos.

En términos de la exploración explica Mangel (1985), generalmente el descubrimiento de nuevas reservas viene dado por un proceso del tipo Poisson (discreto con llegada aleatoria). En este caso es posible asumir se inicia con una cantidad de reservas conocidas y un área a explorar (de donde pueden generarse descubrimientos, no del todo predecible en un inicio). La tasa de descubrimiento (que suma a las reservas conocidas en cada instante de tiempo) podría modelarse por ejemplo como:

$$\dot{S}(t) = \mu e(t)dt + \sigma dz \quad (14.73)$$

En donde e es la tasa de exploración en el período t , μ es un parámetro asociado al tamaño del descubrimiento esperado en función del nivel de esfuerzo, y $\sigma > 0$ es otra componente aleatoria que da cuenta del nivel de variabilidad intrínseca asociada al descubrimiento esperado.

Para el caso de recursos no renovables como los minerales, Pindyck (1984) propone una ecuación de la forma de cambio de las reservas para el caso determinístico dado por:

$$\dot{S} = f(e) - q(t) \quad (14.74)$$

Con $f(e)$ la función de regeneración del recurso en base al nivel de esfuerzo en exploración. Agregando la incertidumbre, se utiliza una función con variables estocásticas dependiendo del comportamiento del recurso utilizado, la cual puede llegar a ser similar al caso de exploración. Para efectos de este capítulo, se asumirá que el tamaño de las reservas fluctúa en el tiempo con una componente estocástica producto a las incertidumbres propias de la estimación del recurso, de la forma:⁷⁹

$$\dot{S} = -qdt + \sigma dz \quad (14.75)$$

En donde dz es un diferencial de Wiener, lo que significa que, a mayor tiempo, mayor es el rango en el que pueden variar las reservas debido a la incertidumbre intrínseca.

Suponiendo que la cantidad inicial de reservas conocidas viene dada por S_0 , las reservas al final del periodo de explotación vendrán dadas por:

$$S(T) = \int_0^T q(t)dt = S_0 + \sigma^2 \int_0^T dz \quad (14.76)$$

La cual es una variable aleatoria con media S_0 y varianza $\sigma^2 T$. Como las reservas finales son desconocidas, el LOM de la mina también lo es, representando T una variable endógena al problema (Pindyck, 1980).

De esta forma, el problema a solucionar de optimización estocástica es el siguiente. La empresa debe encontrar la tasa de extracción $q(t)$ que maximiza el VAN de la mina, dada la

⁷⁹ Se puede asumir en este caso que q corresponde a la tasa neta de extracción, dada por la diferencia entre la producción y la tasa de descubrimiento.

incertidumbre en sus reservas. Para ejemplificar este caso, supóngase el problema de la mina es el siguiente:

$$\max_{q,T} E \left[\int_0^T [Pq - C(q,S)] e^{-rt} dt \right] \quad (14.77)$$

s. a.

$$\dot{S} = -qdt + \sigma dz \quad (14.78)$$

$$S, q \geq 0 \quad (14.79)$$

A continuación, se presenta el desarrollo de este problema tanto con reservas inciertas como precio incierto, integrando el conocimiento de la sub-sección anterior. Este problema está basado en el artículo de Robert Pindyck “*Uncertainty and Exhaustible Resource Markets*” (Pindyck, 1980) en donde se analiza el efecto de la incertidumbre de reservas sobre la producción óptima. Para el presente desarrollo se utilizará el caso propuesto por Pindyck con algunas modificaciones y desarrollo adicional que faciliten la comprensión del lector.

Así el problema de la empresa minera está dado por:

$$\max_{q(t),T} E [VAN(q(t))] = E \left[\int_0^T e^{-rt} \{P(t)q(t) - C(q(t),S(t))\} dt \right] \quad (14.80)$$

s. a.

$$dP = \alpha P dt + \sigma_p P dz_p \quad (14.81)$$

$$dS = -q dt + \sigma_s dz_s \quad (14.82)$$

En donde σ_p y σ_s son parámetros que representan la variabilidad de la incertidumbre proveniente de la estimación del precio del mercado y de las reservas, respectivamente. Por otro lado, dz_p y dz_s corresponden a diferenciales de Wiener. Para efectos de este modelo se considerará que T es exógeno y $E(dz_p dz_s) = 0$ (es decir, las incertidumbres de precio y reservas son independientes). Pindyck (1980) propone un modelo similar, pero en un caso con función de costos dependiente únicamente de las reservas (es decir, $C(S)$).

Utilizando optimización dinámica estocástica, se obtendrá a través del principio de optimalidad de Bellman:

$$J(S, P, t) = \max_q E\{\pi_d(t)dt + J(S + dS, P + dP, t + dt)\} \quad (14.83)$$

$$0 = \max_q E\{\pi_d(t)dt + J(S + dS, P + dP, t + dt) - J(S, P, t)\} \quad (14.84)$$

$$0 = \max_q E\{\pi_d(t)dt + dJ\} \quad (14.85)$$

$$0 = \max_q \{\pi_d(t)dt + E(dJ)\} \quad (14.86)$$

Dividiendo por dt se obtiene la condición de equilibrio:

$$0 = \max_q \{\pi_d(t) + \frac{1}{dt}E(dJ)\} \quad (14.87)$$

Luego, usando la descomposición por series de Taylor:

$$dJ = \left[J_t + \alpha P J_P + \frac{1}{2} \sigma_P^2 P^2 J_{PP} - q J_S + \frac{1}{2} \sigma_S^2 S J_{SS} \right] dt + \sigma_P P J_P dz_P + \sigma_S P J_S dz_S \quad (14.88)$$

Reemplazando (14.88) en (14.87):

$$0 = \max_q \{\pi_d(t) + (J_t + \alpha P J_P + \frac{1}{2} \sigma_P^2 P^2 J_{PP} - q J_S + \frac{1}{2} \sigma_S^2 S J_{SS})\} \quad (14.89)$$

Derivando con respecto a q :

$$\frac{\partial \pi_d(t)}{\partial q} = J_S \quad (14.90)$$

Se aprecia que esta condición necesaria es idéntica al caso del precio estocástico y reservas conocidas obtenida en la sub-sección 14.2.2. Esto da para observar que tanto para incertidumbre de reservas e incertidumbres en el precio, lo que se obtiene de la utilidad descontada adicional, si se produce una unidad extra debe ser igual a cuanto decrece el VAN futuro producto de la disminución de las reservas.

Ahora, derivando (14.89) con respecto a S :

$$\frac{\partial \pi_d(t)}{\partial S} + J_{tS} + \alpha P J_{PS} + \frac{1}{2} \sigma_P^2 P^2 J_{PPS} - q J_{SS} + \frac{1}{2} \sigma_S^2 S J_{SSS} = 0 \quad (14.91)$$

Usando el Lema de Itô se tiene que:

$$\frac{\partial \pi_d(t)}{\partial S} + \frac{1}{dt} E(dJ_S) = 0 \quad (14.92)$$

Aplicando el operador de Itô, $\frac{1}{dt}Ed()$, a ambos lados:

$$\frac{1}{dt}E\left(d\left(\frac{\partial\pi_d(t)}{\partial q}\right)\right) = \frac{1}{dt}E(dJ_S) \quad (14.93)$$

$$\frac{1}{dt}E\left(d\left(\frac{\partial\pi_d(t)}{\partial q}\right)\right) = -\frac{\partial\pi_d(t)}{\partial S} \quad (14.94)$$

Llegando así a la ecuación fundamental para optimización dinámica estocástica, y demostrando que, a pesar de ahora tener dos variables estocásticas, el desarrollo sigue siendo el mismo.

Desarrollando los términos de la ecuación:

$$\frac{\partial\pi_d(t)}{\partial q} = (P - C_q)e^{-rt} \quad (14.95)$$

$$-\frac{\partial\pi_d(t)}{\partial S} = C_s e^{-rt} \quad (14.96)$$

Reemplazando estos valores en (14.94):

$$\frac{1}{dt}E(d(P - C_q)e^{-rt}) = C_s e^{-rt} \quad (14.97)$$

Expandiendo el lado izquierdo de la ecuación anterior:

$$dC_q(q, S) = C_{qq}dq + C_{qs}dS + \frac{1}{2}C_{qqq}(dq)^2 + \frac{1}{2}C_{qss}(dS)^2 \quad (14.98)$$

Por el Lema de Itô, se calcula dq :

$$dq(t, P, S) = \left[q_t + \alpha P q_P + \frac{1}{2}\sigma_P^2 P^2 q_{PP} - q q_S + \frac{1}{2}\sigma_S^2 q_{SS} \right] dt + (\sigma_P P) q_P dz_P + (\sigma_S P) q_S dz_S \quad (14.99)$$

Además:

$$E(dq)^2 = (q_P^2 \sigma_P^2 P^2 + q_S^2 \sigma_S^2) dt \quad (14.100)$$

$$E(dS)^2 = E(-q dt + \sigma_S dz_S)^2 = \sigma_S^2 dt \quad (14.101)$$

Por lo tanto:

$$\frac{1}{dt}E\left((dP - dC_q)e^{-rt} - r(P - C_q)e^{-rt} dt\right) = C_s e^{-rt} \quad (14.102)$$

De donde al dividir por e^{-rt} resulta:

$$\frac{1}{dt}E\left((dP - dC_q) - r(P - C_q)dt\right) = C_s \quad (14.103)$$

Considerando que $E(dP) = \alpha P dt$, se puede escribir la ecuación anterior como:

$$\alpha P - \frac{1}{dt}E(dC_q) - rP + rC_q = C_s \quad (14.104)$$

Ahora, si se considera que:

$$E(dC_q) = E\left(C_{qq}dq + C_{qs}ds + \frac{1}{2}C_{qqq}(dq)^2 + \frac{1}{2}C_{qss}(dS)^2\right) \quad (14.105)$$

Se puede expandir esta expresión para llegar a:

$$\alpha P - \left(C_{qq} \frac{1}{dt}E(dq) + C_{qs} \frac{1}{dt}E(ds) + \frac{1}{2}C_{qqq} \frac{1}{dt}E(dq^2) + \frac{1}{2}C_{qss} \frac{1}{dt}E(dS^2)\right) - rP + rC_q = C_s \quad (14.106)$$

$$\alpha P - \left(C_{qq} \frac{1}{dt}E(dq) + C_{qs} \frac{1}{dt}E(-qdt) + \frac{1}{2}C_{qqq} \frac{1}{dt}(q_P^2 \sigma_P^2 P^2 + q_S^2 \sigma_S^2)dt + \frac{1}{2}C_{qss} \frac{1}{dt}(\sigma_S^2 dt)\right) - rP + rC_q = C_s \quad (14.107)$$

$$\alpha P - \left(C_{qq} \frac{1}{dt}E(dq) - qC_{qs} + \frac{1}{2}C_{qqq}(q_P^2 \sigma_P^2 P^2 + q_S^2 \sigma_S^2) + \frac{1}{2}C_{qss}\sigma_S^2\right) - rP + rC_q = C_s \quad (14.108)$$

$$\frac{1}{dt}E(dq) = \frac{\alpha P + qC_{qs} - \frac{1}{2}C_{qqq}(q_P^2 \sigma_P^2 P^2 + q_S^2 \sigma_S^2) - \frac{1}{2}C_{qss}\sigma_S^2 - rP + rC_q - C_s}{C_{qq}} \quad (14.109)$$

Reordenando términos:

$$\frac{1}{dt}E(dq) = -\frac{1}{C_{qq}}\left[(r - \alpha)P - qC_{qs} + \frac{1}{2}C_{qqq}(q_P^2 \sigma_P^2 P^2 + q_S^2 \sigma_S^2) + \frac{1}{2}C_{qss}\sigma_S^2 - rC_q + C_s\right] \quad (14.110)$$

Nótese que en (14.110) mientras mayor es la volatilidad tanto de las reservas como del precio, mayor será el efecto sobre el valor esperado del cambio de la producción óptima. Además, si consideramos un escenario determinístico en la dinámica de precios y de evolución de reservas, es decir, $\sigma_p = \sigma_s = 0$, la tasa de cambio de la producción quedará representada por la misma que en el caso determinístico:

$$\dot{q} = -\frac{1}{C_{qq}}\left[r(P - C_q) + C_s - qC_{qs} - \alpha P\right] \quad (14.111)$$

Se puede apreciar además que nuevamente el caso probabilístico tendrá efecto siempre y cuando la función de costos marginales sea no-lineal respecto a la producción, la cual, al ser cóncava o convexa, introducirá el efecto de la incertidumbre tanto de las reservas como del precio. Esto ocurre ya que tal como el cambio en el precio genera una variación en la tasa de extracción, también lo genera un cambio en las reservas. La función de costos marginales en el caso de ser convexa, produce un aumento en la tasa de extracción, tanto por cambios en reservas o precio, que tendrán todos un efecto mayor que una disminución, incentivando así la producción más temprana (ocurriendo lo contrario a si fuese cóncava).

Nótese que si la función de costos marginales es además no-lineal con respecto a las reservas, el efecto de la incertidumbre de las reservas será aplicado nuevamente sobre la ecuación, teniendo así un segundo impacto sobre el cambio esperado en la tasa de producción óptima.

Para analizar esta nueva variable en la ecuación, Pindyck (1980) menciona que al aumentar o disminuir las reservas de manera aleatoria, habrá un cambio en la tasa de producción, tal como ocurre con el precio. Además, dado que el costo marginal es no-lineal en las reservas, se producirá un incremento en los costos producto del consumo de las reservas, y al ser una función convexa respecto a las reservas, una disminución de reservas tendrá una influencia mayor sobre el aumento del costo, que un aumento de reservas. Nuevamente esto incentivará el producir más rápido que en el caso determinístico, para sortear así esta incertidumbre.

Se puede mencionar además que, al tener múltiples variables estocásticas, hay una mejor perspectiva de las incertidumbres en la minería. Como se vio en la sección de la incertidumbre del precio, si la función de costos marginales era lineal en q , la ecuación determinística y estocástica son en la práctica idénticas. En el caso recién analizado ocurriría lo mismo, sin embargo, al considerar la incertidumbre de las reservas, se puede ver que igualmente existirá un efecto de estas sobre la producción óptima mediante la no-linealidad de la función de costos marginales respecto a las reservas, por lo que evaluar e introducir las fuentes de incertidumbre relevantes en un plan minero es crítico para obtener la solución más óptima posible.

14.3.4 El uso de la exploración para reducir la incertidumbre de los recursos

En el caso de la minería, una de las mayores fuentes de incertidumbre son las características geológicas del yacimiento. Disciplinas como la geoestadística buscan estudiar la forma en la que se comporta espacialmente la distribución de leyes de mineral y, de esta forma, predecir las características de un yacimiento a partir de muestras obtenidas por sondajes.

Las mallas de sondajes son utilizadas en los procesos de exploración en minería, y tienen dos objetivos primordiales: descubrir nuevas fuentes de mineral y/o obtener más y mejor información sobre los recursos ya conocidos. Sin embargo, una campaña de sondajes es en general costosa, por lo que el planificador debe determinar qué tan valiosa es conseguir esta información.

A continuación, se trabajará con el modelo propuesto por Pindyck (1980), presentado anteriormente, en el cual la exploración se usa como medio para reducir la incertidumbre de los recursos. Para esto, se incluirá un término E correspondiente al esfuerzo de exploración y un parámetro W que representa la cantidad de conocimiento adquirido por la exploración.

El modelo es el siguiente:

$$\max_{q,E} E \left(\int_0^T [P(q)q - C_1(S)q - C_2(E)] e^{-rt} dt \right) = E \left(\int_0^T \pi_d(t) dt \right) \quad (14.112)$$

s. a.

$$dS = -qdt + \sigma(W)dz \quad (14.113)$$

$$dW = g(E)dt \quad (14.114)$$

$$q, W, E, S \geq 0 \quad (14.115)$$

El valor de W se genera debido a que este reduce la variación de la componente estocástica de las reservas, por lo que se asume que $\sigma'(W) < 0$. Para este modelo se asume que $C_2' > 0$, $C_2'' \geq 0$, $g' > 0$, $g'' \leq 0$, el costo marginal de descubrimiento viene dado por $\frac{C_2'(E)}{g'(E)}$, es creciente y se tiene por definición que $\frac{C_2'(0)}{g'(0)} = 0$.

De aquí se obtiene que la tasa esperada de cambio de precio de mercado es la misma que en el caso del mercado competitivo, y que la tasa esperada de cambio del esfuerzo de exploración está dada por:⁸⁰

$$\frac{1}{dt} E(dE) = \frac{\frac{C_2'(E)}{g'(E)} - \frac{1}{2}\sigma^2(W)E_S^2 \left(\frac{C_2'(E)}{g'(E)} \right)'' + \sigma'(W)\sigma(W)C_1'(S)}{\left(\frac{C_2'(E)}{g'(E)} \right)'} \quad (14.116)$$

⁸⁰ Para un desarrollo completo de este resultado se debe revisar Pindyck (1980).

No es difícil demostrar que, si los costos son constantes respecto a las reservas, no existirá un incentivo a invertir en exploración ya que estas no responderán en una disminución de los gastos de producción. En cambio, si $C'_1 < 0$ entonces el conocimiento adquirido de la exploración, W , adquiere un valor económico para la mina. Esto se debe a que las fluctuaciones de S debido a su propio proceso estocástico conllevarán a un aumento de los costos en el horizonte de planificación. Por tanto, a través de un aumento de W se puede disminuir el factor σ , permitiendo una mejor planificación de la producción.

14.3.5 El uso de la exploración para incrementar las reservas

En este caso, se tratará con la exploración como medio para aumentar las reservas disponibles. Sin embargo, se incluirá una componente estocástica en la relación existente entre el esfuerzo de exploración y el descubrimiento efectivo de nuevas reservas. De esta manera, a la variable E anteriormente introducida, se incluirá una variable x correspondiente a la acumulación de reservas descubiertas y un parámetro θ que sigue un proceso estocástico y que da cuenta de la incertidumbre intrínseca en x .

El problema queda planteado de la siguiente forma:

$$\max_{q,E} E \left(\int_0^T [Pq - C_1(S)q - C_2(E)] e^{-rt} dt \right) = E \left(\int_0^T \pi_d(t) dt \right) \quad (14.117)$$

s. a.

$$\dot{S} = \dot{x} - q \quad (14.118)$$

$$\dot{x} = f(E, x, \theta) \quad (14.119)$$

$$d\theta = \sigma(\theta) dz \quad (14.120)$$

$$S, q, E, x \geq 0 \quad (14.121)$$

Para este modelo se asume que $C'_1(S) < 0$, $C'_2(E) > 0$, $C''_2(E) \geq 0$ y que el costo marginal de descubrimiento, dado por $\frac{C'_2(E)}{f_E}$, aumenta con E .

La solución de este problema muestra que la dinámica de los esfuerzos de exploración está dada por:⁸¹

$$\frac{1}{dt} E(dE) = \frac{C_2'(E) \left[\left(\frac{f_{Ex}}{f_E} \right) f - f_x + r + \frac{1}{2} \sigma^2 (\theta) \frac{f_{E\theta\theta}}{f_E} \right] + C_1'(S) q f_E}{C_2''(E) - C_2'(E) \left(\frac{f_{EE}}{f_E} \right)} \quad (14.122)$$

Mientras que para el precio se tiene:

$$\frac{1}{dt} E(dp) = rP - rC_1(S) + C_1'(S) f(E, x, \theta) \quad (14.123)$$

Se puede apreciar que el efecto de la incertidumbre radica en la no-linealidad de f con respecto a θ , ya que de lo contrario esta desaparecería de la ecuación. Si se tiene el caso de que $f_{E\theta\theta} > 0$ y $f_{EE} < 0$, la incertidumbre implicará que $\frac{1}{dt} E(dE)$ sea mayor (Pindyck, 1980). Esto hará que el esfuerzo de exploración sea más bajo al principio, y decaiga de manera más lenta en el tiempo.

Por otro lado, el horizonte de tiempo en el que actúa la exploración se ve afectado por la inclusión de la variable estocástica. Esto se debe a que la productividad promedio de la exploración se puede ver afectada, y, por tanto, el nivel óptimo de exploración.

14.4 Problemas resueltos

Problema 14.1

Una empresa minera desea resolver el siguiente problema de optimización:

$$\max_{q(t)} E[VAN(q(t))] = E \left[\int_0^T e^{-rt} \{P(t)q(t) - C(q(t), S(t))\} dt \right]$$

s. a.

$$dP = \eta(\bar{P} - P)dt + \sigma_P dz_P$$

$$dS = -qdt + \sigma_S dz_S$$

⁸¹ Para un desarrollo completo de este resultado se debe revisar Pindyck (1980).

Donde $S(t)$ son los recursos de mineral remanentes en t , $q(t)$ es la producción instantánea en t , $P(t)$ es el precio del *commodity* mineral en t , σ_p y σ_s son dos constantes positivas que dan cuenta del nivel de incertidumbre en la estimación del precio del *commodity* mineral y los recursos originalmente estimados en $t = 0$ dados por S_0 , respectivamente. T se asume fijo y conocido por la empresa. En la condición de agotabilidad, dz_p y dz_s corresponden a diferenciales de Wiener y la empresa considera que $E(dz_p dz_s) = 0$.

- Mediante optimización dinámica estocástica encuentre la derivada esperada de la producción respecto al tiempo. ¿Cómo se compara esta solución con el caso $\sigma_s = 0$ derivado en el capítulo?
- La producción esperada derivada respecto al tiempo para $\sigma_s > 0$, ¿será menor, mayor o igual que la producción esperada derivada respecto al tiempo para $\sigma_s = 0$? ¿De qué depende la respuesta? Explique.
- Para $C(q(t), S(t)) = \frac{\gamma q^2}{2S}$, con γ una constante positiva, encuentre la condición que debe cumplir σ_s para que la producción esperada sea decreciente en todo instante de tiempo.

Solución

a. Por principio de optimalidad de Bellman se tiene que la condición de equilibrio para el problema es:

$$0 = \max_q \left\{ \pi_d(t) + \frac{1}{dt} E(dJ) \right\}$$

Luego:

$$dJ = \left[J_t + \eta(\bar{P} - P)J_P + \frac{1}{2}\sigma_p^2 P^2 J_{PP} + (-q)J_S + \frac{1}{2}\sigma_s^2 J_{SS} \right] dt + \sigma_p J_P dz_p + \sigma_s J_S dz_s$$

Reemplazando:

$$0 = \max_q \left\{ \pi_d(t) + \left(J_t + \alpha P J_P + \frac{1}{2}\sigma_p^2 J_{PP} + (-q)J_S + \frac{1}{2}\sigma_s^2 J_{SS} \right) \right\}$$

Derivando con respecto a q :

$$\frac{\partial \pi_d(t)}{\partial q} + (-J_s) = 0$$

$$\frac{\partial \pi_d}{\partial q} = J_s$$

Derivando la condición de equilibrio con respecto a S :

$$\frac{\partial \pi_d}{\partial S} + J_{ts} + \eta(\bar{P} - P)J_{Ps} + \frac{1}{2}\sigma_P^2 J_{PPs} - qJ_{ss} + \frac{1}{2}\sigma_S^2 J_{SSs} = 0$$

$$\frac{\partial \pi_d}{\partial S} + \frac{1}{dt}E(dJ_s) = 0$$

De donde se obtiene que:

$$\frac{1}{dt}E\left[d\left(\frac{\partial \pi_d}{\partial q}\right)\right] = -\frac{\partial \pi_d}{\partial S}$$

De acuerdo con el problema:

$$\pi_d = [Pq - C(q, S)]e^{-rt}$$

$$\frac{\partial \pi_d}{\partial q} = (P - C_q) e^{-rt}$$

$$-\frac{\partial \pi_d}{\partial S} = +C_s e^{-rt}$$

Entonces:

$$\frac{1}{dt}E[d((P - C_q) e^{-rt})] = C_s e^{-rt}$$

$$dC_q(q, S) = C_{qq}dq + C_{qs}dS + \frac{1}{2}C_{qqq}(dq)^2 + \frac{1}{2}C_{qss}(dS)^2$$

Por Lema de Itô:

$$dq(t, P, S) = \left[q_t + \eta(\bar{P} - P)q_p + \frac{1}{2}\sigma_P^2 q_{PP} - qq_s + \frac{1}{2}\sigma_S^2 q_{SS} \right] dt + (\sigma_P)q_p dz_P + (\sigma_S)q_s dz_S$$

Se tiene que:

$$(dq)^2 = (q_P \sigma_P dz_P)^2 + (q_S \sigma_S dz_S)^2 + 2q_P \sigma_P q_S \sigma_S (dz_P dz_S)$$

Ahora, utilizando el hecho de que:

$$E(dz_P dz_S) = 0$$

Se tiene finalmente:

$$E(dq)^2 = E(q_P^2 \sigma_P^2 + q_S^2 \sigma_S^2) dt$$

$$E(dS)^2 = E(-q dt + \sigma_S dz_S)^2 = \sigma_S^2 dt$$

Por lo tanto:

$$\frac{1}{dt} E \left((dP - dC_q) e^{-rt} - r(P - C_q) e^{-rt} dt \right) = C_s e^{-rt}$$

$$\frac{1}{dt} E \left((dP - dC_q) - r(P - C_q) dt \right) = C_s$$

Desarrollando por Lema de Itô:

$$E(dP) = \eta(\bar{P} - P) dt$$

$$E(dC_q) = E \left(C_{qq} dq + C_{qs} dS + \frac{1}{2} C_{qqq} (dq)^2 + \frac{1}{2} C_{qss} (dS)^2 \right)$$

De donde:

$$\eta(\bar{P} - P) - \frac{1}{dt} E(dC_q) - rP + rC_q = C_s$$

$$\eta(\bar{P} - P) - \left(C_{qq} \frac{1}{dt} E(dq) + C_{qs} \frac{1}{dt} E(dS) + \frac{1}{2} C_{qqq} \frac{1}{dt} E(dq^2) + \frac{1}{2} C_{qss} \frac{1}{dt} E(dS^2) \right) - rP + rC_q = C_s$$

$$\eta(\bar{P} - P) - \left(C_{qq} \frac{1}{dt} E(dq) + C_{qs} \frac{1}{dt} (-q dt) + \frac{1}{2} C_{qqq} \frac{1}{dt} (q_P^2 \sigma_P^2 + q_S^2 \sigma_S^2) dt + \frac{1}{2} C_{qss} \frac{1}{dt} (\sigma_S^2 dt) \right) - rP + rC_q = C_s$$

$$\eta(\bar{P} - P) - \left(C_{qq} \frac{1}{dt} E(dq) - qC_{qs} + \frac{1}{2} C_{qqq} (q_P^2 \sigma_P^2 + q_S^2 \sigma_S^2) + \frac{1}{2} C_{qss} \sigma_S^2 \right) - rP + rC_q = C_s$$

$$\frac{1}{dt} E(dq) = \frac{\eta(\bar{P} - P) + qC_{qs} - \frac{1}{2} C_{qqq} (q_P^2 \sigma_P^2 + q_S^2 \sigma_S^2) - \frac{1}{2} C_{qss} \sigma_S^2 - rP + rC_q - C_s}{C_{qq}}$$

Con $\sigma_S = 0$ se obtiene ue:

$$\frac{1}{dt} E(dq) = \frac{1}{C_{qq}} \left[\eta(\bar{P} - P) - r(P - C_q) - C_s + qC_{qs} - \frac{1}{2} C_{qqq} (q_P^2 \sigma_P^2) \right]$$

Se obtiene así una expresión equivalente a la desarrollada en el capítulo para un caso de producción óptima bajo incertidumbre de tipo:

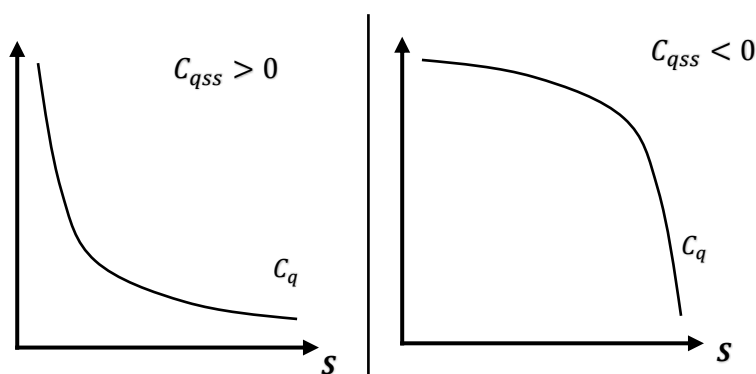
$$\max_{q(t)} E(VAN(q(t))) = E \left[\int_0^T e^{-rt} \{P(t)q(t) - C(q(t), S(t))\} dt \right]$$

s. a.

$$dP = \alpha P dt + \sigma_P P dz_P$$

$$dS = -q dt$$

b. La producción esperada derivada respecto al tiempo para $\sigma_S > 0$ (en comparación al caso $\sigma_S = 0$) será menor cuando $C_{qss} > 0$, mayor cuando $C_{qss} < 0$ e indiferente cuando $C_{qss} = 0$.



c. Sea $C(q, S) = \frac{1}{2} \frac{\gamma q^2}{S}$, con $\gamma > 0$. Esto implica que las derivadas parciales para $C(q, S)$ vienen dadas por:

$$C_{qqq} = 0$$

$$C_q = \frac{\gamma q}{S}$$

$$C_s = -\frac{1}{2} \frac{\gamma q^2}{S^2}$$

$$C_{qq} = \frac{\gamma}{S}$$

$$C_{qs} = -\frac{\gamma q}{S^2}$$

$$C_{qss} = \frac{2\gamma q}{S^3}$$

Considerando la solución para $\frac{1}{dt}E(dq)$ hallada en la parte a) decreciente para todo instante de tiempo, se obtiene:

$$\frac{1}{dt}E(dq) = \frac{\eta(\bar{P} - P) + qC_{qs} - \frac{1}{2}C_{qqq}(q_P^2\sigma_P^2 + q_S^2\sigma_S^2) - \frac{1}{2}C_{qss}\sigma_S^2 - rP + rC_q - C_s}{C_{qq}} < 0$$

$$\eta(\bar{P} - P) - \frac{\gamma q^2}{S^2} - \frac{\gamma q}{S^3}\sigma_S^2 - rP + \frac{r\gamma q}{S} - \frac{\gamma q^2}{2S^2} < 0$$

$$\eta(\bar{P} - P) - \frac{\gamma q^2}{S^2} - rP + \frac{r\gamma q}{S} - \frac{\gamma q^2}{2S^2} < \frac{\gamma q}{S^3}\sigma_S^2$$

Despejando este último resultado para σ_S :

$$\sqrt{\frac{\eta(\bar{P} - P)S^3}{\gamma q} - \gamma qS - \frac{rpS^3}{\gamma q} + rS^2 - \frac{S}{2q}} < \sigma_S$$

Problema 14.2

Resolver el siguiente problema de producción óptima para una empresa minera cuyo precio responde a un proceso estocástico del tipo reversión a la media:

$$\max_{q(t)} E[VAN(q(t))] = E \left[\int_0^T e^{-rt} \{P(t)q(t) - C(q(t), S(t))\} dt \right]$$

s. a.

$$dP = \eta(\bar{P} - P)dt + \sigma_P dz$$

$$dS = -qdt$$

Solución

Utilizando la ecuación fundamental de la optimización dinámica estocástica:

$$\frac{1}{dt} E \left[d \left(\frac{\partial \pi_d}{\partial q} \right) \right] = - \frac{\partial \pi_d}{\partial S}$$

De donde:

$$\pi_d = [Pq - C(q, S)]e^{-rt}$$

$$\frac{\partial \pi_d}{\partial q} = (P - C_q)e^{-rt}$$

$$- \frac{\partial \pi_d}{\partial S} = C_s e^{-rt}$$

Entonces:

$$\frac{1}{dt} E [d((P - C_q)e^{-rt})] = C_s e^{-rt}$$

$$\frac{1}{dt} E \left((dP - dC_q) - r(P - C_q)dt \right) = C_s$$

$$E(dp) = \eta(\bar{P} - P)dt$$

$$dC_q(q, s) = C_{qq}dq + C_{qs}dS + \frac{1}{2}C_{qqq}(dq)^2$$

Por Lema de Itô:

$$dq = \left[q_t + \alpha P q_P + \frac{1}{2} \sigma_P^2 P^2 q_{PP} - q q_s \right] dt + (\sigma_P) q_P dz_P$$

De donde:

$$(dq)^2 = (\sigma_P q_P dz_P)^2$$

$$(dq)^2 = (\sigma_P^2 q_P^2) dt$$

Considerando que:

$$E(dp) = \eta(\bar{P} - P)dt$$

$$E(dC_q) = E\left(C_{qq}dq + C_{qs}dS + \frac{1}{2}C_{qqq}(dq)^2\right)$$

$$E(dC_q) = C_{qq}E(dq) + C_{qs}E(dS) + \frac{1}{2}C_{qqq}E(dq^2)$$

$$E(dC_q) = C_{qq}E(dq) + C_{qs}(dS) + \frac{1}{2}C_{qqq}(\sigma_P^2 q_P^2 dt)$$

De donde se obtiene que:

$$\eta(P - P) - C_{qq} \frac{1}{dt} E(dq) - C_{qs} \frac{1}{dt} (dS) - \frac{1}{2} C_{qqq} (\sigma_P^2 q_P^2) - r(P - C_q) = C_s$$

$$\eta(\bar{P} - P) - C_{qs} \frac{1}{dt} (dS) - \frac{1}{2} C_{qqq} (\sigma_P^2 q_P^2) - r(P - C_q) - C_s = C_{qq} \frac{1}{dt} E(dq)$$

De aquí:

$$\frac{1}{dt} E(dq) = -\frac{1}{C_{qq}} \left(-\eta(P - \bar{P}) - C_{qs}q + \frac{1}{2} C_{qqq} (\sigma_P^2 q_P^2) + r(P - C_q) + C_s \right)$$

Problema 14.3

Considérese una empresa minera que produce un único *commodity* mineral. La empresa posee una tasa de descuento continua dada por r . Para efectos comerciales se asume que la empresa es tomadora de precios en el mercado, y que estos evolucionan en el tiempo según $P(t)$. Además, se tiene que $q(t)$ corresponde a la cantidad del *commodity* producido en el instante t . La mina posee una cantidad de reservas probadas dadas por $S(t)$ para cada instante de tiempo, mientras que la campaña de exploración permite descubrir nuevas reservas a una tasa $f(E(t), x(t), \theta)$, donde $E(t)$ es el esfuerzo de exploración, $x(t)$ es la acumulación de nuevas reservas y el parámetro θ sigue un proceso estocástico dado por: $d\theta = \sigma(\theta)dz$, siendo dz un diferencial de Weiner, de tal forma que se cumple: $\dot{x} = f(E, x, \theta)$.

Por otro lado, los ingenieros de minas y procesos de la operación han derivado que el costo de explotación del yacimiento viene dado por $C_1(S)$ y el gasto debido a la campaña de exploración viene dado por $C_2(E)$.

a. Plantee el problema de optimización dinámica para determinar el nivel de esfuerzo óptimo de exploración y a la vez la extracción de mineral óptima en el tiempo, tal que se maximice el VAN de la operación. Para esto defina la función objetivo, restricciones y condiciones del problema

b. Mediante optimización dinámica estocástica, encuentre el precio esperado derivado respecto al tiempo, como también el esfuerzo de exploración esperado derivado respecto al tiempo.

Solución

a) El problema a resolver se puede plantear como:

$$\max_{q,E} E \int_0^T [Pq - C_1(S)q - C_2(E)] e^{-rt} dt$$

s. a.

$$\dot{S} = \dot{x} - q$$

$$\dot{x} = f(E, x, \theta)$$

$$d\theta = \sigma(\theta) dz$$

$$S, q, E, x \geq 0$$

b. Se escribe el problema de la siguiente forma:

$$J = J(S, x, t, \theta) = \max_{q,E} E \left(\int_0^T \pi_d dt \right)$$

Mediante programación dinámica estocástica se tiene:

$$J(S, x, t, \theta) = \max_{q,E} E \{ \pi_d(t) dt + J(S + dS, x + dx, t + dt, \theta + d\theta) \}$$

Expandiendo según series de Taylor se obtiene:

$$J(S + dS, x + dx, t + dt, \theta + d\theta) = J + J_S dS + J_x dx + J_t dt + J_\theta d\theta + \frac{1}{2} J_{\theta\theta} (d\theta)^2$$

Dividiendo por dt y aplicando el valor esperado:

$$E\left(\frac{dS}{dt}\right) = f(E, x, \theta) - q$$

$$E\left(\frac{dx}{dt}\right) = f(E, x, \theta)$$

$$E(d\theta) = 0$$

$$E(d\theta^2) = \sigma^2(\theta)dt$$

Y eliminando J de ambos lados de la ecuación se tiene:

$$0 = \max_{q,E} \{ \pi_d(t) + J_t + J_S (f(E, x, \theta) - q) + J_x f(E, x, \theta) + \frac{1}{2} J_{\theta\theta} \sigma^2(\theta) \}$$

Maximizando con respecto a q se tiene:

$$\frac{\partial \pi_d(t)}{\partial q} - J_S = 0$$

$$\frac{\partial \pi_d(t)}{\partial q} = J_S$$

Derivando con respecto a S y agrupando términos se tiene que:

$$\frac{\partial \pi_d(t)}{\partial S} + \left(\frac{1}{dt}\right) E(d(J_S)) = 0$$

Aplicando el operador $\frac{1}{dt} E(d(\))$:

$$\frac{1}{dt} E\left(d\left(\frac{\partial \pi_d(t)}{\partial q}\right)\right) = \frac{1}{dt} E(d(J_S))$$

Igualando:

$$\frac{1}{dt} E \left(d \left(\frac{\partial \pi_d(t)}{\partial q} \right) \right) = - \frac{\partial \pi_d(t)}{\partial S}$$

Lo que significa que la ganancia marginal de vender una unidad de reservas debe ser igual a la esperanza de la suma de los ingresos descontados a futuro provenientes de dejar esa unidad *in situ*.

Ahora, maximizando con respecto a los esfuerzos de exploración E :

$$\frac{\partial \pi_d(t)}{\partial E} + J_s f_E + J_x f_E = 0$$

$$\frac{\partial \pi_d(t)}{\partial E} = -f_E (J_s + J_x)$$

Esta ecuación representa el precio sombra proveniente de una unidad extra descubierta por la exploración, es decir, el valor presente de los flujos al aumentar en dicha unidad los recursos base más el aumento del acumulado de recursos descubiertos.

Dado que $\frac{\partial \pi_d(t)}{\partial x} = 0$, se puede derivar la condición de equilibrio utilizando el Lema de Itô, de donde se obtiene:

$$\frac{1}{dt} E(dJ_x) = -f_x (J_s + J_x)$$

Combinando estas ecuaciones:

$$\frac{1}{dt} E(dJ_x) = \left(\frac{f_x}{f_E} \right) \frac{\partial \pi_d(t)}{\partial E}$$

Aplicando el operador $\frac{1}{dt} E[d()]$ a ambos lados de la ecuación:

$$\frac{1}{dt} E \left[\left(\frac{\partial \pi_d(t)}{\partial E} \right) \right] = -f_E \frac{1}{dt} E[J_s] - f_E \frac{1}{dt} E[J_x] - (J_s + J_x) \frac{1}{dt} E[f_E]$$

De donde:

$$\frac{1}{dt} E \left[\left(\frac{\partial \pi_d(t)}{\partial E} \right) \right] = f_E \frac{\partial \pi_d(t)}{\partial S} - f_x \frac{\partial \pi_d(t)}{\partial E} + \left(\frac{1}{f_E} \right) \frac{\partial \pi_d(t)}{\partial E} \frac{1}{dt} E[f_E]$$

Tomando en cuenta que:

$$\frac{\partial \pi_d(t)}{\partial q} = (P - C_1(S))e^{-rt}$$

$$\frac{\partial \pi_d(t)}{\partial E} = -C_2'(E)e^{-rt}$$

$$\frac{\partial \pi_d(t)}{\partial S} = -C_1'(S)qe^{-rt}$$

Reemplazando estos valores se llega finalmente a:

$$\frac{1}{dt}E(dP) = rP - rC_1(S) + C_1'(S)f(E, x, \theta)$$

Análogamente, reemplazando se obtiene:

$$\frac{1}{dt}E(dE) = \frac{C_2'(E) \left[\left(\frac{f_{Ex}}{f_E} \right) * f - f_x + r + \frac{1}{2} \sigma^2(\theta) \frac{f_{E\theta\theta}}{f_E} \right] + C_1'(S)qf_E}{C_2''(E) - C_2'(E) \left(\frac{f_{EE}}{f_E} \right)}$$

Capítulo 15: El problema de determinar la exploración óptima

La exploración minera es un proceso fundamental para el desarrollo de la minería. Esta tiene como objetivo localizar y estimar el tamaño del depósito, con el fin de aumentar la base de recursos de un cierto *commodity* de interés para una compañía minera. En particular, en este capítulo se analizarán los *commodities* más relevantes en su relación con la importancia y evolución en términos del descubrimiento de nuevos recursos junto con los esfuerzos de exploración que incurren en Chile y el mundo. Además, se discutirán dos elementos cruciales para el estímulo de la inversión en exploración: el potencial geológico percibido y el clima de inversión. Luego, se desarrollará la teoría matemática que sustenta la determinación de la exploración óptima, tanto determinística como con la incorporación de la incertidumbre.

15.1 Introducción

15.1.1 Exploración: una mirada económica y geológica

El ser humano requiere de diferentes recursos para sus actividades personales, comerciales e industriales. Por ejemplo, la madera que se utiliza en construcción, calefacción, transporte y energía. Otro recurso esencial es el agua, utilizada para consumo doméstico, energético,

agrícola e industrial. En general, estos recursos se encuentran en la superficie, cuya identificación no requiere de grandes esfuerzos técnicos y económicos.

Sin embargo, existen ciertos tipos de recursos que se encuentran principalmente bajo la superficie terrestre. Ejemplos de estos son los *commodities* minerales, tales como el oro, cobre, molibdeno, hierro, litio, etc. Dado lo anterior, su identificación y evaluación es más compleja que el reconocimiento de los recursos mencionados en el párrafo anterior. Esto pues fundamentalmente lo que está bajo tierra no es conocido *a priori* o a simple vista, razón por la que es necesario descubrir y luego estimar el contenido de mineral de un yacimiento. El proceso que resuelve este problema se denomina exploración.

La exploración, si bien es en sí mismo un proceso altamente técnico y especializado, es por sobre todo una actividad económica y como tal, su fin último es agregar valor al inversionista, ya sea mediante la posterior explotación del recurso descubierto o bien, con la venta del prospecto encontrado. El objetivo de la exploración no es tan sólo identificar y evaluar recursos, sino que también rentabilizar la inversión asociada a la búsqueda o delimitación de los recursos. Por ejemplo, en el año 2012 la inversión asociada a exploración en Chile ascendió a 1.106 MUSD, mientras que en el año 2015 fue de 615 MUSD (Cochilco, 2016a). De parámetros extraídos de una Memoria realizada por Codelco (2016), la inversión anual en exploración de Codelco entre los años 2013 y 2016, se puede apreciar en la Figura 15.1.

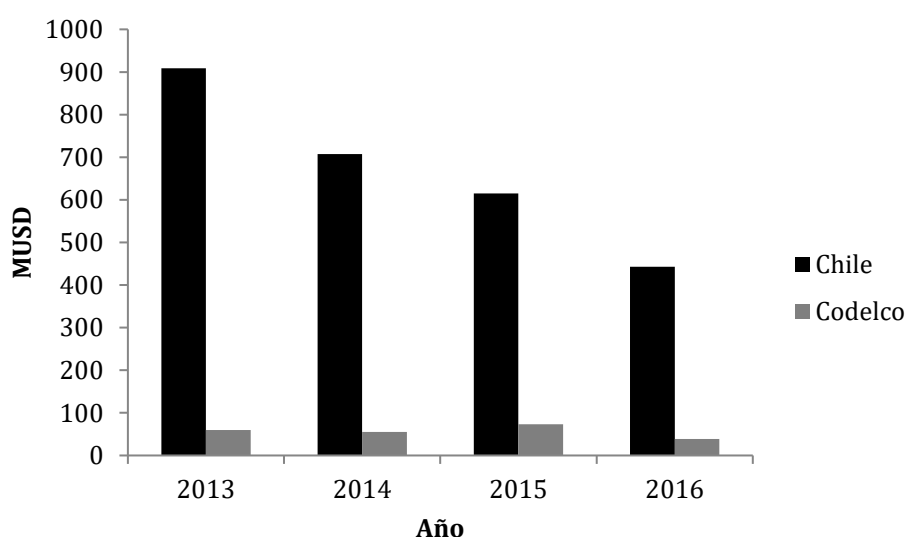


Figura 15.1. Inversión en exploración en Chile y Codelco. Fuente: Memorias Anuales de Codelco 2013-2016 y Catastro de empresas exploradoras (Cochilco, 2016a)

La baja continua que se aprecia en esta figura se explica principalmente producto de un plan de ajuste presupuestario debido a la caída del precio de las materias primas entre 2013 y 2016, y en particular del cobre (principal *commodity* explotado en Chile y Codelco). Así, por ejemplo, para enfrentar estas condiciones de mercado, Codelco diseñó un plan de contingencia que significó postergar los procesos de exploración de seguimiento que, aunque corresponden a la etapa de descubrimiento, es la fase de inversión más intensiva. En esta etapa se potencia el proceso generativo de áreas exploratorias, aumentando la base de proyectos en etapas tempranas de exploración, lo que significa enfrentar de mejor forma la gestión cuando se vuelva a un ciclo normal de inversiones. Aunque disminuir la inversión en exploración suele no conllevar a reducciones en producción en el corto plazo sí afecta la producción que la empresa puede alcanzar en un periodo de más largo alcance. Sin embargo, cuando los precios de los *commodities* disminuyen, empíricamente las empresas reducen su inversión en exploración con objeto de mejorar el flujo de caja de corto plazo (reduciéndose en teoría el máximo potencial que pueden alcanzar en el largo plazo).

15.1.2 La exploración de *commodities* en Chile

Con respecto a los descubrimientos de yacimientos de cobre en Chile, según datos de Cochilco (2016c) se descubrieron 35 yacimientos de cobre entre los años 2000 y 2015, incrementando en 208 Mt de cobre los recursos antes conocidos, entre los cuales se tiene que 28 de los yacimientos descubiertos son de tipo pórfido Cu-Mo o Cu-Au, tres son de tipo IOCG (*Iron Oxide Copper Gold ore deposits*), dos estratoligados, uno de tipo skarn y otro de tipo exótico (Cochilco, 2016c).

Otro *commodity* importante para Chile es el oro. El ambiente de formación se caracteriza por “encontrarse unido a filones⁸² hidrotermales de cuarzo, rocas metamórficas y depósitos aluviales”. Las vetas de cuarzo que contienen oro se relacionan con mineral intrusivo, y en general se encuentran asociado a otros metales como cobre, plata, zinc y plomo.

El oro, según datos de Cochilco (2016c), es el segundo mineral de interés en términos de exploración en Chile, el que representó un 27% de un total de 270 proyectos para el año 2016. La mayor parte de los planes de prospección, se realizan principalmente en el sector de la Franja

⁸² Filones: Fisuras que se encuentran rellenas de mineralización, debido a sucesivos movimientos del terreno.

Metalogénica del Mioceno⁸³, localizada en los sectores de la alta cordillera de Atacama hasta Valparaíso. En Chile, la inversión de oro en el año 2016 fue de 137 MMUSD.

A modo de comparación para los dos *commodities* anteriormente mencionados, la producción de cobre en el año 2016 según un informe del Consejo Minero (2017) fue de 5,5 Mt de cobre fino. En cambio, para el caso del oro, su producción ascendió a 41 toneladas. Es claro entonces que, pese a las pequeñas cantidades de oro producidas, el gasto de exploración de este mineral respecto a su producción es significativamente superior al del cobre. Esto se explica debido a que los depósitos de oro son de menor envergadura con respecto a los del cobre y se debe efectuar una exploración incesante para asegurar una continuidad en la producción.

El hierro fue el tercer mineral de interés para la exploración en Chile en el año 2016, con un 4,5% del gasto total en exploración del país. Mientras un 90% de estas iniciativas están ligadas a la Franja del Cretácico⁸⁴ Temprano, ubicada en la zona centro norte de Chile. El presupuesto utilizado en el mundo por concepto de exploración en el mineral de hierro ascendió a 936 MUSD, lo que representa el 10% de la inversión en exploración de diversos *commodities* a nivel mundial (SNL Metals&Mining, 2016).

A su vez, la ocurrencia de litio se presenta de dos formas en la naturaleza: yacimientos y depósitos de salmueras. Chile en particular, posee litio localizado en depósitos de salmueras. Estos “se generan debajo de la costra salina de los salares, en donde se encuentran significativas acumulaciones de soluciones que han lixiviado mineral en su camino y se han aglomerado de iones de salmueras enriquecidas” (Sernageomin, 2014). Por ejemplo, en Chile el Salar de Atacama es uno de esos casos cuyas salmueras se encuentran enriquecidas de litio, potasio y boro.

Chile posee el 20% de las reservas mundiales de litio, con una estimación de reservas de aproximadamente 7,5 Mt, y con respecto a su descubrimiento, en el año 2015 este *commodity* se encuentra ubicado como el quinto mineral de interés para la exploración en Chile, con un 1,2%. En la mayoría de los casos, se explora en depósitos de evaporitas con alto contenido de litio, localizados en el Norte Grande de Chile (Cochilco, 2016c).

⁸³ El Mioceno es la época geológica que abarca desde unos 25 Ma hasta unos 5 Ma atrás.

⁸⁴ El Cretácico es el período geológico que abarca desde unos 150 Ma hasta unos 50 Ma atrás.

15.1.3 Aspectos técnicos en la exploración y estudio metalogénico de yacimientos de cobre

El aspecto técnico en la exploración debe considerar diferentes tipos de información geocientífica: edad y tipo de mineralización (franja metalogénica), rocas almacenadoras, estructuras mayores que facilitan la circulación de fluidos, trampas geológicas, entre otros parámetros. En definitiva, el estudio metalogénico permitirá a los geocientistas una aproximación al tipo de mineralización y las áreas potenciales de contenerlas. En efecto, la concentración de los *commodities* de interés se debe a diferentes procesos geológicos que ocurren bajo la superficie y las que forman distintos sistemas mineralizados. A continuación, se dan ejemplos de algunos tipos de sistemas de mineralización:

- Pórfidos. El proceso de tectonismo compresivo (subducción), es el principal mecanismo que “gatilla” la formación de cuerpos mineralizados del tipo pórfidos con mineralización de cobre-molibdeno-oro, detectándose en el Cinturón de Fuego del Pacífico.

Los sistemas mineralizados tipo pórfidos son relativamente jóvenes en su formación, se han reconocido desde la era Paleozoica hasta el Mioceno: Lila y Tornasol en Chile y San Jorge en Argentina en el Paleozoico⁸⁵ Superior, siendo los pórfidos más importantes, en calidad y en cantidad, los generados en el período del Eoceno al Mioceno (Escondida, Chuquicamata, El Salvador, El Teniente, Andina, entre otros en Chile; Bingham Canyon, Yerington en Estados Unidos y; Grasberg en Indonesia (Meyer, 1985)).

La mineralización tipo pórfido corresponde a un sistema relacionado a un cuerpo ígneo (emplazamiento de rocas hipabisales), con rocas de cajas que contienen mineralización diseminada y en vetillas generadas por procesos hidrotermales cuyas leyes y volúmenes los hacen atractivos (Camus, 2002).

Un ejemplo de un sistema tipo pórfido cuprífero es El Salvador (8,88 Mt de cobre fino), ubicado en la localidad homónima en el norte de Chile, el cual corresponde a un sistema con varios eventos magmáticos del Eoceno emplazados en rocas volcánicas del Cretácico Superior. Esto con la formación típica de zonas y vetillas hidrotermales y

⁸⁵ El Paleozoico es una era geológica que abarca desde unos 570 Ma hasta unos 230 Ma atrás.

mineralización hipógena de un pórfido cuprífero (Camus, 2002) que, adicionalmente, aumentó sus recursos por procesos supérgenos ocurridos en el Mioceno.⁸⁶

- IOCG. Sistemas de mineralización de óxidos de hierro, cobre y oro asociados a diferentes mecanismos tectónicos (distensivos y compresivos), rocas almacenadoras y de diferentes edades (Arqueano al Terciario⁸⁷) cuya característica principal es la presencia de óxidos de hierro (hematita, magnetita y mushketovita) con una *suite* variable de elementos metálicos de interés (Cu, Au, Ag, U, Co, REE). El yacimiento más importante, y que dio origen al concepto de IOCG, es el de Olympic Dam, descubierto en 1975 en Australia (Oyarzún, 2007). En Chile, yacimientos como Candelaria y Manto Verde pertenecen a este tipo de mineralización.
- Skarn. Son aquellos cuerpos mineralizados asociados a procesos de metamorfismo de contacto y metasomatismo, generados por los efectos de la intrusión de una masa ígnea en rocas carbonatadas, caracterizándose por contener minerales del tipo de silicatos de calcio como granates y piroxenos y menas de cobre, hierro y wolframio entre otras pastas. Ejemplos de estos yacimientos son el de Marmora en Canadá (Fe), Oslo en Noruega (Zn), y Hedley District en British Columbia (Au, Cu).

⁸⁶ Procesos supérgenos se refiere a la formación de calcosina, covelina y especies oxidadas de cobre por la reacción de soluciones ácidas (agua y pirita) sobre minerales primarios de cobre (calcopirita, bornita).

⁸⁷ Del Arqueano al Terciario: abarca gran parte de la historia geológica de la tierra, es decir, los IOCG descubiertos han tenido una génesis en diversos períodos de la historia terrestre.

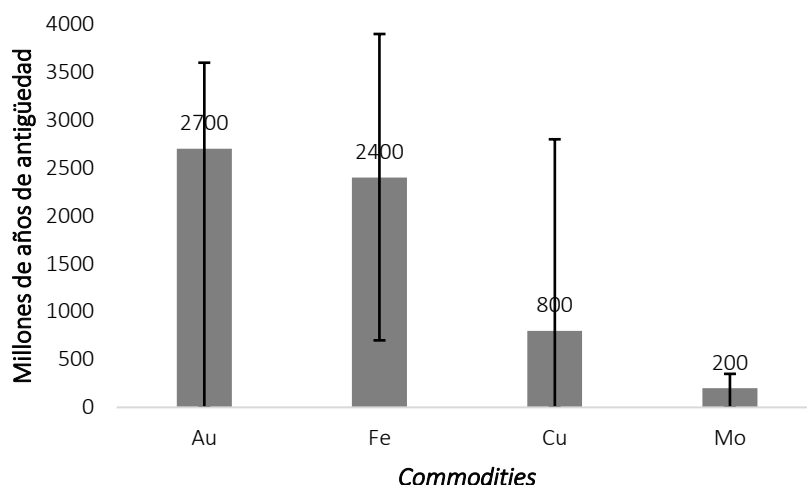


Figura 15.2: Edad y formación de diferentes tipos de depósitos Fuente: Elaboración propia en base a Meyer (1985)

RECUADRO 15.1

LA DERIVA CONTINENTAL Y LA TECTÓNICA DE PLACAS

En 1912, un joven geofísico alemán de nombre Alfred Wegener generó gran revuelo en la sociedad científica de la época con su teoría de derivas continentales. La teoría planteada por este berlinés consiste básicamente en que los continentes se desplazan unos respecto a otros con cierta dirección y cierto rumbo.

Wegener conjeturó que, dada la forma en la que tienden a encajar ciertos continentes (como la costa oeste de África y la costa este de América del Sur), sumado a las similitudes paleontológicas encontradas en estos, en algún momento debieron haber estado unidos. De hecho, conjeturó que en algún momento debió haber existido un gran continente denominado Pangea (del griego para “toda la tierra”). Como los continentes ya no se encuentran en esta Pangea, Wegener concluyó que se hallan a la deriva.

Sin embargo, la sociedad científica germana atendió con gran recelo esta teoría, ya que no tenía una justificación teórica y empírica que explicara el mecanismo de deriva. No fue sino hasta la década de 1960 en que la deriva continental fue ampliamente aceptada como teoría, dada la aparición de la teoría de la tectónica de placas, que permitió explicar el mecanismo de deriva continental.

La tectónica de placas se fundamenta en que diversos bloques rocosos de la corteza terrestre (litosfera), se hallan “suspendidos” en un fluido viscoso heterogéneo (que explicaría los diferentes rumbos y direcciones) llamado astenósfera. Este mecanismo explica, además, la gran actividad

volcánica del Cinturón de Fuego del Pacífico, así como la inmensa actividad sísmica y la generación de nueva corteza (lo que explica por ejemplo que Chile y Perú posean una alta concentración de riqueza cuprífera en yacimientos de tipo pórfido, dada la subducción de la placa tectónica oceánica de Nazca bajo la placa tectónica continental Sudamericana).

15.2 El rol de la exploración

El objetivo fundamental del rol de la exploración es la de aumentar la base de recursos de un cierto *commodity* de interés. Ya sea aumentando el nivel de reservas del recurso, o bien, localizando, identificando y evaluando un nuevo yacimiento. Para ejemplificar de manera adecuada el rol significativo que ocupa la exploración en la vida de una mina, se presenta como caso de estudio la mina de cobre El Teniente, ubicada en la zona centro-sur de Chile.

15.2.1 Caso de estudio: mina El Teniente (Codelco, Chile)

Desde los inicios de su producción en 1905, los recursos de la mina El Teniente han crecido significativamente, debido a la continua exploración realizada en los alrededores de la mina, lo que ha generado reestimación de los recursos y múltiples descubrimientos de cuerpos aledaños. En la Tabla 15.1 se muestran los recursos reconocidos según mina El Teniente para algunos años destacados.

Tabla 15.1. Recursos reconocidos por División El Teniente de Codelco. Fuente: Elaboración propia en base a distintas fuentes.

AÑO	RECURSOS RECONOCIDOS (Mt)
1940	3
1960	6
1975	9,5
2004	72
2015	86,4

El aumento de los recursos conocidos en El Teniente contrasta con la noción de que una mina en continua explotación debiese ir reduciendo sus recursos (dada la agotabilidad de los mismos). El que los recursos hayan ido aumentando se explica entonces, debido a que al menos en esta mina explotando los recursos descubiertos producto de la exploración realizada, ha

permitido no solo compensar por los recursos extraídos, sino que incluso aumentar la base de estos.

Se conoce que El Teniente ha explotado alrededor de 22 Mt de cobre fino, desde su fundación en 1905 hasta al año 2017. Esto es siete veces más alto que la base inicial de recursos estimada en 1940 (3 Mt). De hecho, en la actualidad – y con las actuales tasas de explotación (muy superiores a las iniciales) - El Teniente tiene recursos para explotar por 100 años o más (donde se incluyen los proyectos Nuevo Nivel Mina y Nivel Profundo). No obstante, lo anterior no considera los posibles descubrimientos que se seguirán probablemente realizando (ya sea en niveles más profundos o descubriendo nuevos cuerpos a nivel distrital), los cuales podrían alcanzar más años de vida para la cuprífera.

Cabe señalar que un aumento en la cantidad de recursos no necesariamente se transforma en mayores reservas. Esto, pues las calidades de los recursos descubiertos deben ser suficientemente competitivas a futuro como para que su extracción sea económica.

Si bien la mina El Teniente ha sido exitosa aumentando su base de recursos, es de esperar que la tasa de descubrimientos no sea siempre alta. Esto se puede justificar ya sea porque la dificultad asociada al proceso de descubrimiento podría ir aumentando (algo que hasta ahora no ha ocurrido) o debido a que la cantidad de recursos actualmente conocidos puede ser de una cantidad y calidad suficientes como para no requerir nuevos descubrimientos en el corto o mediano plazo. Así, por ejemplo, El Teniente posee una razón de reservas a producción equivalente a 73 años de producción (es decir, sin nuevos descubrimientos aún podría producir por este periodo de tiempo).⁸⁸

15.2.2 Potencial geológico percibido y clima de inversión

La exploración depende críticamente del lugar geográfico en el cual se desarrolla la actividad. Dicho lugar se caracteriza por dos factores que son necesarios para el estímulo de la inversión en exploración, y, por tanto, como se verá en la Sección 15.3, el esfuerzo de exploración: potencial geológico percibido y clima de inversión.

⁸⁸ Incluso para el cobre esta razón es alta, pues típicamente la razón de reservas a producción en el caso de las minas cobre no suele superar los 30 a 40 años. En otros *commodities*, tales como oro o diamantes, este indicador suele ser bastante menor (una o dos décadas como máximo), lo que explica que exista en general un mayor nivel de exploración en estos *commodities*. En el caso del oro, por ejemplo, en EEUU este indicador alcanza a 15 años (USGS, 2016).

- Potencial geológico percibido: este factor guarda relación con la percepción de los inversores en cuanto a la cantidad y calidad de posibles recursos no descubiertos, así como también, con el tipo de recurso potencial subyacente en el país o región.

Respecto a la cantidad y calidad de yacimientos potenciales, existen variados elementos que promueven o desincentivan el esfuerzo de exploración. Entre estos se encuentran la madurez de los yacimientos potenciales presentes en la zona y el historial de descubrimientos de depósitos (frecuencia de descubrimiento, leyes y tonelajes de recursos descubiertos). Por ejemplo, el potencial geológico percibido de Chile ha disminuido debido a la madurez de sus recursos (cada vez hay que explorar a mayor profundidad), así como también, el número de grandes yacimientos descubiertos ha disminuido en los últimos años (Camus, 2005).

Respecto al tipo de recurso potencial subyacente en la región, se debe considerar qué es lo que se quiere explorar. Lo anterior, puesto que existen ciertos recursos que se encontrarán con mayor probabilidad en una zona geográfica que en otra, dependiendo de la historia geológica del sector (Meyer, 1985). A modo de ejemplo, resulta más probable encontrar un pórfido cuprífero en el norte de Chile que en el África subsahariana, así como resulta más probable encontrar una mina de diamantes en el continente negro que en el norte de Chile.

- Clima de inversión: Corresponde a las diferentes variables geopolíticas que se configuran en un estado y que terminan atrayendo o repeliendo el esfuerzo y el monto destinado a la exploración. Es importante consignar que la exploración realizada en un instante de tiempo, de encontrarse un yacimiento tardará 15 ó 20 años en ser explotado. Por tanto, el clima de inversión en un país tendrá implicancias en la inversión de largo plazo más que en el corto o mediano plazo. Además, es preciso mencionar que la caída de los determinantes que afectan los montos de inversión ocurre de manera abrupta, mientras que su recuperación tiene lugar paulatinamente. Jara *et al.* (2008) describe los siguientes factores como relevantes del clima de inversión:

1. Marco regulatorio y su estabilidad: Esta variable del clima de inversión guarda relación con la regulación ambiental y tributaria del país. Esta variable contempla el grado de restricciones que le ofrece el país al inversionista (nivel de rigor y burocracia asociado a las restricciones ambientales e impuestos), así como la estabilidad que tienen, es decir, el hecho de que estas reglas se

mantengan en el tiempo y no cambien bruscamente en el corto, mediano o incluso largo plazo.

2. Estabilidad política: Esta variable guarda relación con el grado de estabilidad de las instituciones del país; es decir, el hecho de que el régimen político dominante no se derrumbe de un momento a otro. Por ejemplo, la percepción del inversionista de que el país es propenso a sucumbir ante golpes de Estado. Dado lo anterior, un país que enfrenta altos niveles de división política, inestabilidad institucional e historial de golpes de Estado, genera rechazo en el inversionista.

Además, esta variable contempla el grado de confrontación internacional del país, es decir, la política exterior que tiene la nación para con sus vecinos. Por ejemplo, hay naciones que enfrentan constantemente amenazas de sus vecinos por el control de su soberanía y de sus recursos, como pasó con el monto destinado a la exploración de nuevos pozos petrolíferos en Kuwait durante el período inmediatamente posterior a la guerra del Golfo, por el temor a una nueva invasión iraquí (Colgan, 2013).

3. Eficiencia y nivel de servicios del país: Esta variable geopolítica se relaciona con una amplia gama de elementos, destacándose entre ellos: la conectividad del país (infraestructura, carreteras y caminos), la eficiencia de sus servicios públicos, los niveles de corrupción de las distintas instituciones del país y el grado de confianza en las instituciones públicas. También, es factible mencionar el capital humano que presenta la región.

Existen diferentes métodos que tienen por objetivo medir el clima de inversión en un país. En la actualidad la metodología preferida es por medio de encuestas a las empresas e inversionistas mineros y empresas de exploración. Así, el *ranking* más famoso es la Encuesta a Compañías Mineras del instituto canadiense Fraser. Esta encuesta se realiza anualmente y tiene por objetivo captar la percepción de diferentes empresas exploradoras, explotadoras y compañías asociadas a la industria minera sobre el clima de inversión en un país, región o provincia.

La encuesta del año 2016 enviada a cerca de 2.700 compañías y contestada por 350 empresas permitió medir, evaluar y categorizar el grado de atractivo de 104 jurisdicciones alrededor del globo. Por ejemplo, en América Latina, se ubica en primer lugar Perú en cuanto al clima de

inversión, en el puesto 28 del *ranking* mundial. En segundo lugar, se encuentra Chile (39) y en el último lugar de la región aparece Venezuela (102). Los primeros lugares del *ranking* mundial son ocupados por jurisdicciones en Finlandia, Canadá, Australia y Suecia entre otros (Fraser Institute, 2016).

Sin embargo, la encuesta que realiza el instituto Fraser tiene, eventualmente, sesgos. Lo anterior, debido a que recoge la percepción subjetiva de individuos, no es una medición exacta de lo que realmente sucede con el clima de inversión en minería. Es más, existe la opción de que el descontento de un grupo de individuos con un gobierno en particular pueda nublar el juicio y sesgar sus respuestas sobre lo que realmente perciben estos individuos sobre el clima de inversión en minería.

Dado lo anterior, se han propuesto otros mecanismos para determinar el clima de inversión en un país. Por ejemplo, existe la opción de medir de forma cuantitativa el grado de atractivo de un país en relación a la inversión minera considerando los montos destinados a la exploración tipo *grassroot*⁸⁹ (Jara *et al.*, 2008). Y se ha mostrado que existe una relación directa e indirecta entre el monto destinado a este tipo de inversión y las tendencias que siguen los montos destinados a la minería en su conjunto. Dado lo anterior, la exploración cumple un rol en la determinación del clima de atractivo a la inversión minera.

La visión de que el atractivo de una jurisdicción en términos de incentivos a la inversión en exploración dependa fundamentalmente del potencial geológico y del clima de inversión es ampliamente aceptada. Sin embargo, los estudios empíricos que avalan lo anterior son escasos. No obstante, se ha propuesto que existe un límite bajo el cual las compañías consideran tanto potencial geológico como clima de inversión, y sobre el cual, las compañías sólo consideran el potencial geológico (Jara, 2017). De lo anterior se desprende que, después de cierto nivel de clima de inversión, cualquier apertura política o algún equivalente en regulación, no aumentará en mayor medida al monto de inversión en exploración.

Es preciso notar que, manteniendo constantes todas las variables determinantes en el atractivo del clima de inversión y el potencial geológico, es plausible que aun así la inversión en exploración (y en minería en general) disminuya. Esto, puesto que puede ser que países

⁸⁹ Este concepto será explicado y ampliado en la sección 15.3.

competidores hayan mejorado alguna de sus variables, y, por ende, hayan mejorado su atractivo en exploración, atrayendo a los inversores (Tilton, 2002).

RECUADRO 15.2

INVERSIÓN MINERA EN PAÍSES CONFLICTIVOS: REPÚBLICA DEMOCRÁTICA DEL CONGO

La República Democrática del Congo es una nación ubicada en el África subsahariana ecuatorial. Desde 1885 a 1908 el Congo fue propiedad del Rey Leopoldo II de Bélgica. Durante esa época, el Congo se conocía como Estado Libre del Congo o Estado Independiente del Congo. Luego, por presiones internacionales, el Congo pasó desde las manos del Rey a ser posesión del Estado belga. Situación que duró hasta 1960, año en el que diversas revueltas internas y presiones externas culminaron con la proclamación de independencia de esta colonia (Forbath, 2002).

La nueva nación, denominada República Democrática del Congo, comenzó turbulentamente su camino democrático. Lo anterior, debido a que los puestos políticos fueron ocupados por pequeños caudillos que, en muchas ocasiones, rivalizaban entre sí. Cada caudillo contaba con su propio grupo armado lo que gatilló en diversas confrontaciones que mermaron la estabilidad de la naciente república (Fontana, 2011).

En 1965 el teniente general Joseph-Désiré Mobutu, con apoyo de la CIA y empresarios belgas (que aún controlaban los recursos mineros del país) orquestaron un golpe de estado en contra del gobierno constitucional. Lo que dio paso a una larga dictadura en la cual el país (entonces llamado Zaire) adquirió cierta estabilidad política y económica.

Sin embargo, tras la caída de Mobutu en la década de 1990 y la posterior guerra civil que asoló al país (con intervención de naciones extranjeras y una cifra de bajas entre las más altas desde la Segunda Guerra Mundial) el país perdió la estabilidad alcanzada en los años de dictadura. En las últimas décadas, el gobierno democrático ha intentado ejercer soberanía efectiva sobre su territorio, sin embargo, aún hay muchas zonas del país controladas por guerrillas. Zonas que, en general, poseen importantes recursos de diamantes, oro, cobalto y cobre.

Lo anterior ha mantenido alejada a la inversión privada, puesto que cada guerrilla tiene sus normas e ideologías, y sus áreas de dominio e influencia están constantemente cambiando debido a las constantes luchas fratricidas que llevan a cabo entre sí, luchas que no dejan indemnes a ningún elemento de la sociedad, incluyendo a los mineros, es más, en muchas ocasiones son las minas los blancos de ataques perpetrados por guerrillas (Spittaels y Hilgert, 2009).

15.3 Esfuerzo de exploración y descubrimiento de recursos

15.3.1 Futuro de los descubrimientos

Existe una preocupación constante acerca de los suministros futuros de materias primas, lo cual exige un examen cuidadoso de los supuestos y datos subyacentes a la hora de estimar las reservas futuras. La información de depósitos no perfectamente delineados, los recursos no descubiertos ignorados y las suposiciones sobre el consumo futuro, requieren que se realice una nueva mirada a los recursos de los *commodities* minerales.

Del mismo modo que los depósitos superficiales han ido desapareciendo debido a la facilidad de descubrirlos y extraerlos, sumado a la creciente demanda por minerales hace surgir la pregunta acerca de cuanto mineral queda por descubrir.

Para efectos de ilustrar esta problemática se hace explícita referencia a los recursos de cobre, aunque, en términos generales, las conclusiones derivadas de este pueden en general extrapolarse al resto de minerales.

En primer lugar, para entender la situación actual de los recursos de cobre se hace necesario en primer lugar descomponer los recursos conocidos según el tipo o clasificación geológica. En este sentido, más del 69% del cobre está actualmente contenido en depósitos de tipo pórfidos, mientras que el 12% se encuentra en yacimientos sedimentarios. Los depósitos del tipo sulfuros magmáticos ocupan el 5,1% y los depósitos IOGC algo cercano al 4,7% (Singer, 2017).

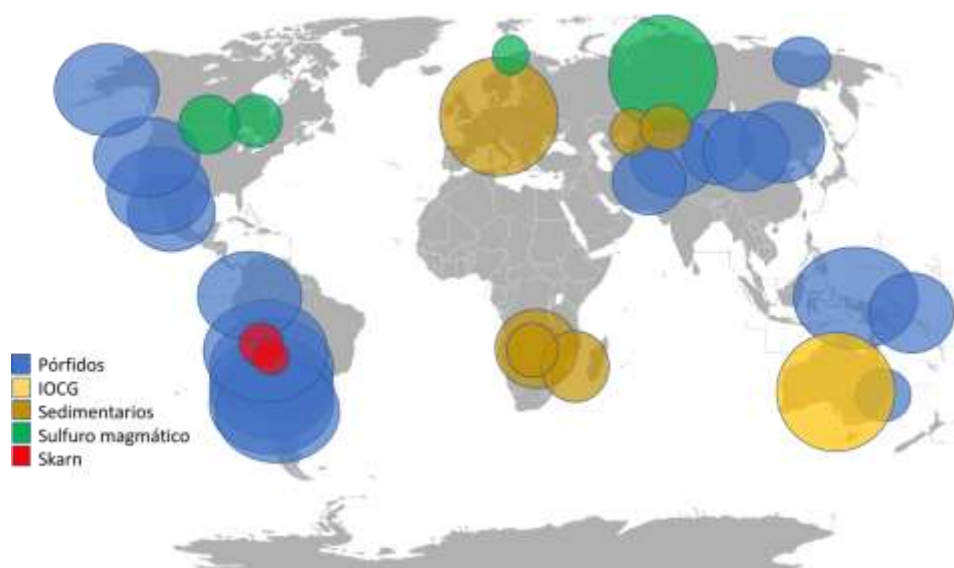


Figura 15.3: Tipos de yacimiento de cobre y su tonelaje relativo en el mundo. Fuente: Elaboración propia en base a Singer (2017)

El total de cobre producido hasta la fecha ronda los 667 millones de toneladas, mientras que los recursos conocidos, pero no explotados aún, corresponden a 2.030 millones de toneladas. Sobre los recursos por descubrir, la USGS y otras agencias han estimado por medio de análisis probabilísticos de los yacimientos más importantes -sedimentario y pórfidos, aunque no necesariamente económicamente extraíbles en la actualidad- que existen 3.500 millones de toneladas en depósitos no descubiertos (USGS, 2016).⁹⁰

Además, existen áreas donde no ha sido posible explorar y explotar aun cuando existen indicios de posibles yacimientos, como es el caso de la Antártica. En este caso en particular, en 1991 se firmó un tratado entre 37 países en cuyo artículo 7 se prohíbe cualquier actividad relacionada con la explotación de recursos minerales. Ahora bien, este tratado será revisado nuevamente el año 2048 y podría marcar un cambio crucial a nivel de la industria si las restricciones cambian en esa fecha.

15.3.2 El proceso de exploración

La exploración minera se suele diferenciar en tres etapas: *grassroot*, *late stage* y *minesite*. La etapa *grassroot* comprende toda la exploración hasta el momento en que se descubre un yacimiento mineral, incluyendo la perforación perimetral, así como el reconocimiento y la evaluación de las incursiones. Este tipo de exploración se encarga principalmente de definir una potencial nueva mina. La etapa *late stage*, por su parte, abarca la exploración que cuantifica y define un cuerpo de mineral ya identificado, incluyendo todo el trabajo necesario para el estudio de la factibilidad, hasta la decisión de desarrollar el proyecto. El principal objetivo es, ya descubierto el depósito, definir los bordes y cuantificar el tamaño del depósito, siendo mucho más cuantiosa en términos de gasto que la etapa anterior. Finalmente, se tiene la etapa *minesite*, la cual implica toda la exploración realizada inmediatamente alrededor de los depósitos o minas aprobadas para la producción, o ya en funcionamiento (Jara *et al.*, 2008). El objetivo de esta etapa es la recategorización de los recursos. Es decir, con este tipo de exploración se busca mejorar el grado de confiabilidad que se tiene de la estimación del yacimiento (incluyendo la distribución espacial del mineral y sus calidades).

⁹⁰ Este número se limita a la Tierra. Existen fuentes prácticamente infinitas de cobre en el universo, pero la explotación minera espacial, incluso limitada al Sistema Solar, es aún técnica y económicamente inviable.

En cuanto a la categorización de los recursos, se suele desagregar a los recursos en indicados, medidos e inferidos de acuerdo al nivel de confiabilidad de la información con la que se ha realizado la estimación. La categorización geológica estándar se ilustra en la Figura 15.4.

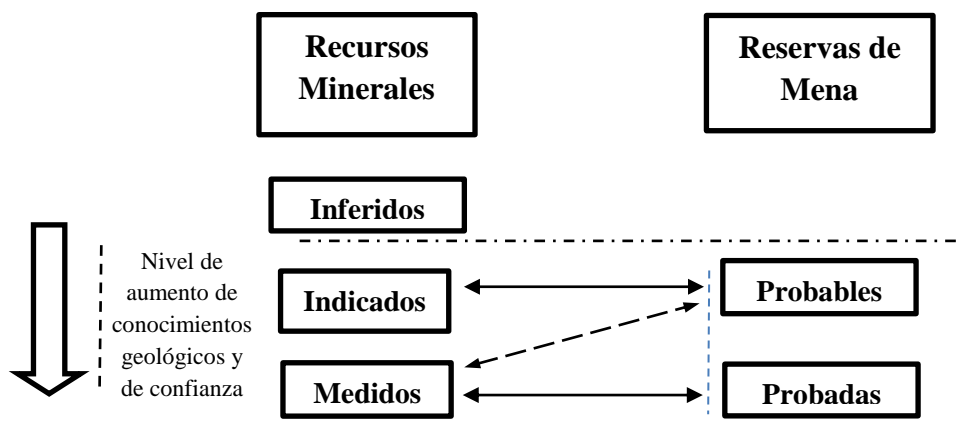


Figura 15.4. Caracterización geológica

En la minería típicamente existen acuerdos internacionales y códigos que indican que se debe tener un nivel mínimo de confiabilidad para los primeros años de explotación, mientras que, pasada una cierta cantidad de tiempo, se permite la disminución en la categorización de los recursos que conforman el plan de producción (es decir, reservas). Dependiendo de la industria, es común que al menos el 80% de las reservas se puedan calificar como medidas. Esto permite generar seguridad al inversionista de que se va a extraer el *commodity* con una precisión relativamente alta, al menos durante los próximos años de explotación.

15.3.3 Relación entre el clima de inversión y las etapas de exploración

Como se explicitó en la Sección 15.2, existe una relación directa entre el clima de inversión y la exploración por minerales. El clima de inversión no tiene un efecto idéntico en todas las etapas de exploración. De hecho, un cambio en el clima de inversión en general conlleva a un impacto mayor y más inmediato en la exploración *grassroot* que en las otras etapas de exploración. Esto se debe a que la exploración *late stage* tiene lugar, como se mencionó en la sub-sección anterior, después de que se ha descubierto un depósito mineral y por tanto se suele requerir como actividad propia de la operación de la mina, lo que hace a este tipo de exploración menos variable con respecto a las condiciones de mercado.

Las empresas mineras son reacias a abandonar los blancos de exploración hasta que se demuestre que son o no económicos. Por ende, ante cambios en el clima de inversión es mucho más sencillo abandonar una etapa de exploración *grassroot*, que una *late stage*. Consecuentemente, un cambio en el clima de inversión normalmente tiene un impacto mucho menor en la exploración *late stage*. En el caso de que un proyecto ya esté en operación, la exploración *minesite* continuará con sus desarrollos a menos que existan cambios muy severos en el clima de inversión (Jara *et al.*, 2008).⁹¹

RECUADRO 15.3

¿CUÁNTO CUESTA LA EXPLORACIÓN?

Se ha mencionado anteriormente que la cantidad de capital necesaria para la labor de exploración es enorme y que, con objeto de mejorar resultados a corto plazo, las empresas posponen inversión en exploración para mejorar otros indicadores (típicamente flujo de caja). Además, es sensato pensar que los costos de exploración han aumentado considerablemente debido a la dificultad creciente de encontrar yacimientos con importancia económica, también influenciado por el detalle de los descubrimientos que se necesita actualmente.

Pero, ¿cuánto cuesta explorar? Según Schodde (2014), para el caso del oro el costo para descubrir 100.000 onzas subió desde los 41 MMUSD entre 1978-1982 hasta los 150 MMUSD en 2010-2014. Es decir, en tres décadas el costo de exploración aumentó cuatro veces.

De acuerdo a estudios no publicados del autor en base a estadísticas de exploración de cobre para el periodo 1950-2014, aunque existe una tendencia creciente en el costo de exploración por este metal, lo cierto es que cuando se controla por el precio del *commodity* en cuestión, el aumento es significativamente inferior al derivado por Schodde (2014).

La tendencia en la exploración de cada una de estas etapas en cada país se puede explicar por un sinnúmero de factores. Así, por ejemplo, de acuerdo a Jara *et al.* (2008), existen tres factores que desencadenaron el deterioro actual de la participación de Chile, en la exploración mundial entre los años 1996 y 2007. El primero fue el colapso de la exploración *late stage* para el oro. Lo anterior debido a que la exploración *late stage* tiene directa relación con el número y tamaño de depósitos descubiertos que se están considerando para desarrollo. Por ende, tuvo un gran

⁹¹ Este tipo de exploración también puede verse afectada si existe un cambio significativo en el mercado del *commodity* explotado.

descenso la exploración de oro en la etapa *late stage* entre los años 1996 y 2007, debido a la fuerte caída que tuvo el descubrimiento de depósitos de oro en ese mismo período.⁹²

El segundo factor responsable de la disminución de la participación de Chile en la exploración mundial fue el descenso en la etapa de exploración *late stage* de metales básicos. Este cambio se produjo en gran medida porque muchos proyectos sometidos a estudios de viabilidad durante los años 1996 a 2000 estaban ya en desarrollo o abandonados en 2001, y no fueron sustituidos por un conjunto de nuevos proyectos. Esto último debido a la sobreoferta que introdujo precisamente la enorme cantidad de nuevos proyectos desarrollado durante la década de 1990.

El tercer factor fue el aumento de la exploración mundial en depósitos minerales distintos del oro y metales básicos. Los gastos mundiales de exploración de los otros productos minerales pasaron, de un promedio de 7,9% de los gastos totales de exploración para el período entre 1996 a 2000, a un 23,3% para el período comprendido entre el 2001 y el 2005. Más aún, para el período 2006-2007, los gastos de exploración totales para depósitos distintos al oro y metales base, fue del 26,6% (Jara *et al.*, 2008). Este salto fue provocado en gran parte por el auge de exploración de diamantes debido a los descubrimientos realizados en el norte de Canadá a principios de 1990. Además, debido a razones fundamentalmente geológicas, África, Canadá, Europa, Estados Unidos y Rusia han atraído la mayor parte del dinero, debido a que el potencial geológico para descubrir productos como metales del grupo del platino y diamantes es mucho más favorable en estos lugares, por lo que la exploración en Chile vio reducido su financiamiento.

De la Tabla 15.2 se puede apreciar cómo habría sido la participación de Chile en la exploración mundial si se hubiese mantenido el nivel de inversión en dicho país en la etapa *late stage*. Como queda claro en esta tabla es precisamente la disminución en el gasto de exploración por oro lo que más contrajo la competitividad de Chile en el contexto mundial de exploración.

⁹² El bajo precio del oro en dicho periodo sin duda debió haber sido otro factor relevante.

Tabla 15.2. Participación de Chile en exploración mundial, manteniendo exploraciones de ciertos commodities sin cambios en exploración *late stage*. Fuente: Jara *et al.* (2008).

	Sin cambios en oro	Sin cambios en metales base	Sin cambios en exploración de otros productos metálicos
Participación de Chile en exploración mundial (actual: 3,28%)	4,05%	3,55%	3,56%

Obviamente el aumento en el gasto en exploración en los distintos países y minerales, responde a múltiples factores (geológicos, políticos y de mercado), todos los cuales terminan afectando la competitividad de ciertos países por sobre otros. El autor ha podido comprobar, sin embargo, sobre bases estadísticas de casi 70 años, que la competitividad en exploración en las distintas regiones y países suelen ser cíclicas más que seculares.

15.3.4 La exploración de Chile y Codelco

El gobierno de Chile a inicios de la década de 1970 comenzó con un proceso de nacionalización de grandes minas de cobre del país (El Teniente, Chuquibambilla, entre otras), las cuales eran propiedad de empresas privadas extranjeras. El estado transfirió su propiedad y operación a la recién creada empresa estatal de minería Corporación Nacional del Cobre, conocida como Codelco. Años más tarde, el país cambió de rumbo y modificó sus políticas en un esfuerzo sostenido para atraer una vez más la inversión privada directa al país. Codelco, sin embargo, nunca fue privatizada, y sigue siendo hoy estatal (Jara *et al.*, 2010).

A lo largo de los años, las empresas mineras privadas y multinacionales han regresado a Chile y han desarrollado varios proyectos mineros importantes, tales como Escondida, Collahuasi y Los Pelambres. Como resultado, Codelco, que representó casi la totalidad de la producción minera de cobre del país en la década de 1980, ha visto disminuir su cuota a un poco menos de un tercio en la actualidad (Jara *et al.*, 2008).

Debido a que Codelco es de propiedad del Estado chileno, sus actividades se centran mayoritariamente en Chile. Es por esto por lo que tiene menos interés en realizar exploración y minería en otras partes del mundo (aunque tiene algunos intereses en exploración en Ecuador y Mongolia), en comparación con empresas multinacionales. Los factores que rigen sus

incentivos a la inversión como resultado son diferentes. La imposición de un *royalty* y otros cambios en el impuesto a la minería, son de poca o ninguna importancia para Codelco, ya que todas sus ganancias van en cualquier caso al gobierno chileno.

Según datos de Codelco, la compañía entre los años 2002 y 2007 ha representado entre el 20% al 35% de los gastos de exploración *grassroot* de Chile para metales base. De hecho, Jara *et al.* (2008) afirman que Codelco no sería responsable de la disminución en 2006 y 2007 en la participación del país en la exploración mundial de base para metales básicos.

RECUADRO 15.4

ATRACTIVO DE INVERSIÓN EN OTROS PAÍSES (JARA ET AL., 2008)

Como muestra la experiencia de Chile, la exploración *grassroot* de un país para productos minerales específicos es, por varias razones, un mejor indicador del atractivo de la inversión que su participación en la exploración total. Para el oro, de datos disponibles se indica que sólo cuatro países -Australia, Canadá, Estados Unidos y Perú- han podido atraer al 5% o más de la exploración mundial *grassroot*, lo que sugiere que estos países han ofrecido el clima de inversión más favorable para este mineral. Los datos también muestran que el clima de inversión para el oro durante el período examinado cayó y luego aumentó en Canadá (Jara *et al.*, 2008).

Por el contrario, en países como Perú y Australia este indicador se ha mantenido cíclico. En el caso de Estados Unidos se ha mantenido más o menos constante en las últimas décadas. Para otros países como Indonesia, Brasil y Argentina, se observa una pronunciada disminución del clima de inversión, lo que ha afectado negativamente la exploración.⁹³ Por el contrario, el atractivo de China y Rusia parece haber mejorado en los últimos años, aunque desde niveles bastante modestos. La importancia creciente de Canadá puede explicarse, al menos en parte, por las políticas fiscales favorables que el país persigue a nivel nacional (Jara *et al.*, 2008).

Para los metales base, Australia, Canadá, Chile, Brasil, Perú y México son aparentemente los países con los climas de inversión más favorables, ya que han atraído la mayor proporción de exploraciones *grassroot* durante el período 1996-2007. El atractivo de Canadá ha mejorado en los últimos años, gracias en parte al descubrimiento del depósito de níquel de Voisey Bay y, por otro lado, a las políticas

⁹³ Argentina ha revertido lentamente esta tendencia en minerales tales como el litio, donde posee una ventaja comparativa notable, siendo además incentivado esto por un mejoramiento en el clima de la inversión desde un cambio de gobierno en 2016.

fiscales favorables mencionadas anteriormente. Además, Indonesia y Brasil han sufrido descensos, mientras que Australia, Chile, México y Perú se han mantenido más o menos iguales.

Por último, para los otros productos minerales, Canadá ha capturado desde 1998 la mayor cuota de participación de los países en la exploración *grassroot*, lo que refleja el atractivo excepcional de inversión de este país para los diamantes y los demás productos de este grupo. En esta línea, los descubrimientos de Lac de Gras han desempeñado un papel importante, al igual que las políticas fiscales favorables (Jara et al., 2008).

Otros países que han disfrutado de las mayores cuotas de participación en exploración *grassroot* incluyen a Australia, Brasil, Sudáfrica, Botsuana, México, Rusia, Angola y los Estados Unidos. Si bien las cuotas de estos países han fluctuado en los últimos años, es difícil saber hasta qué punto estos cambios pueden reflejar los cambios en los minerales seleccionados dentro de este grupo (especialmente el creciente interés en los diamantes y los metales del grupo del platino).

Por otro lado, Codelco busca desarrollar el yacimiento Llurimagua en Ecuador, en alianza con la firma estatal ecuatoriana Enami. Además, en Brasil está concentrada en dos prospectos en el Estado de Pará, y, en etapa exploratoria, se han acercado a las autoridades de Mongolia para ver en terreno posibles opciones en la zona llamada Gobi Sur. Lo anterior viene dado porque al margen de los proyectos estructurales que la corporación lleva a cabo en Chile, la cuprera tiene claro que en el mediano y largo plazo debe abordar una expansión internacional, por múltiples razones, incluidas la competencia con sus pares internacionales y no perder el liderazgo mundial en la industria del cobre. Cabe señalar que Codelco tiene un presupuesto de exploración total de 200 MMUSD para el período 2017 y 2020 (Minería Chilena, 2017).

15.3.5 Base matemática

Desde el punto de vista matemático, la ecuación que se revisará en el presente capítulo será la ecuación de estado con respecto al agotamiento, en la cual se afirma que los recursos cambian de acuerdo al flujo que tengan (ver Capítulo 1). Durante gran parte del libro se ha asumido, sin embargo, que este flujo es siempre negativo y queda definido básicamente por la producción.

Con respecto a la ecuación de estado desarrollada en detalle en los capítulos anteriores, se suma entonces una función asociada al descubrimiento de recursos producto del esfuerzo en exploración. Matemáticamente, el flujo de recursos quedará representado de la siguiente forma:

$$dS = -q(t) dt + x(w(t))dt$$

, donde la variable x está en función de w , y se define como la cantidad de recursos descubiertos en un tiempo t , para un nivel de esfuerzo w que se realiza para descubrir dichos recursos.

Se debe considerar que el esfuerzo en exploración generalmente conllevará costos, los cuales se asocian a las actividades de sondaje, análisis, laboratorio, etc. Estos entran a su vez en el problema de la empresa minera por medio de descontar los flujos de caja de la misma.

El nivel óptimo del esfuerzo de exploración busca entonces equilibrar el beneficio marginal esperado por la actividad de exploración, el cual incluye el valor de los recursos adicionales descubiertos (y que en el futuro se explotarán), con el costo marginal asociado.

Para ejemplificar de manera adecuada la base matemática que será utilizada a lo largo del capítulo, se plantea un problema en base a Pindyck (1978) consistente en decidir cuánto y cuándo se debería invertir en exploración para maximizar el VAN de una mina en explotación. El autor plantea un ejercicio donde las reservas por descubrir son infinitas y la exploración es limitada por la optimización del gasto en este ítem versus los nuevos descubrimientos.

El problema a determinar por Pindyck (1978) se define de la siguiente forma:

$$\max_{q,w} \int_0^{\infty} [pq - C_1(S)q - C_2(w)]e^{-\delta t} dt$$

s. a.

$$\dot{S} = \dot{x} - q$$

$$\dot{x} = f(w, x)$$

$$\lim_{S \rightarrow 0} C_1(S) = \infty$$

$$S \geq 0, q \geq 0, w \geq 0, x \geq 0$$

En donde $C_1(S)$, corresponde al costo marginal de producción y $C_2(w)$ es el costo de exploración, que se asume se incrementa con w . Por su parte, \dot{x} corresponde a la tasa de reservas que se añaden producto de la exploración.

La solución a este problema se presentará en detalle en las próximas secciones del capítulo. Antes de cerrar esta sub-sección conviene discutir la completitud de la formulación matemática desarrollada por Pindyck (1978).

Para esto se puede tomar como base Schodde (2013), quien reconoce la existencia de tres factores como relevantes para definir el nivel de esfuerzo asociado a la actividad de exploración. Entre estos destacan: los precios del *commodity*, la disponibilidad financiera de fondos y la expectativa de demanda del *commodity* en cuestión. A continuación se discuten estos en mayor detalle:

- Precios de *commodities*: *Ceteris paribus*, a medida que los precios aumentan suben también los esfuerzos de exploración. Esto se debe a que existe expectativa de mayor valoración a lo que se encuentre cuando los precios son altos (entre otras cosas porque no existen restricciones de financiamiento tan activas). El caso más emblemático en la actualidad es la industria del litio y del cobalto. En ambos casos la exploración realizada se encuentra al alza, debido a que se espera los precios se mantengan altos durante un tiempo largo.
- Disponibilidad de fondos financieros: Esta variable es útil para predecir las fluctuaciones a corto plazo en la industria de exploración. Cuando la economía se encuentra en recesión, no existirán suficientes ingresos, por lo que será difícil, aun cuando se descubra un depósito de interés, que los bancos entreguen dinero a las empresas. En caso contrario, cuando existe significativa liquidez en el mercado, es decir, una gran cantidad de dinero circulante, el acceso a financiamiento será más fácil, lo que incentivará la exploración.
- Expectativa de la demanda del *commodity* en el futuro: El nivel de esfuerzo se comporta según la demanda a largo plazo. Por ejemplo, de datos publicados de la empresa *Novo Litio*, se espera que al año 2021 la demanda de litio crezca entre un 12% a un 15% respecto al 2017, lo que implicaría un aumento significativo por concepto de gasto de exploración en este mineral, debido al aumento de la demanda del litio. Es decir, una demanda más alta, requiere más depósitos descubiertos en operación (particularmente dado el agotamiento natural de los depósitos en actual operación).

Aunque en esencia la solución al problema matemático propuesto por Pindyck (1978) permitirá derivar el nivel de esfuerzo óptimo como una función del precio (tanto presente como futuro) del *commodity* e implícitamente la demanda del *commodity* en el futuro (dada nuevamente por la función de precios), queda claro que el nivel de financiamiento no es considerado como

Pindyck como una restricción activa. Por tanto, es esperable esperar que en la práctica el nivel de exploración en el mundo de Pindyck sea mayor al que en la práctica cabe esperar.

15.4 Explotación y exploración óptima determinística

Como ya se ha mencionado en secciones anteriores, la empresa minera enfrenta el problema de determinar simultáneamente el óptimo de su producción y su esfuerzo de exploración para cada instante de tiempo. Ambas decisiones se relacionan entre sí, puesto que actúan sobre las mismas reservas. Algunas de las implicancias sobre esta relación se discutirán a lo largo de esta sección, la que se basa principalmente en Pindyck (1978).

15.4.1 Exploración y producción bajo competencia

Se asume un mercado perfectamente competitivo, es decir, uno en el que la empresa es tomadora de precios. El precio del *commodity* explotado viene dado por $P(t)$. En cada instante de tiempo se debe decir cuánto producir $q(t)$, cantidad que se encuentra acotada a su vez por la base de reservas conocidas inicialmente S_0 . La tasa de descuento de la empresa se representa por r .

El aumento de las reservas responde al esfuerzo de exploración, dado por w (cantidad que se asume es no-negativa), mientras que la tasa de flujo de adiciones a las reservas depende tanto de w como de los descubrimientos acumulados de las reservas, dados por x . Es decir, $\dot{x} = f(w, x)$. Se considera que $f_w > 0$ debido a que un mayor nivel de esfuerzo de exploración las reservas adicionadas debiesen ser mayores (lo que no necesariamente ocurre en la práctica, pero no es difícil generalizar los resultados asumiendo que $f_w \geq 0$, un supuesto más razonable), y que $f_x < 0$, puesto que mientras más se ha descubierto, menos queda por descubrir.

En lo relativo a costos, se asume un costo marginal de producción dado por $C_1(S)$, el que aumenta a medida que las reservas van disminuyendo (es decir, $C_1'(S) < 0$). Esto puede explicarse debido a, por ejemplo, consideraciones geométricas, las que en el caso de la minería de rajo podrían interpretarse como el mayor costo que implica el aumento de la profundidad del material a ser extraído a medida que se avanza en la vida útil de la mina. A partir del mismo razonamiento, se asume también que cuando las reservas tienden a cero, el costo de producción tiende a infinito. Es decir, se vuelve prohibitivamente caro extraer el último átomo del elemento de interés.

Similarmente, $C_2(w)$ representa el gasto asociado al esfuerzo de exploración, el que aumenta para mayores valores de w (es decir, $C_2'(w) > 0$). Se asume que $C_2(w)$ es convexa ($C_2''(w) > 0$) y que el costo marginal de descubrimiento, dado por $\frac{C_2'(w)}{f_w}$, aumenta con w (es decir, $\frac{d}{dw} \left(\frac{C_2'(w)}{f_w} \right) > 0$).

El problema enfrentado por la empresa productora y exploradora corresponde entonces al siguiente:⁹⁴

$$\max_{q,w} VAN = \max_{q,w} \int_0^{\infty} [P(t)q(t) - C_1(S)q(t) - C_2(w)]e^{-rt} dt \quad (15.1)$$

s. a.

$$\dot{S} = \dot{x} - q \quad (15.2)$$

$$\dot{x} = f(w, x) \quad (15.3)$$

Además, se tienen las condiciones de no-negatividad de las variables:

$$S \geq 0, q \geq 0, w \geq 0, x \geq 0 \quad (15.4)$$

La solución a este problema se deriva mediante control óptimo, con el Hamiltoniano H dado por:

$$H = qPe^{-rt} - C_1(S)qe^{-rt} - C_2(w)e^{-rt} + \lambda_1[f(w, x) - q] + \lambda_2 f(w, x) \quad (15.5)$$

Al derivar esta expresión respecto a S se tiene:

$$\dot{\lambda}_1 = C_1'(S)qe^{-rt} \quad (15.6)$$

Mientras que al derivar H respecto a x se obtiene:

$$\dot{\lambda}_2 = -(\lambda_1 + \lambda_2)f_x \quad (15.7)$$

Nótese que (15.6) y (15.7) forman ambas un sistema de ecuaciones dinámicas para λ_1 y λ_2 .

Finalmente, se deriva la expresión (15.5) respecto a q para obtener una la condición del máximo:

$$H_q = Pe^{-rt} - C_1(S)e^{-rt} - \lambda_1 = 0 \quad (15.8)$$

⁹⁴Se considera un horizonte de evaluación con $0 \leq t \leq \infty$ debido a que el autor presenta el modelo en su forma general.

Es necesario notar que λ_1 corresponde al cambio de valor presente correspondiente al beneficio proveniente de una unidad adicional de reservas, el que siempre es positivo. Por otra parte, la expresión (15.6) muestra que $\dot{\lambda}_1$ es negativo, puesto que $C'_1(S)$ es negativo.

Al diferenciar (15.8) respecto al tiempo, se utiliza la ecuación de estado dada por (15.2) y se iguala con (15.6) para obtener la ecuación dinámica que entrega la trayectoria del precio en el tiempo:

$$\dot{P} = rP - rC_1(S) + C'_1(S)f(w, x) \quad (15.9)$$

Debido a los signos de $C_1(S)$ y $C'_1(S)$, la expresión (15.9) permite afirmar que el precio aumenta a una menor tasa que en el caso sin exploración ($f(w, x) = 0$). Además, si $C'_1(S) = 0$ – lo que implica que los costos de producción no dependen de las reservas – la trayectoria del precio no se ve afectada por la exploración, y es idéntica a la obtenida en la solución estándar del problema de Hotelling con costos marginales constantes. Sin embargo, si $C'_1(S) \neq 0$ los costos de producción sí dependerán en general de la exploración, puesto que las reservas efectivas, es decir, aquellas disponibles para producción en un determinado momento, serán mayores que las reservas iniciales, lo que le permitirá al productor iniciar la explotación a un precio inicial menor. Las trayectorias del precio para los casos con y sin exploración se presentan en la Figura 15.5.

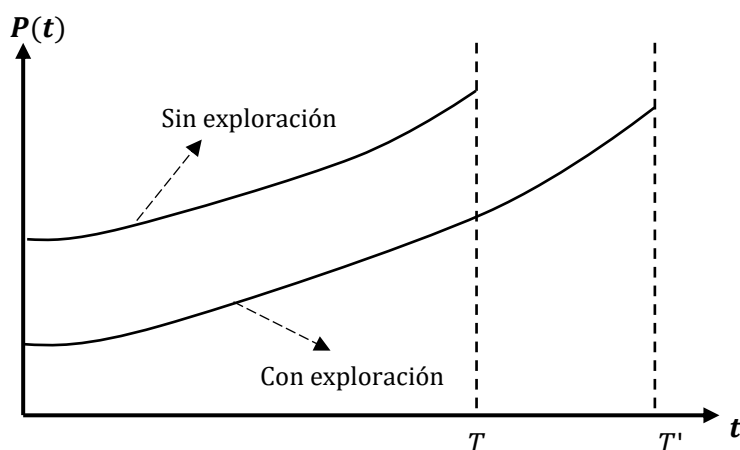


Figura 15.5. Trayectoria de precios para casos con y sin exploración. Fuente: Pindyck (1978)

Es además posible determinar la trayectoria óptima del esfuerzo de exploración al derivar el Hamiltoniano con respecto a w e igualarlo a cero:

$$H_w = -C'_2(w)e^{-rt} + (\lambda_1 + \lambda_2)f_w = 0 \quad (15.10)$$

Al despejar λ_1 de (15.10) y sustituirlo en (15.8) se obtiene:

$$\lambda_2 = \frac{c_2'(w)}{f_w} e^{-rt} - p e^{-rt} + C_1(S) e^{-rt} \quad (15.11)$$

Con (15.8) y (15.11) es posible reescribir (15.7), obteniendo:

$$\dot{\lambda}_2 = -\frac{f_x}{f_w} C_2'(w) e^{-rt} \quad (15.12)$$

Luego, al derivar (15.11) respecto al tiempo y sustituyendo \dot{S} , \dot{p} y \dot{x} con las expresiones ya encontradas, se obtiene:

$$\dot{\lambda}_2 = \frac{-c_2'(w) f_{wx} f}{(f_w)^2} e^{-rt} - r \frac{c_2'(w)}{f_w} e^{-rt} - C_1(S) q e^{-rt} + \frac{f_w c_2''(w) - c_2'(w) f_{ww}}{(f_w)^2} \dot{w} e^{-rt} \quad (15.13)$$

Igualando (15.13) con (15.12), para luego despejar \dot{w} , se tiene que la trayectoria óptima del esfuerzo de exploración viene dada por:

$$\dot{w} = \frac{c_2'(w) \left[\left(\frac{f_{wx}}{f_w} \right) f - f_x + r \right] + c_1'(S) q f_w}{c_2''(w) - c_2'(w) \frac{f_{ww}}{f_w}} \quad (15.14)$$

Para analizar esta trayectoria se deben considerar las condiciones de transversalidad del problema. Asumiendo que el costo marginal de producción en $t = 0$ es idéntico a cero, es decir, que $\frac{c_2'(0)}{f_w(0)} = 0$, se obtiene que cuando termina la producción, es decir en $t = T$, la exploración adicional no agrega valor, por lo que $w(T)$ debe necesariamente anularse.

Además, esta condición de transversalidad establece que en T no existe un costo asociado a los descubrimientos acumulados x , y , por lo tanto, la variable asociada λ_2 , que representa dicho costo, debe ser cero.

Luego, a partir de $\frac{c_2'(0)}{f_w(0)} = 0$ y de $\lambda_2(T) = 0$, utilizando la ecuación (15.11) se obtiene que $P_T = C_1(S_T)$, lo que significa que el precio aumenta y las reservas se reducen (se aumentan los costos de producción) hasta que la utilidad marginal se hace cero.

De lo anterior y de la ecuación (15.8) se desprende también que $\lambda_1(T) = 0$, lo que significa que en dicho tiempo el valor adicional de aumentar las reservas en una unidad marginal es cero, por lo que se deja de explorar (lo que confirma la intuición inicial).

Ahora se supone que $\frac{C_2'(0)}{f_w(0)} = k > 0$. En este caso el esfuerzo de exploración se reducirá a cero antes de que lo haga la producción. Se establece así T_1 como el momento en que cesa la exploración, con $T_1 < T$. Al igual que en el caso anterior, se tiene que $\lambda_2(T) = 0$, además, mientras $w = 0$, $\dot{\lambda}_2 = 0$ y, por lo tanto, $\dot{\lambda}_2(T_1) = 0$. Entonces, de (15.8) y (15.10), para $t \geq T_1$, $p - C_1(S) = \lambda_1 e^{rt} = k$ y $C_1'(S)q = -rk$. Estas expresiones establecen el comportamiento de w , q y p , y dicen que w tiende a cero a medida que t tiende a T_1 de la misma forma que:

$$P - C_1(S) \rightarrow k \quad (15.15)$$

$$-\frac{C_1'(S)q}{r} \rightarrow k \quad (15.16)$$

Luego, para $t \geq T_1$, $P - C_1(S)$ y $C_1'(S)q$ se mantienen constantes, para que P , $C_1(S)$ y $C_1'(S)$ aumenten a medida que q disminuye.

Finalmente, es necesario notar que las condiciones (15.15) y (15.16) pueden ser interpretadas al reconocer que las nuevas reservas agregan valor al ser extraídas y vendidas, o al ser almacenadas, lo que aumenta las reservas y, por tanto, reduce los costos de producción. De esto último se puede deducir una nueva condición de equilibrio, puesto que la última unidad descubierta debe ser aquella que tiene un costo marginal de exploración igual al valor generado por su explotación y venta, siendo este último a su vez equivalente al beneficio generado por el almacenaje de esta unidad y la reducción de los costos de extracción que dicha acción significa.

Así, dadas funciones particulares para $f(w, x)$, $C_1(S)$ y $C_2(w)$, y una ecuación que permita relacionar P y q , las expresiones encontradas para \dot{P} y \dot{w} junto a las condiciones de borde establecidas en esta sección permiten determinar las trayectorias óptimas para el precio (y por tanto para la producción) y el esfuerzo exploratorio. Estas trayectorias ideales comprenden en cierta medida el balance intertemporal entre posponer la exploración (y descontar los costos asociados) o adelantarla, con el aumento de las reservas en que esto se traduce y la reducción de los costos de explotación que a su vez implica.

De los resultados encontrados también se puede extraer que si las reservas iniciales son grandes en relación a $C_1(S)$, puede posponerse una mayor cantidad de exploración para el futuro, mientras que, si las reservas iniciales son pequeñas, es en general más beneficioso explorar desde un principio, para aumentar el inventario de reservas probadas y reducir al mismo tiempo

los costos de producción. Un análisis en mayor profundidad será llevado a cabo en la subsección 15.4.3.

15.4.2 Exploración y producción monopolística

En el caso del productor monopolístico, este busca determinar las funciones q y w tales que se maximice el VAN del proyecto, de igual forma a la maximización dada por la expresión (15.1), pero esta vez enfrentando una función de precios dada por $P(q)$, con $P'(q) < 0$. De esta forma, el problema a maximizar en este caso será:

$$\max_{q(t), w} VAN = \max_{q, w} \int_0^{\infty} [P(q)q(t) - C_1(S)q(t) - C_2(w)]e^{-rt} dt \quad (15.17)$$

Las ecuaciones (15.6) y (15.7) aplican también a este caso, pero la derivación del Hamiltoniano respecto a q , igualado a cero, entrega como resultado:

$$\lambda_1 = BM_t e^{-rt} - C_1(S)e^{-rt} \quad (15.18)$$

Donde $BM_t = P + q \left(\frac{dP}{dq} \right)$ representa el beneficio marginal en t . Al diferenciar (15.18) respecto al tiempo e igualándolo a (15.6) se obtiene la ecuación dinámica que describe el beneficio marginal en el tiempo:

$$\dot{BM} = rBM - rC_1(S) + C_1'(S)f(w, x) \quad (15.19)$$

De esta expresión se desprende nuevamente que si los costos de extracción no dependen del nivel de reservas, el beneficio marginal cumple la regla de Hotelling presentada en el Capítulo 9, es decir, aumenta según la tasa de descuento.

Al diferenciar el Hamiltoniano con respecto a w , y sustituyendo λ_1 de (15.18) se obtiene una expresión para λ_2 :

$$\lambda_2 = \frac{C_2'(w)}{f_w} e^{-rt} - BM_t e^{-rt} + C_1(S)e^{-rt} \quad (15.20)$$

Al derivar esta última expresión respecto al tiempo, e igualándola con (15.7) es posible despejar la trayectoria óptima para \dot{w} :

$$\dot{w} = \frac{C_2'(w) \left[\left(\frac{f_{wx}}{f_w} \right) f - f_x + r \right] + C_1'(S) q f_w}{C_2''(w) - C_2'(w) \frac{f_{ww}}{f_w}} \quad (15.21)$$

Esta expresión es idéntica a la encontrada para el caso competitivo en (15.14). Esto, sin embargo, no implica que las trayectorias serán también idénticas, debido a que la relación entre P y q es distinta, lo que conlleva a una menor producción del monopolista en un inicio, generándose así un \dot{w} mayor, dado que $C_1'(S) < 0$. Por lo tanto, para cualquier nivel de reservas inicial, es esperable que en igualdad de condiciones el monopolista invierta menos en exploración en un principio que en un mercado competitivo, para más tarde llevar a cabo un esfuerzo mayor.

Es necesario notar que, para ciertas condiciones particulares, como costos de explotación nulos, el precio y la actividad exploratoria óptima serán los mismos para productores monopolísticos y competitivos.

Para entender de mejor forma la dinámica del problema de Pindyck (1978) y su solución, a continuación se reproduce un ejemplo numérico desarrollado en este artículo, elaborado a partir de información relativa a la explotación de depósitos pérmicos de petróleo en Texas, explotados entre 1965 y 1974.⁹⁵

Para este ejemplo se asume que el costo de producción aumenta de forma hiperbólica a medida que las reservas tienden a cero, es decir, $C_1(S) = \frac{m}{S}$. Para derivar el parámetro m en esta expresión, se utiliza el hecho de que en 1966 los costos de extracción eran de 1,25 dólares por barril, mientras que las reservas eran 7.170 millones de barriles. Con esto, se estima que $m = 8.960$ (millones de dólares).

La actividad exploratoria se representa mediante el número de pozos de exploración perforados y desarrollados año a año. En el periodo referenciado, los costos de exploración habrían presentado economías de escala. Al medir C_2 en millones de dólares, con los datos de la industria se obtiene:

$$C_2(w) = 0,0670 w + 103,2 \quad (15.22)$$

La función de descubrimiento, por su parte, tiene la forma del tipo Cobb-Douglas dada por $f(w, x) = Aw^\alpha e^{-\beta x}$, con $\alpha, \beta > 0$. Aplicando logaritmo a la función de descubrimiento, y

⁹⁵ Un desarrollo más completo del problema expuesto puede encontrarse en Pindyck (1978).

empleando series de datos basadas en los descubrimientos y extensiones⁹⁶ del periodo y los valores promedios de estos, se llega a la siguiente ecuación (ajustada econométricamente):

$$\text{Ln}(f(w, x)) = 2,389 + 0,599 \log(w) - 0,0002258 x \quad (15.23)$$

Cabe señalar que en esta ecuación tanto el logaritmo de la función de descubrimiento como la variable x están en millones de barriles.

En cuanto a la función de demanda, se especifica una función de demanda de mercado lineal, con una elasticidad precio de la demanda de $-0,1$ a un precio de 3 dólares (nótese que el precio se encuentra en moneda constante del tiempo en el que el artículo fue escrito, por eso el valor parece tan bajo) y una producción de 600 millones de barriles:

$$q = 660 - 20P \quad (15.24)$$

Adicionalmente, se considera que el productor posee una tasa de descuento del 5% ($r = 0,05$) y que $\frac{c_2'(0)}{f_w(0)} = 0$. Con esto, se obtienen soluciones para distintos valores de P_0 y w_0 hasta que se alcanza la condición terminal y w , q y el beneficio marginal se hacen todas simultáneamente cero. Los resultados encontrados para el caso competitivo y monopolístico se presentan en las Tablas 15.3 y 15.4, respectivamente. A continuación, en las Figuras 15.6 y 15.7 se presentan gráficos comparativos entre los casos competitivo y monopolístico, relacionando producción y precio, y producción y esfuerzo exploratorio.

⁹⁶ Las extensiones se refieren al aumento de las reservas de petróleo que conlleva el aumento del área probada de un reservorio previamente conocido.

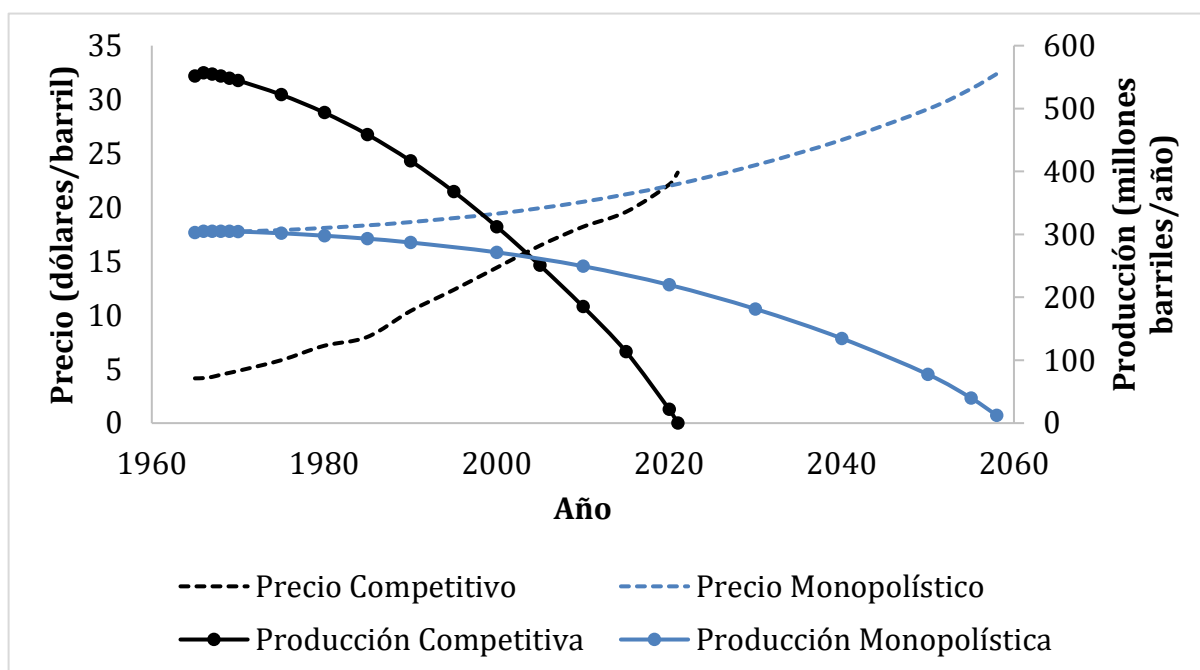


Figura 15.6. Producción y precio para casos competitivo y monopolístico Fuente: Elaboración propia en base a Pindyck (1978)

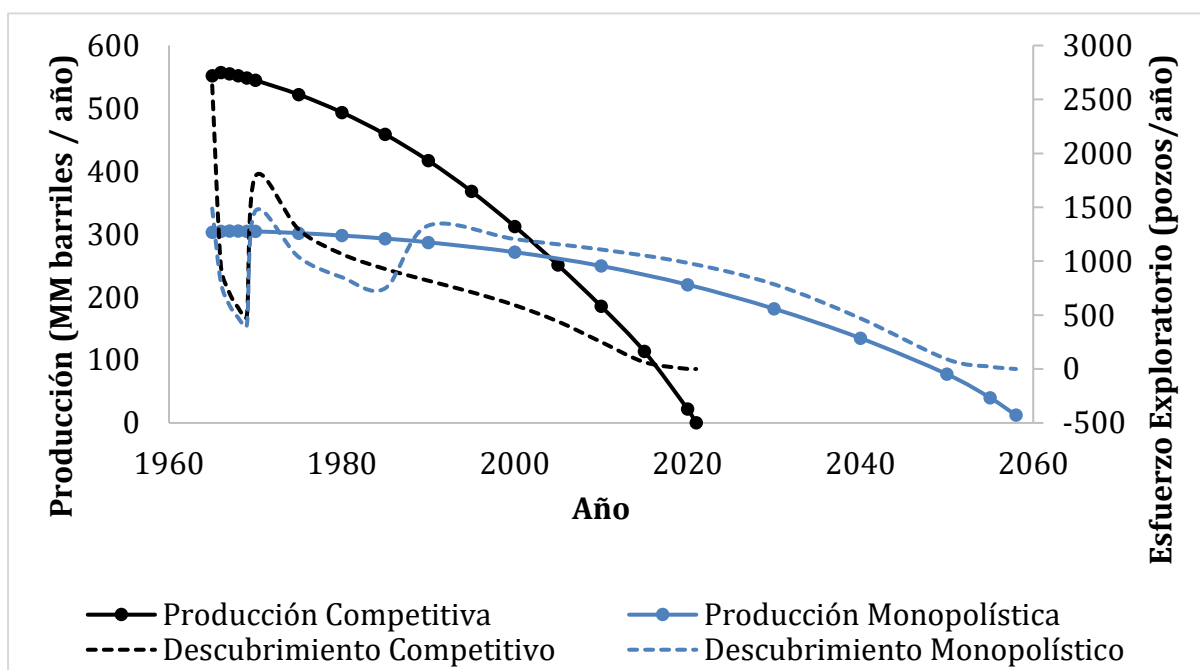


Figura 15.7. Producción y esfuerzo exploratorio para casos competitivo y monopolístico. Fuente: Elaboración propia en base a Pindyck (1978)

15.4.3 Perfiles de precios según exploración y explotación óptima

Según el modelo descrito con anterioridad, el perfil del precio y la actividad exploratoria dependerá principalmente del nivel de reservas iniciales y el comportamiento de la función de costo de explotación.

Si las reservas iniciales son altas en relación a las funciones de costos, es esperable que el precio del barril de petróleo aumente lentamente, de forma similar a lo visto en la solución del mundo ideal de Hotelling (5%). Esto se debe principalmente a que en un principio $C_1(S)$ y $C'_1(S)$ serán bajos, por lo que el precio aumentará a una tasa moderada según la relación presentada por la expresión (15.9). En cuanto al esfuerzo de exploración, se tiene que w aumentará desde un nivel muy bajo, mientras se reducen las reservas a una tasa cada vez menor, a medida que estas aumentan. En algún instante de tiempo w se volverá negativo debido al aumento de $C'_1(S)$, y la exploración caerá hasta llegar a cero. Si los costos de explotación son pequeños en relación a los de exploración, esta se pospone hasta el final del horizonte planificado, debido a que el beneficio (menores costos de extracción) de aumentar las reservas se vuelve despreciable. Ambos comportamientos se presentan en la Figura 15.8. La línea continua representa el caso con reservas iniciales altas, mientras que la línea punteada muestra el caso con reservas iniciales bajas.

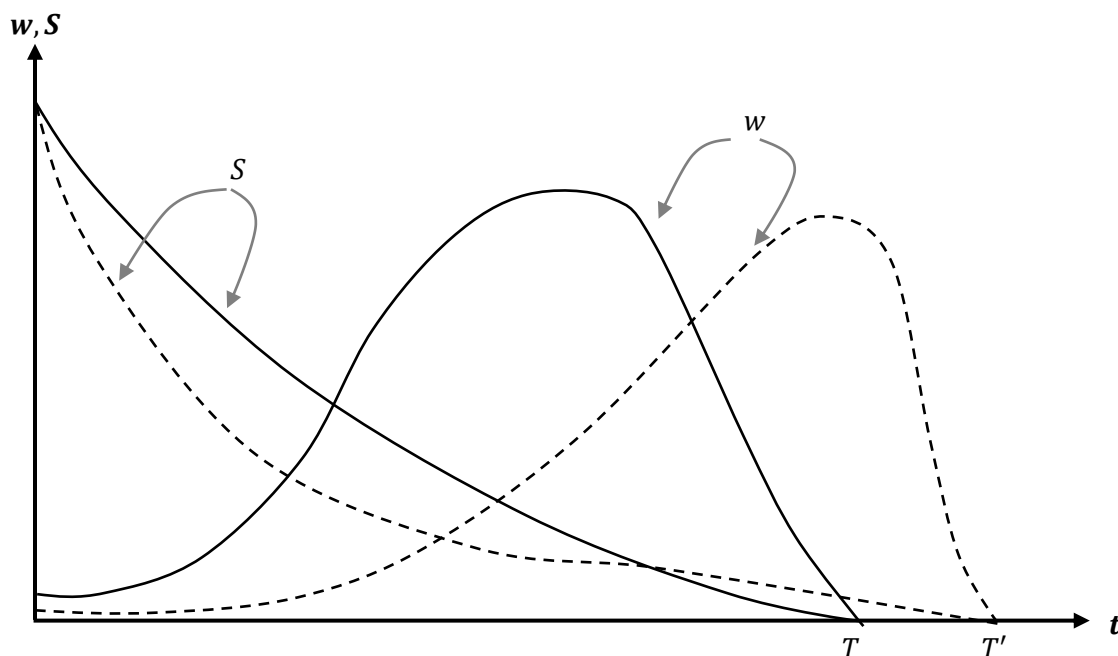


Figura 15.8. Trayectorias de reservas y esfuerzo de exploración para perfil ascendente de precio.

Fuente: Pindyck (1978)

Si, en cambio, las reservas iniciales son suficientemente pequeñas (y los costos dependen de estas), el precio comenzará relativamente alto, para luego decaer a medida que aumentan las reservas. Luego de cierto tiempo la presión del agotamiento de las reservas volverá a hacer que el precio aumente, estableciendo por tanto una trayectoria con forma de U. Esta dinámica se debe a que en un comienzo tanto $C_1(S)$ como $C'_1(S)$ serán relativamente altos, por lo que el precio decaerá desde un valor alto. En tanto, \dot{w} también decaerá desde un valor alto, dado que $C'_1(S)$ es un número grande y negativo. Las reservas aumentarán rápidamente en respuesta a la exploración, pero esta tasa decaerá con el tiempo a medida que dicho esfuerzo disminuye. Si los costos de exploración son relativamente bajos, esta actividad decaerá más rápido debido a que no existirán incentivos significativos para aumentar las reservas. Luego, a medida que la producción aumenta, \dot{w} podrá volverse positiva, evitando así que las reservas se reduzcan demasiado rápido. Hacia el final de la vida de las reservas, $C'_1(S)$ dominará el numerador de (15.21) y \dot{w} se hará negativo, con la exploración llegando a cero. Ambos comportamientos se presentan en la Figura 15.9. Mientras que la línea continua representa el caso con reservas iniciales altas y la línea punteada muestra el caso de reservas bajas.

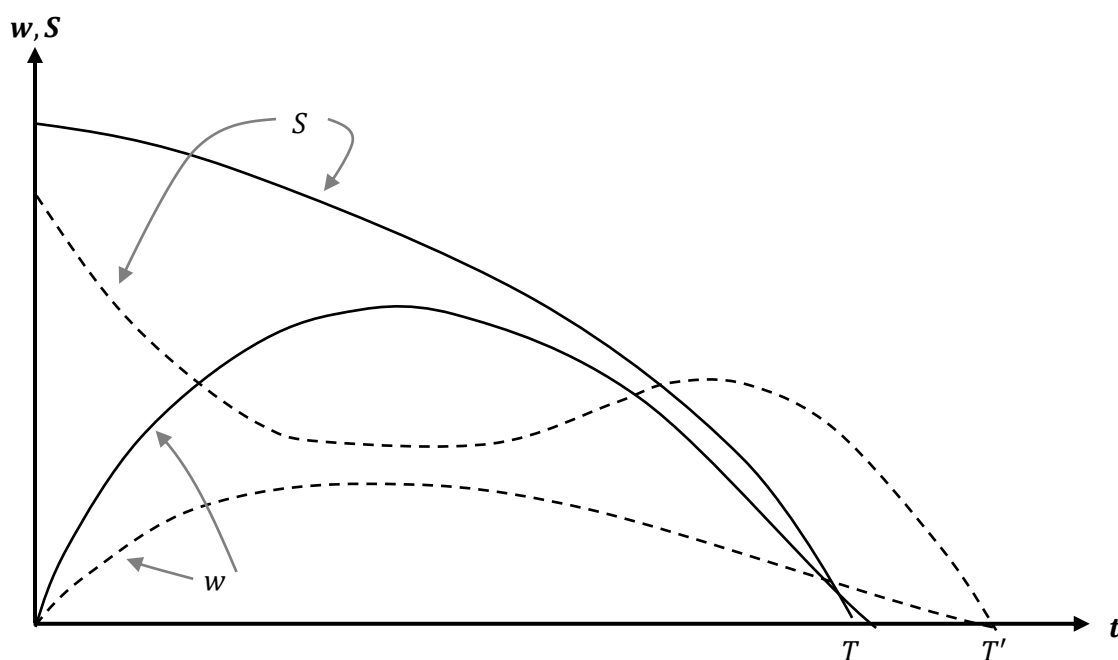


Figura 15.9. Trayectorias de reservas y esfuerzo de exploración para perfil de precio con forma de U. Fuente: Pindyck (1978)

RECUADRO 15.5

EL VALOR DE LA INFORMACIÓN RELATIVA A LA EXPLORACIÓN EN MERCADOS IMPERFECTOS

Hartwick y Sardosky (1990), discuten consideraciones estratégicas sobre la exploración y posterior publicación de información geológica, en un modelo de teoría de juegos con dos actores que interactúan en dos etapas secuenciales. En una primera instancia, cada actor inicia con reservas y costos de extracción conocidos, además de su propia tecnología de exploración determinística y la demanda del mercado. Luego, ambos participantes deben decidir cuánto producir y cuánto explorar, anticipando el comportamiento del rival, puesto que las decisiones de ambos tienen implicancias sobre el mercado global.

Los autores presentan a su vez tres casos. En el primero, ambos productores son fusionados en una misma empresa, constituyendo este caso el de un monopolio con procesamiento y producción en dos plantas independientes, pero coordinadas entre sí. En el segundo, se presenta un duopolio sin cooperación entre los productores, mientras que en el tercero se plantea un duopolio en que ambas compañías intercambian información con respecto a sus descubrimientos, cooperando por tanto en este nivel.

Entre los resultados derivados, los autores observaron que, en el caso del duopolio no-cooperativo se lleva a cabo mayor exploración en un principio, debido a que, en un mercado imperfecto, la exploración no sólo conlleva a una mayor producción de parte de las empresas (un resultado descubierto por A. Cournot en 1838 y bien establecido en teoría de juegos cuando la competencia se produce en cantidades), sino también implica pérdidas asociadas a una mayor exploración que aquella eficiente en un caso monopolístico.

Posteriormente, Polasky (1996), complementó de cierta manera el trabajo de Hartwick y Sardosky (1990), empleando esta vez un modelo similar de dos compañías productoras que realizan exploración, pero esta vez enfocándose en el impacto que tiene sobre el mercado si las compañías mantienen sus descubrimientos privados o si publican sus hallazgos abiertamente.

La principal conclusión obtenida dice que, si bien la compañía promedio preferirá mantener su información en privado, ambos actores se beneficiarán cuando la información se hace pública, puesto que serán capaces de coordinar de mejor manera planes de extracción a futuro. Esto, en general, reduce la variabilidad de las cantidades producidas óptimas en distintos periodos. Adicionalmente, estos autores consideran otros temas, como la relación entre el manejo de la información y el poder

de mercado de una empresa, y las condiciones necesarias para que no sea provechoso para una firma aumentar la información que posee de su yacimiento, resultado que podría parecer a primera vista contraintuitivo.

Para el planteamiento matemático de ambos problemas, además de un análisis más detallado de estos y otros resultados y conclusiones, se sugiere al lector consultar dichas publicaciones.

Tabla 15.3. Solución para el caso competitivo (Pindyck, 1978)

Año	Producción (MM barriles/año)	Precio (USD/barril)	Renta (USD/barril)	Pozos Perforados	Reservas (MM barriles)	Descubrimientos Acumulados (MM barriles)	Beneficio (MMUSD/año)
1965	552	5,4	4,15	9.353	7.170	0	1.556
1966	557	5,146	4,177	4.779	9.243	2.630	1.901
1967	554,9	5,254	4,284	4.120	9.648	3.590	2.019
1968	551,9	5,402	4,488	3.794	9.801	4.295	2.118
1969	548,5	5,573	4,661	3.612	9.822	4.865	2.209
1970	544,7	5,76	4,842	3.511	9.763	5.350	2.298
1975	522,1	6,891	5,833	3.554	8.892	7.138	2.729
1980	493,6	8,317	7,174	4.014	7.659	8.433	3.154
1985	458,8	10,05	7,99	4.681	4.361	9.500	3.550
1990	417	12,14	10,391	5.411	5.117	10.428	3.867
1995	368,1	14,59	12,35	5.978	3.994	11.247	4.039
2000	312,4	17,37	14,413	6.012	3.031	11.960	3.996
2005	251	20,44	16,452	5.062	2.243	12.552	3.684
2010	185,4	23,72	18,201	2968	1.623	12.993	3.071
2015	113,6	27,31	19,584	669,8	1.159	13.244	2.075
2020	22,04	31,89	22,12	3,074	917,1	13.308	383,7
2021	0,18	32,99	23,233	3,415	917,9	13.309	-99,03

Tabla 15.4. Solución para el caso monopolístico (Pindyck, 1978)

Año	Producción (MM barriles/año)	Precio (USD/barril)	Renta (USD/barril)	Pozos Perforados	Reservas (MM barriles)	Descubrimientos Acumulados (MM barriles)	Beneficio (MMUSD/año)
1965	303	17,85	1,45	3.618	7.170	0	4.681
1966	304,8	17,75	1,427	2.293	8.353	1.488	4.828
1967	305,2	17,73	1,448	187	8.851	2.291	4.876
1968	305,1	17,74	1,499	1.641	9.137	2.883	4.901
1969	304,9	17,75	1,538	1.495	9.310	3.360	4.916
1970	304,5	17,77	1,588	1.396	9.409	3.764	4.925
1975	301,8	17,9	1,843	1.197	9.360	5.230	4.932
1980	297,9	18,1	2,194	1.200	8.901	6.269	4.909
1985	293,1	18,34	2,597	1.295	8.276	7.120	4.868
1990	287,1	18,64	3,097	1.460	7.576	7.868	4.811
2000	271,5	19,42	4,375	1.983	6.116	9.198	4.639
2010	249,5	20,52	6,142	2.746	4.720	10.403	4.359
2020	219,8	22	8,432	3.592	3.489	11.511	3.928
2030	181,5	23,92	11,226	3.994	2.479	12.495	3.313
2040	134,8	26,25	14,226	3.050	1.669	13.281	2.519
2050	77,6	29,11	17,241	801,6	1.123	13.751	1.481
2055	40,05	30,99	19,396	145,7	934,9	13.842	743,2
2058	12,33	32,38	21,706	64,55	891,2	13.864	167.6

15.5 Explotación y exploración óptima estocástica

En la sección anterior se resolvió el problema de determinar el nivel de extracción y esfuerzo en exploración según lo propuesto por Pindyck (1978). Este planteamiento considera una serie de elementos propios del problema real que enfrenta una mina. Sin embargo, considerar de forma determinística la tasa de descubrimiento de recursos, dado un cierto nivel de esfuerzo y descubrimiento acumulados parece poco realista. Esto se debe a la relación intrínseca que existe entre la exploración y la incertidumbre, siendo justamente una de las motivaciones para llevar a cabo la actividad exploratoria la reducción de la incerteza asociada al modelo productivo.

Por esta razón, en esta sección se resuelve el problema presentado anteriormente, pero modelando la tasa de descubrimiento de recursos como un proceso estocástico.

15.4.1 Planteamiento del problema estocástico

El problema a resolver es similar al propuesto en la sección anterior, por lo que se mantienen las condiciones y funciones planteadas en este, con la excepción de que ahora se busca maximizar la esperanza del VAN al presentarse una variable estocástica. De esta forma, el problema puede ser expresado como:

$$\max_{q,w} E\{VAN\} = \max_{q,w} E\left\{ \int_0^T [P(t)q(t) - C_1(S)q(t) - C_2(w(t))]e^{-rt} dt \right\} \quad (15.25)$$

s. a.

$$dS = -qdt + dx \quad (15.26)$$

$$dx = \alpha(w, x)dt + \sigma(w, x)dz \quad (15.27)$$

$$dP = aPdt \quad (15.28)$$

$$S, x, q, w \geq 0 \quad (15.29)$$

Como se puede apreciar en (15.27), la tasa de descubrimiento dx tiene una componente determinística y una componente estocástica, dadas por $\alpha(w, x)$ y $\sigma(w, x)$, respectivamente. Al igual que en el caso determinístico, tanto $\alpha(w, x)$ como $\sigma(w, x)$ están en función de los esfuerzos realizados y de los recursos descubiertos acumulados. Cabe destacar que la función $\alpha(w, x)$ es idéntica a la función $f(w, x)$ de la Sección 15.4, por lo que la solución al problema

(15.25)-(15.29) debiese ser idéntica al del problema (15.1)-(15.4) cuando $\sigma(w, x) = 0$. En la Figura 15.10, se puede apreciar el comportamiento de la tasa de descubrimientos, donde a manera de ejemplo, se proponen dos posibles curvas para dx en función de w .

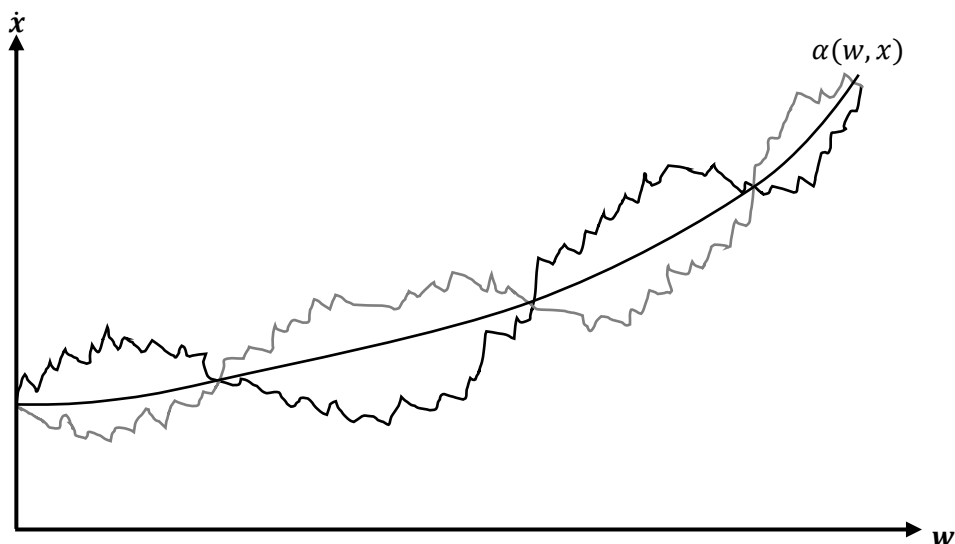


Figura 15.10. Tasa de descubrimiento estocástica en función del esfuerzo exploratorio

Aunque en la ecuación (15.27) se asume la tasa de adición de reservas sigue un proceso de Itô, en la práctica existen distintas formas de modelar la incertidumbre en esta variable. Para un mayor detalle al respecto se puede consultar el Recuadro 15.6.

RECUADRO 15.6

PROCESO DE LÉVY Y RECURSOS REMANENTES DE UN DEPÓSITO MINERAL

En el Capítulo 7 se discutió como a través de un diferencial de Levy se pueden modelar los cambios abruptos que sufren los precios de los *commodities* debidos a *shocks* del mercado por fuertes cambios típicamente en la demanda (Tilton y Guzmán, 2016).

Al observar la ecuación de estado (15.27), se aprecia que a la tasa de descubrimiento se le agrega una componente aleatoria en comparación al caso determinístico. Esta componente aleatoria se modela con un diferencial de Wiener y una función sigma. La ecuación establece que la tasa de descubrimiento, a pesar de ser incierta, varía de manera continua. Sin embargo, en el mundo minero esto no suele ser el caso siempre. Puede suceder que en algún periodo de tiempo una campaña de

exploración descubra una cantidad de recursos significativa y que actúe como un quiebre en los recursos previamente conocidos.

Para ejemplificar esto considérese el caso de la adición de recursos producto de la exploración en una mina representativa de cobre: Collahuasi. La Figura 15.11 muestra la evolución de los recursos en el periodo 2009 y 2015 para esta mina, y en donde, en los años 2010 y 2012 se muestra los recursos aumentaron 40% y 19% con respecto a los recursos conocidos en año anterior, mientras que en el resto de los años el aumento fue pequeño (y por tanto podría considerar continuo).

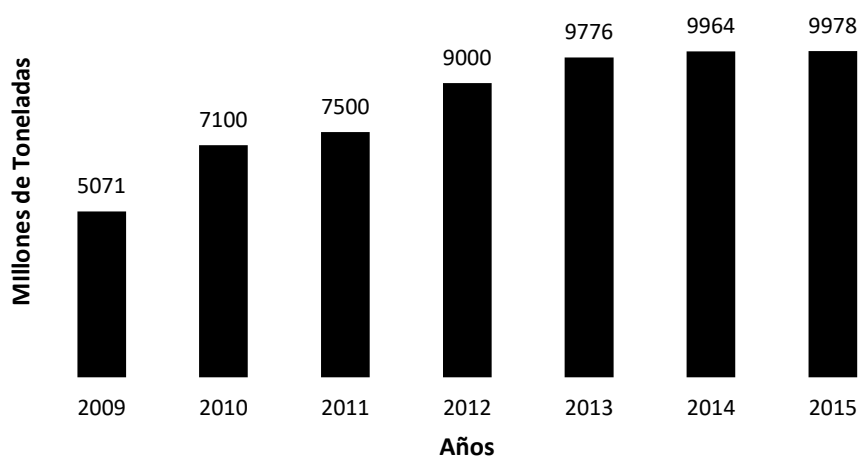


Figura 15.11. Evolución recursos minerales Collahuasi entre 2009 y 2015. Fuente: Collahuasi (2016).

La evolución de los recursos en Collahuasi permite justificar que en la práctica la evolución de los recursos de una mina pueda modelarse como una combinación de procesos estocásticos continuos (Itô) y discretos o discontinuos (Levy).

Con la adición de un diferencial de Levy a la ecuación (15.27) es posible modelar los saltos que genera el encontrar una cantidad de recursos considerable. Por lo tanto, la introducción de los procesos de salto debieran permitir modelar de manera más realista las variaciones de los recursos de un depósito mineral bajo incertidumbre.

15.4.2 Resolución mediante programación dinámica estocástica

Para la resolución del problema planteado se utiliza programación dinámica estocástica, planteándose el principio de optimalidad de Bellman de la siguiente manera:

$$J(S, P, x, t) = \max_{q, w} E [(\pi(t)dt + J(S + dS, P + dP, x + dx, t + dt))e^{-rt}] \quad (15.30)$$

Donde el flujo de caja en cada instante de tiempo viene dado por:

$$\pi(t) = Pq - C_1(S)q - C_2(w) \quad (15.31)$$

Al realizar la expansión de Taylor de segundo orden, y utilizando el Lema de Itô, se obtiene la ecuación siguiente:

$$J = \max_{q, w} E [\pi dt + (J + J_S dS + \frac{J_{SS}(dS)^2}{2} + J_P dP + J_x dx + \frac{J_{xx}(dx)^2}{2} + J_t dt)(1 - rdt)] \quad (15.32)$$

Cabe destacar que en esta ecuación existe un término dx^2 debido a que dx presenta precisamente un diferencial de Wiener. El término dS^2 también debiese ser no-nulo debido a que las reservas aumentan de forma estocástica.

Sustituyendo los diferenciales de (15.26), (15.27) y (15.28) en (15.32) se obtiene:

$$J = \max_{q, w} E [(\pi dt + J + J_S(-qdt + \alpha dt + \sigma dz) + \frac{J_{SS}(-qdt + \alpha dt + \sigma dz)^2}{2} + J_P aP dt + J_x \alpha dt + \sigma dz + \frac{J_{xx}(\alpha dt + \sigma dz)^2}{2} + J_t dt)(1 - rdt)] \quad (15.33)$$

$$J = \max_{q, w} E [\pi dt + J + J_S(-qdt + \alpha dt + \sigma dz) + \frac{J_{SS}(-qdt + \alpha dt + \sigma dz)^2}{2} + J_P aP dt + J_x \alpha dt + \sigma dz + \frac{J_{xx}(\alpha dt + \sigma dz)^2}{2} + J_t dt - Jr dt] \quad (15.34)$$

Al reordenar términos de la ecuación (15.34), y considerando que al elevar al cuadrado algunos diferenciales se anulan, se llega a la siguiente expresión:

$$\max_{q, w} E [\pi dt + J_S(-qdt + \alpha dt + \sigma dz) + \frac{J_{SS}\sigma^2 dt}{2} + J_P aP dt + J_x(\alpha dt + \sigma dz) + \frac{J_{xx}\sigma^2 dt}{2} + J_t dt - Jr dt] = 0 \quad (15.35)$$

Calculando la esperanza de los diferenciales de Wiener, los términos dz se eliminan. Por otra parte, el término Jr no está en función de q o w , por lo que puede salir de la expresión maximizada, con lo que tras simplificar por dt se obtiene:

$$rJ = \max_{q, w} \left[\pi + J_S(-q + \alpha) + \frac{J_{SS}\sigma^2}{2} + J_P aP + J_x \alpha + \frac{J_{xx}\sigma^2}{2} + J_t \right] \quad (15.36)$$

Ahora bien, para encontrar los términos q y w que maximizan la ecuación basta derivar respecto a ambos términos e igualar a 0. Derivando primero con respecto a q se obtiene:

$$\pi_q - J_s = 0 \quad (15.37)$$

$$p - C_1(S) = J_s \quad (15.38)$$

Derivando la ecuación (15.38) con respecto a S se logra determinar J_{ss} .

$$J_{ss} = -C_1'(S) \quad (15.39)$$

Se sabe por construcción que C_1' es estrictamente negativo, debido a que al disminuir los recursos remanentes va a aumentar el costo de extracción, por lo tanto:

$$J_{ss} \geq 0 \quad (15.40)$$

Se puede apreciar que J_s es lo que se conoce como el precio sombra del recurso enterrado en la tierra, el cual se comporta igual que la variable de co-estado en el caso determinístico.

Por otra parte, derivando (15.36) respecto a w y teniendo en cuenta que tanto α como σ son funciones de x y w se obtiene:

$$\pi_w + J_s \alpha_w + J_{ss} \sigma_w \sigma + J_x \alpha_w + J_{xx} \sigma_w \sigma + J_t = 0 \quad (15.41)$$

$$-C_2' + J_s \alpha_w + J_{ss} \sigma_w \sigma + J_x \alpha_w + J_{xx} \sigma_w \sigma + J_t = 0 \quad (15.42)$$

$$J_s \alpha_w + J_{ss} \sigma_w \sigma + J_x \alpha_w + J_{xx} \sigma_w \sigma + J_t - C_2' = 0 \quad (15.43)$$

Reemplazando (15.38) en (15.43) se llega a:

$$(P - C_1 + J_x) \alpha_w - C_2' + (J_{ss} + J_{xx}) \sigma_w \sigma + J_t = 0 \quad (15.44)$$

De donde despejando σ se obtiene:

$$\sigma(w, x) = \frac{C_2'(w) - J_t - \alpha_w(w, x)(P - C_1 + J_x)}{(J_{ss} + J_{xx}) \sigma_w(w, x)} \quad (15.45)$$

Al reemplazar (15.38) y (15.45) en (15.36) se obtiene lo siguiente:

$$-C_2 + \alpha(P - C_1) + \frac{J_{ss} \left(\frac{C_2' - J_t - \alpha_w(P - C_1 + J_x)}{(J_{ss} + J_{xx}) \sigma_w} \right)^2}{2} + J_p a P + J_x \alpha + \frac{J_{xx} \left(\frac{C_2' - J_t - \alpha_w(P - C_1 + J_x)}{(J_{ss} + J_{xx}) \sigma_w} \right)^2}{2} + J_t - J r = 0 \quad (15.46)$$

Reordenando y agrupando términos:

$$rJ = \alpha(P - C_1 + J_x) - C_2 + \frac{(C_2' - J_t - \alpha_w(P - C_1 + J_x))^2}{2(J_{SS} + J_{XX})\sigma_w^2} + aPJ_P + J_t \quad (15.47)$$

Nótese que la ecuación (15.47) corresponde a una ecuación diferencial parcial no-lineal para J , la cual tiene una alta complejidad de resolución, por lo que se procede a analizarla por partes. Primero, se estudia la expresión:

$$G(w, x, p, S, C_1, C_2, J_x, t) = \alpha(p - C_1 + J_x) - C_2 \quad (15.48)$$

Si se observa con cuidado, la función definida como G representa los recursos óptimos descubiertos, es decir α , multiplicado por la suma del ingreso marginal y la variación del VAN con respecto a los recursos descubiertos acumulados, a lo que se le resta el costo por exploración. De esta forma G puede considerarse como el beneficio asociado a netamente a la actividad de exploración. Cabe destacar que G debiera ser positivo ya que no tiene sentido explorar si es que los costos por exploración son mayores a los ingresos asociados.

Por otra parte, se considera:

$$F = \frac{(C_2' - J_t - \alpha_w(P - C_1 + J_x))^2}{2(J_{SS} + J_{XX})\sigma_w^2} \quad (15.49)$$

Dado que los términos cuadráticos son estrictamente positivos, por lo tanto, para evaluar si F es positivo o negativo se requiere determinar el signo de $J_{SS} + J_{XX}$. En (15.40) se estableció, sin embargo, que J_{SS} debe ser no-negativo. En cuanto a J_{XX} se debe considerar la forma de J al variar las reservas totales descubiertas. Como se aprecia en la Figura 15.12, que representa una conceptualización de la variación del VAN óptimo con respecto a la tasa de descubrimiento, por lo general las últimas unidades descubiertas aportan menor o igual valor que las primeras, por lo que la concavidad de la curva implicaría que:

$$J_{XX} \leq 0 \quad (15.50)$$

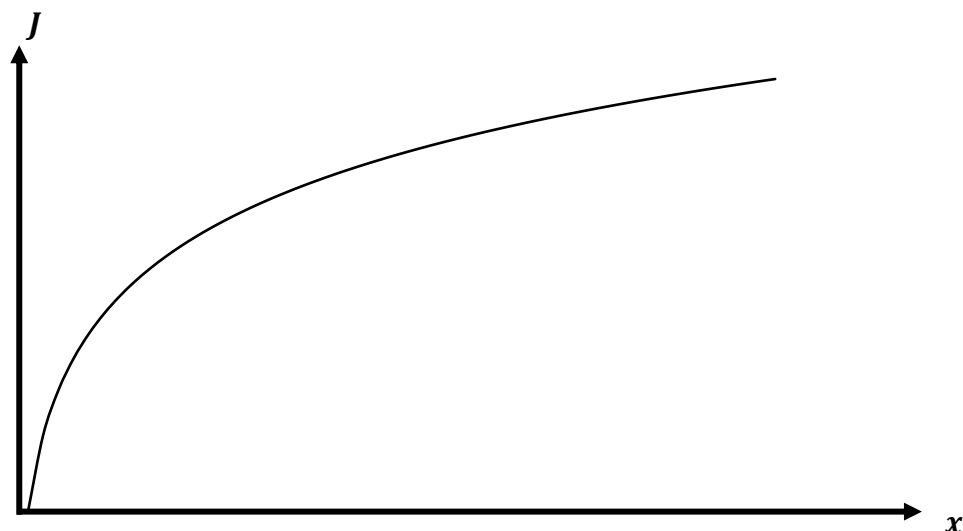


Figura 15.12. Comportamiento *VAN* óptimo (J) versus recursos descubiertos (x)

15.4.3 Análisis del caso determinístico

Al evaluar el caso determinístico, es decir, para $\sigma = 0$, tomando la ecuación (15.36) se obtiene:

$$rJ = \max_{q,w} \left[\pi + J_s(-q + \alpha) + \frac{c_1' \sigma^2}{2} + J_P aP + J_x \alpha + \frac{J_{xx} \sigma^2}{2} + J_t \right] \quad (15.51)$$

Ahora, utilizando (15.38) y (15.51) se obtiene una expresión determinística, donde además desaparece el operador maximizar, ya que (15.38) otorga las restricciones necesarias para que se cumpla la condición de optimalidad:

$$rJ = \alpha(P - C_1 + J_x) - C_2 + J_P aP + J_t \quad (15.52)$$

Al reemplazar utilizando (15.48) se llega a una ecuación del tipo:

$$rJ = G + J_t + J_P aP \quad (15.53)$$

Lo que muestra que la ruta que sigue el *VAN* óptimo depende del beneficio asociado a la exploración sumado a la variación de J respecto al tiempo, y la variación de J respecto al precio. Este resultado tiene sentido ya que en el caso de no haber exploración entonces el *VAN* solo dependería del precio y el tiempo.

15.4.4 Análisis para un *VAN* constante en el tiempo

A continuación se analiza un escenario en que el VAN no varía en el tiempo, es decir, uno donde los precios y los costos son constantes en el tiempo (P , C_1 y C_2 constante). Por lo tanto, en este caso J_t es igual a cero. Al evaluar esto en la ecuación (15.47) se obtiene:

$$rJ = \alpha(P - C_1 + J_x) - C_2 + \frac{(\alpha_w(P - C_1 + J_x))^2}{2(J_{ss} + J_{xx})\sigma_w^2} + aPJ_P \quad (15.54)$$

Se observa que las reservas solo dejan de variar respecto al tiempo, debido a que no se sabe cómo se comporta J con respecto al precio. Por lo tanto, J queda en función de P , x y S .

A su vez, si se considera que J no cambia con respecto al precio la ecuación queda:

$$rJ = \alpha(P - C_1 + J_x) - C_2 + \frac{(\alpha_w(P - C_1 + J_x))^2}{2(J_{ss} + J_{xx})\sigma_w^2} \quad (15.55)$$

Por lo que J solo depende de dos variables, x y S .

15.4.5 Propuesta de resolución

La resolución de una ecuación diferencial parcial no-lineal en general no es resoluble por técnicas algebraicas. Por lo tanto, se propondrá una resolución al desarrollo de la ecuación (15.47) mediante técnicas numéricas.

RECUADRO 15.7

ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES NO-LINEALES

Debido a la existencia de variados problemas físicos y matemáticos que no pueden ser modelados como ecuaciones diferenciales parciales (EDP) lineales se han desarrollado distintos métodos para la resolución de ecuaciones diferenciales parciales no-lineales. Las EDP no-lineales son comunes en el desarrollo y análisis de fenómenos físicos en dinámica de fluidos, dinámica de poblaciones, elasticidad, relatividad y termodinámica (Stan, 2014).

El estudio de las ecuaciones diferenciales parciales no-lineales es muy complejo. En la actualidad existen diversos métodos de resolución de problemas específicos y esta es un área de investigación activa. En la literatura existen distintas formas de análisis para la EDP no-lineales con comportamiento asintótico, en la que se puede considerar la estabilidad de los momentos, estabilidad trayectoria o un decaimiento del tipo exponencial, entre otros. Una técnica conocida para resolver estos tipos de problemas es el método de Lyapunov, siendo una de las herramientas más potentes para resolver

problemas de estabilidad de sistemas diferenciales no-lineales (Garrido, 2002). Otro método conocido para la resolución de los problemas de este tipo son el método de separación de variables en ecuaciones diferenciales parciales que permite reducir el problema original a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (Shingareva y Lizárraga-Celaya, 2010). Desafortunadamente no todas las ecuaciones responden de igual forma a la aplicación de uno u otro método, por lo que termina siendo el método algo específico al tipo de ecuación (existiendo en la práctica una gran mayoría de ecuaciones para las cuales no existe un método conocido). Los métodos numéricos, como las ecuaciones en diferencias finitas o volúmenes finitos, son en general más exitosos porque permiten aproximar la solución de una ecuación diferencial parcial no-lineal en una gran cantidad de casos.

El método utilizado para resolver esta EDP no-lineal es el de diferencias finitas. Este método, permite la resolución aproximada de EDP no-lineal en derivadas parciales definidas en vecindades finitas. Es una expresión matemática de la forma $f(x + b) - f(x + a)$. Si una diferencia finita se divide por $(b - a)$ se obtiene una expresión similar al cociente diferencial, que difiere en que se emplean cantidades finitas en lugar de infinitesimales (William, 1997).

Retomando la ecuación (15.47):

$$rJ = \alpha(P - C_1 + J_x) - C_2 + \frac{(C_2' - J_t - \alpha_w(P - C_1 + J_x))^2}{2(J_{SS} + J_{xx})\sigma_w^2} + aPJ_P + J_t \quad (15.56)$$

A partir de lo anterior, se define el espacio de soluciones finitas para $J(S, P, x, t)$ de la siguiente manera:

$$S \in [0, \bar{S}] \quad (15.57)$$

$$P \in [0, \bar{P}] \quad (15.58)$$

$$x \in [0, \bar{x}] \quad (15.59)$$

$$t \in [0, \bar{t}] \quad (15.60)$$

donde \bar{S} , \bar{P} , \bar{x} y \bar{t} corresponden al valor máximo que van a tomar las variables respectivas.

A continuación, se debe definir el espacio en cantidades finitas pertenecientes al espacio definido anteriormente. Por lo tanto, se tiene que:

$$S_0 = 0 < S_1 < S_2 < \dots < S_n = \bar{S} \quad (15.61)$$

$$P_0 < P_1 < P_2 < \dots < P_n = \bar{P} \quad (15.62)$$

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = \bar{x} \quad (15.63)$$

$$t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = \bar{t} \quad (15.64)$$

A partir de lo anterior, se procede a desarrollar las expresiones J_P , J_x , J_t , J_{SS} y J_{xx} en derivadas finitas.

Para las derivadas de primer orden se considera la definición de derivada de primero orden por la derecha:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+a) - f(x)}{h} \quad (15.65)$$

Por lo tanto, para J_P , J_x y J_t se tiene la siguiente aproximación:

$$J_P \approx \frac{J(S_i, P_{j+1}, x_u, t_v) - J(S_i, P_j, x_u, t_v)}{P_{j+1} - P_j} \quad (15.66)$$

$$J_x \approx \frac{J(S_i, P_j, x_{u+1}, t_v) - J(S_i, P_j, x_u, t_v)}{x_{u+1} - x_u} \quad (15.67)$$

$$J_t \approx \frac{J(S_i, P_j, x_u, t_{v+1}) - J(S_i, P_j, x_u, t_v)}{t_{v+1} - t_v} \quad (15.68)$$

Por otro lado, para las derivadas de segundo orden la definición de derivada a utilizar es:

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \quad (15.69)$$

Para J_{SS} y J_{xx} se tienen las siguientes aproximaciones:

$$J_{SS} \approx \frac{J(S_{i+1}, P_j, x_u, t_v) - 2J(S_i, P_j, x_u, t_v) + J(S_{i-1}, P_j, x_u, t_v)}{(S_{i+1} - S_i)^2} \quad (15.70)$$

$$J_{xx} \approx \frac{J(S_i, P_j, x_{u+1}, t_v) - 2J(S_i, P_j, x_u, t_v) + J(S_i, P_j, x_{u-1}, t_v)}{(x_{u+1} - x_u)^2} \quad (15.71)$$

Luego cada aproximación se reemplaza en (15.56) y se obtiene la expresión para el desarrollo en derivadas finitas de la ecuación. Aunque el desarrollo numérico escapa el alcance de este libro, se recomienda el uso de algún *software* de cálculo científico numérico para dicha resolución (como MATLAB o Python).

15.5 Problemas resueltos

Problema 15.1

Una compañía petrolera acaba de comprar los derechos de explotación y exploración en una zona enmarcada en la cuenca de Los Ángeles, California. Esta compañía busca maximizar el valor generado por la explotación del depósito.

A partir de datos recabados durante los últimos 15 años sobre costos de producción, la evolución de las reservas probadas y los descubrimientos en depósitos similares en la zona, el equipo de ingenieros ha estimado las siguientes funciones relevantes:

$$C_1(S) = \frac{12.000}{S}$$

$$C_2(w) = 0,05 w + 240$$

$$f(w, x) = 1,3 w^{0,6} e^{2,2-0,0003x}$$

Con S y x en millones de barriles, y w el número de pozos perforados y desarrollados año a año. Además, el equipo de analistas de mercado prevé que la producción de este yacimiento enfrentará una demanda relativamente inelástica, de $-0,5$ para un precio de 50 dólares por barril, por lo que plantean una función de demanda igual a:

$$q = 1500 - 10P$$

Parte de la planificación requerida por la compañía corresponde a estimaciones del precio de venta y del esfuerzo exploratorio que será necesario llevar a cabo, durante la vida útil del proyecto. Considerando que la compañía descuenta sus proyectos a una tasa del 5%, se le pide plantear el problema de optimización a resolver por la compañía local (incluyendo restricciones y la naturaleza de las variables) y buscar las trayectorias óptimas del precio y el esfuerzo exploratorio en el tiempo.

Solución

El problema de optimización enfrentado por el productor corresponde a:

$$\max_{q,w} VAN = \max_{q,w} \int_0^{\infty} [Pq - C_1(S)q - C_2(w)]e^{-rt} dt$$

s. a.

$$\dot{S} = \dot{x} - q$$

$$\dot{x} = f(w, x) = 1,3 w^{0,6} e^{2,2-0,0003x}$$

Donde q y w representan la producción y el esfuerzo exploratorio en cada momento, actuando como las variables de control del problema. S y x en tanto corresponden a las reservas y a los descubrimientos acumulados, respectivamente, y se identifican como las variables de estado. Todas las variables son no negativas por la naturaleza del problema de optimización propuesto.

Mediante control óptimo se plantea el Hamiltoniano del problema:

$$H = Pqe^{-rt} - C_1(S)qe^{-rt} - C_2(w)e^{-rt} + \lambda_1[f(w, x) - q] + \lambda_2 f(w, x)$$

Derivando esta expresión respecto a S y a x se tiene el siguiente sistema de ecuaciones dinámicas para λ_1 y λ_2 :

$$\dot{\lambda}_1 = C_1'(S)qe^{-rt}$$

$$\dot{\lambda}_2 = -(\lambda_1 + \lambda_2)f_x$$

Luego, derivando el Hamiltoniano respecto a q se obtiene:

$$H_q = Pe^{-rt} - C_1(S)e^{-rt} - \lambda_1 = 0$$

Diferenciando esta última expresión respecto al tiempo se obtiene la ecuación dinámica que entrega la trayectoria del precio en el tiempo:

$$\dot{P} = rP - rC_1(S) + C_1'(S)f(w, x)$$

Reemplazando con las funciones dadas en el enunciado:

$$\dot{P} = 0,05 \left(P - \frac{12.000}{S} \right) - \frac{15.600}{S^2} w^{0,6} e^{2,2-0,0003x}$$

Para determinar la trayectoria óptima del esfuerzo de exploración, se deriva el Hamiltoniano respecto a w y se iguala a cero:

$$H_w = -C_2'(w)e^{-rt} + (\lambda_1 + \lambda_2)f_w = 0$$

Despejando λ_1 de H_w y sustituyendo en H_q se obtiene la siguiente ecuación:

$$\lambda_2 = \frac{C'_2(w)}{f_w} e^{-rt} - P e^{-rt} + C_1(S) e^{-rt}$$

Con esta expresión y H_q es posible reescribir la ecuación dinámica para $\dot{\lambda}_2$, obteniendo:

$$\dot{\lambda}_2 = -\frac{f_x}{f_w} C'_2(w) e^{-rt}$$

Luego, diferenciando la expresión para λ_2 respecto al tiempo y sustituyendo \dot{S} , \dot{P} y \dot{x} con las expresiones ya encontradas, se obtiene:

$$\dot{\lambda}_2 = \frac{-C'_2(w) f_{wx} f}{(f_w)^2} e^{-rt} - r \frac{C'_2(w)}{f_w} e^{-rt} - C_1(S) q e^{-rt} + \frac{f_w C''_2(w) - C'_2(w) f_{ww}}{(f_w)^2} \dot{w} e^{-rt}$$

Igualando ambas expresiones encontradas para $\dot{\lambda}_2$, para luego despejar \dot{w} , se tiene la trayectoria óptima del esfuerzo de exploración, dada por:

$$\dot{w} = \frac{C'_2(w) \left[\left(\frac{f_{wx}}{f_w} \right) f - f_x + r \right] + C'_1(S) q f_w}{C''_2(w) - C'_2(w) \frac{f_{ww}}{f_w}}$$

Reemplazando con las funciones dadas, se obtiene la expresión requerida:

$$\dot{w} = \frac{S^2 [0,0176 w^{1,4} - 0,00000756 w^2 e^{-0,003x}] - 594,612 q e^{-0,003x}}{0,14035 x S^2 w^{0,4} e^{0,003x}}$$

Problema 15.2

Discuta el impacto en el precio y esfuerzo de producción que significan para la empresa las siguientes condiciones, comparando los casos particulares con el caso base indicado:

- Una función de costo de producción del tipo $C_1(S) = c$, con c constante. El caso base está dado por $C_1(S) = \frac{a}{S}$, con $a > 0$. Interprete esta condición.
- Una función de costo de exploración del tipo $C_2(w) = e^{aw}$, con $a > 0$. El caso base está dado por $C_2(w) = b + cw$, con $b, c > 0$.

c. Una función de descubrimiento del tipo $f(w, x) = we^{-bx}$, con $a, b > 0$. El caso base está dado por $f(w, x) = w^a e^{-bx}$, con $a, b > 0$. Discuta las implicaciones de relajar la desigualdad estricta para b y establecer la naturaleza de esta constante como $b \geq 0$.

Solución

Según lo previamente calculado, se tienen las siguientes expresiones:

$$\dot{P} = rP - rC_1(S) + C_1'(S)f(w, x)$$

$$\dot{w} = \frac{C_2'(w) \left[\left(\frac{f_{wx}}{f_w} \right) f - f_x + r \right] + C_1'(S)qf_w}{C_2''(w) - C_2'(w) \frac{f_{ww}}{f_w}}$$

Correspondientes a las trayectorias de esfuerzo exploratorio y precio respectivamente, se analiza caso a caso.

a. Si la función de costo de exploración es constante, las expresiones anteriormente mencionadas se convierten en:

$$\dot{P} = rP - rC_1(S) \quad \dot{w} = \frac{C_2'(w) \left[\left(\frac{f_{wx}}{f_w} \right) f - f_x + r \right]}{C_2''(w) - C_2'(w) \frac{f_{ww}}{f_w}}$$

Para el esfuerzo en exploración se tiene que el término $C_1'(S)qf_w$ es no-positivo dado que, por la naturaleza de los problemas de exploración y explotación, generalmente $f_w > 0$. Por lo tanto, en el caso propuesto la tasa de aumento del esfuerzo de exploración será igual o mayor, si los demás términos. En cuanto al precio, tendremos que este aumentará a una mayor tasa, dado que ya no existe el término negativo $C_1'(S)f(w, x)$ en la expresión.

Una función de costos de este tipo podría verse durante la producción en régimen de un yacimiento homogéneo de baja potencia, explotando, por ejemplo, carbón.

b. Para la función planteada, la trayectoria del precio no se ve alterada, debido a que no hay una relación directa entre este y la función de costos de exploración. En cuanto al esfuerzo de exploración, se tienen las siguientes expresiones:

$$\dot{w}' = \frac{ae^{aw} \left[\left(\frac{f_{wx}}{f_w} \right) f - f_x + r \right] + C_1'(S)qf_w}{ae^{aw} \left[a - \frac{f_{ww}}{f_w} \right]} \quad \dot{w} = \frac{c \left[\left(\frac{f_{wx}}{f_w} \right) f - f_x + r \right] + C_1'(S)qf_w}{-c \frac{f_{ww}}{f_w}}$$

Donde \dot{w}' corresponde al caso particular y \dot{w} al caso base.

Para el numerador, se tiene que este será mayor siempre que $a > c$.

Para el denominador, en cambio, el signo de la expresión dependerá de la relación entre a y $\frac{f_{ww}}{f_w}$. Si a , es mayor, entonces la tasa de cambio será positiva, mientras que, si es menor, será negativa pero menor en valor absoluto que en el caso base. Si a es igual a $\frac{f_{ww}}{f_w}$, la expresión se indetermina.

Recapitulando, si $a < \frac{f_{ww}}{f_w}$, las tasas tendrán distinto signo, mientras que si $a > \frac{f_{ww}}{f_w}$, las expresiones tendrán el mismo signo, pero el valor absoluto de la tasa para el caso exponencial será menor que en el caso base, y finalmente, si $a > c$, el valor absoluto de la tasa será mayor para el caso particular que para el caso base.

c. Se establecen las expresiones para ambas trayectorias, con \dot{P} y \dot{w} identificando los casos particulares.

$$\dot{P}' = rP - rC_1(S) + C_1'(S)we^{-bx}$$

$$\dot{P} = rP - rC_1(S) + C_1'(S)w^a e^{-bx}$$

$$\dot{w}' = \frac{C_2'(w)r + C_1'(S)qe^{-bx}}{C_2''(w)}$$

$$\dot{w} = \frac{C_2'(w)r + C_1'(S)qaw^{a-1}e^{-bx}}{C_2''(w) - C_2'(w)(a-1)w}$$

Puesto que $C_1(S)$ es decreciente en S , se tiene que la tasa de variación del precio será mayor para el caso particular si $a > 1$, menor al invertir la desigualdad, y las tasas serán equivalentes si $a = 1$.

Para el esfuerzo exploratorio en cambio, se tiene que el denominador de la expresión será mayor para el caso particular si $aw^{a-1} > 1$, menor si la desigualdad se invierte y equivalentes si $aw^{a-1} = 1$.

Para el denominador, en tanto, se puede apreciar que para $a = 1$ ambos casos son equivalentes. Si $C_2(w)$ fuese lineal, la expresión para el caso particular se indetermina. Por el contrario, si dicha función es dos veces diferenciable respecto a w , el caso base tendrá una tasa mayor

siempre que $a > 1$ y $C_2''(w) > C_2'(w)(a - 1)w$. De no cumplirse esta última desigualdad, las tasas tendrán signos distintos.

Si ahora se considera el caso en que $b \geq 0$, se tiene que la expresión para \dot{w} está dada por:

$$\dot{w} = \frac{C_2'(w)r}{C_2''(w) - C_2'(w)\frac{f_{ww}}{f_w}}$$

Y la tasa será mayor que en los dos casos anteriores, puesto que se asume la derivada de $C_1(S)$ respecto a S como menor que cero.

Problema 15.3

Se define un proceso de salto o proceso de Lévy como aquel en el cual el proceso estocástico para una variable x sigue una ecuación diferencial estocástica del tipo:

$$dx = f(x, t)dt + g(x, t)dj$$

Para $f(x, t)$ y $g(x, t)$ funciones conocidas (no aleatorias), donde se cumple que:

$$dj = \begin{cases} 0 & \text{con probabilidad } 1 - \lambda dt \\ u & \text{con probabilidad } \lambda dt \end{cases}$$

Donde λ representa la tasa media de arribo de un evento durante un tiempo infinitesimal dado por dt , y es una constante positiva. Por su parte, u representa el tamaño del salto x de un instante de tiempo a otro.

¿Por qué los procesos de saltos debiesen modelar de forma más razonable los recursos remanentes de un depósito mineral bajo incertidumbre que un proceso de Itô? Fundamente y represente gráficamente cómo se comporta este proceso respecto a uno de Itô

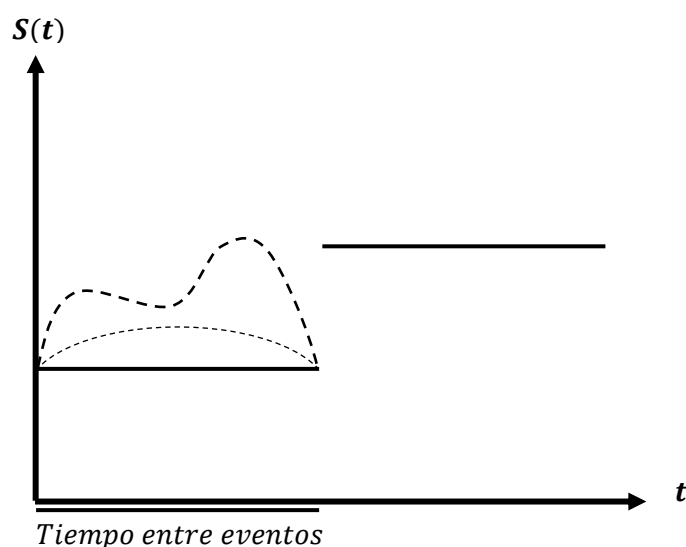
Solución

Un proceso de Lévy sigue una función continua en un determinado intervalo, después del cual presenta un salto discontinuo.

Los procesos de saltos debiesen modelar de manera más realista los recursos remanentes de un depósito mineral bajo incertidumbre, al permitir representar el comportamiento característico

en la secuencia exploración – descubrimiento de recursos. Si se considera solo un proceso de Itô para modelar la tasa de descubrimiento de los recursos remanentes, no se toma en cuenta que en alguna campaña de exploración se puede encontrar una gran cantidad de recursos que significaría un gran salto en la curva representativa de los recursos minerales.

La siguiente figura grafica un proceso de Lévy:



En un determinado intervalo la función es continua y diferenciable, pero al analizar el LOM de la mina se ve que es una función de carácter discontinuo.

Se debe notar que el tiempo entre eventos tiene una distribución exponencial de parámetro λ . Por lo tanto, la probabilidad de ocurrencia de un evento distribuye Poisson con parámetro λ .

Para ejemplificar este proceso de salto, se mostrará uno de los procesos más realistas para modelar cómo se comportan los precios a largo plazo, es decir, un proceso de reversión a la media con saltos. Según Sánchez y Cristián (2011) este proceso se representa por:

$$dp = \eta(\bar{p} - p)dt + \sigma dz + pdq$$

En donde:

$$dq = \begin{cases} 0 & \text{con probabilidad } 1 - \lambda dt \\ \psi - 1 & \text{con probabilidad } \lambda dt \end{cases}$$

Como se puede observar además de la expresión σdz que representa la incertidumbre que tiene el precio en el tiempo, se agrega un pdq en donde el dq sigue un proceso de Poisson, el cuál modela los saltos discontinuos que presentan los precios debido a *shocks* del mercado. De esta

misma forma, para hacer más realista la tasa de descubrimiento vista en la sub-sección 15.5.1 de este capítulo se debería agregar un diferencial de Levy. Al considerar que la tasa de descubrimiento depende tanto del nivel de esfuerzo de exploración w como la cantidad de descubrimiento ya realizado x , la ecuación de estado nos quedaría:

$$dx = \alpha(w, x)dt + \sigma(w, x)dz + g(x, t)dj$$

En donde dj es un diferencial de Levy definido en el enunciado de este problema, y representa los saltos que se pueden generar en exploración. Por lo tanto, los procesos de salto modelan de manera más razonable el aumento de los recursos remanente en vez de solo considerar un proceso de Itô.

Problema 15.4

Suponga que usted trabaja en una empresa minera y es encargado de determinar cuál es el nivel de exploración óptimo de la misma conociendo que la tasa de descubrimientos $\dot{x}(t)$ es función del nivel de esfuerzo en exploración $w(t)$ y de los descubrimientos acumulados $x(t)$, que el precio del metal es $P(t)$, la cantidad extraída $q(t)$, las reservas remanentes $S(t)$, el costo de extracción $C_1(S(t))$, el de exploración $C_2(w(t))$ y la tasa de descuento r .

- a) Plantee y resuelva el problema que maximiza los retornos de la empresa.

Solución

a. El problema es el siguiente:

$$\max_{q, w} \int_0^T [P(t)q(t) - C_1(S(t))q(t) - C_2(w(t))]e^{-rt} dt$$

s. a.

$$\dot{S} = f(w(t), x(t)) - q(t) \quad (1)$$

$$\dot{X} = f(w(t), x(t)) \quad (2)$$

$$S(0), x(0) \text{ dados}$$

Para resolverlo, en primer lugar, se debe plantear el Hamiltoniano:

$$H = P(t)q(t) - C_1(S(t))q(t) - C_2(w(t)) + \lambda_1[f(\cdot) - q(t)] + \lambda_2 f(\cdot)$$

Luego, se debe cumplir lo siguiente:

$$\frac{\delta H}{\delta q} = P(t) - C_1(S(t)) - \lambda_1 = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\delta H}{\delta w} = -C_2'(w(t)) - (\lambda_1 + \lambda_2)f_w = 0$$

$$\dot{\lambda}_1 - r\lambda_1 = -\frac{\delta H}{\delta S} = \dot{p} - C_1'(S(t))q(t)$$

$$\dot{\lambda}_2 - r\lambda_2 = -\frac{\delta \tilde{H}}{\delta x} = -(\lambda_1 + \lambda_2)f_x$$

Si se deriva (3) con respecto al tiempo, se obtiene:

$$\dot{\lambda}_1 = \dot{P} - C_1'(S(t))\dot{S}(t)$$

Reemplazando en las expresiones anteriores:

$$\dot{P} - C_1'(S(t))\dot{S}(t) = r(P - C_1(S(t))) + C_1'(S(t))q(t)$$

$$\dot{P} = r(P - C_1(S(t))) + C_1'(S(t))(q(t) + \dot{S}(t))$$

$$\dot{P} = r(P - C_1(S(t))) + C_1'(S(t))f(\cdot)$$

De aquí, se puede notar que el precio crece más lentamente cuando hay exploración, dado que C_1' es negativo. Luego, si C_1' fuese 0, se podría notar que el precio no se afecta con la exploración, llegando al mismo resultado de la regla Hotelling.

Luego:

$$\lambda_2 = \frac{C_2'(w(t))}{f_w} - (P - C_1(S(t)))$$

Se deriva la expresión con respecto a t :

$$\dot{\lambda}_2 = \frac{C_2''(w(t))f_w - C_2'(w(t))(f_{ww}\dot{w}(t) + f_{wx}\dot{x}(t))}{f_w^2} - \dot{P} + C_1'(S(t))\dot{S}(t) \quad (7')$$

Si se sustituye la expresión para $\dot{\lambda}_2$ se tiene que:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{C_2'}{f_w} f_x$$

De aquí:

$$\dot{\lambda}_2 = r \left(\frac{C_2'}{f_w} - P + C_1 \right) - \frac{C_2'}{f_w} f_x$$

De donde:

$$\frac{C_2''\dot{w}}{f_w} - C_2'f_w^{-2}(f_{ww}\dot{w} + f_{wx}\dot{x}) - r(P - C_1) - f(\cdot)C_1' + C_1'\dot{S}(t) = r \left(\frac{C_2'}{f_w} - P + C_1 \right) - \frac{C_2'}{f_w} f_x$$

$$\begin{aligned} \dot{w} \left(\frac{C_2''}{f_w} - C_2'f_w^{-2}f_{ww} \right) \\ = r \left(\frac{C_2'}{f_w} - P + C_1 \right) - \frac{C_2'}{f_w} f_x + C_2'f_w^{-2}f_{wx}\dot{x} + r(P - C_1) + f(\cdot)C_1' - C_1'\dot{S}(t) \end{aligned}$$

$$\dot{w} = \frac{r \frac{C_2'}{f_w} - \frac{C_2'}{f_w} f_x + C_2'f_w^{-2}f_{wx}\dot{x} + f(\cdot)C_1' - C_1'\dot{S}(t)}{\frac{C_2''}{f_w} - \frac{C_2'f_{ww}}{f_w^2}}$$

$$\dot{w} = \frac{rC_2' - C_2'f_x + \frac{C_2'f_{wx}\dot{x}}{f_w} + f(\cdot)C_1'f_w - C_1'\dot{S}(t)f_w}{C_2'' - \frac{C_2'f_{ww}}{f_w^2}}$$

Capítulo 16: Introducción a las opciones reales

La extracción de los recursos minerales suele estar asociada a diversas fuentes de incertidumbres. Por la naturaleza de su negocio, la industria minera no puede reaccionar con la suficiente rapidez a cambios en las variables que lo afectan, entre ellas: los precios de las materias primas, lo que puede causar retrasos en el calendario previsto de un proyecto, añadir costos no considerados previamente e influir en gran medida en su rentabilidad. Si bien la mayoría de las decisiones no están dentro de un contexto de certidumbre, las decisiones muchas veces se realizan como si lo estuvieran. Tener la capacidad de planificar estas incertidumbres, mediante la incorporación de alternativas flexibles en el diseño del sistema y el desarrollo de una planificación robusta, es cada vez más valorado al momento de pensar en el éxito empresarial a largo plazo. En este capítulo se discute cómo introducir flexibilidad en un proyecto u operación minera. La herramienta teórica para hacer esto se conoce como opciones reales, y corresponde a una metodología que permite precisamente evaluar los proyectos adaptándose a cambios en las condiciones de la operación, sean estas de origen externa o internas, para aprovechar las nuevas oportunidades que se desarrollan durante el ciclo de vida de una mina por medio de ir modificando sus parámetros operacionales. De esta manera, las opciones reales no solo se convierten en una herramienta para amortizar los riesgos, sino que también en una forma de incrementar el valor de la operación.

16.1 Introducción

En la actualidad, la mayoría de las empresas evalúan sus decisiones de inversión en proyectos considerando que estas son realizadas en un ambiente de estabilidad o certidumbre (Calle y Tamayo, 2009). Esto, por medio de la utilización de parámetros obtenidos de pronósticos que reemplazan la incertidumbre, creándose muchas veces la falsa impresión de que el utilizar una estimación (particularmente el valor esperado) dentro del rango factible del parámetro incierto, permite obviar toda fuente de incertidumbre. Sin embargo, la probabilidad de que los pronósticos respondan exactamente al mundo real es muy baja. Aunque el paradigma es que esta incertidumbre destruye valor, lo cierto es que introduce oportunidades que incluso permiten beneficiarse de la misma (Auger y Guzmán, 2010).

A lo largo de este libro se ha argumentado bastante con respecto a tomar decisiones en base al Valor Presente Neto o *VAN*. Según este criterio, una buena decisión será aquella que necesariamente esté asociada a un *VAN* positivo. Es decir, se exige que la retribución futura del proyecto rente al menos la inversión comprometida, a la tasa de rentabilidad exigida por el inversionista (Guzmán, 2011). Para Mascareñas (1999), las principales limitaciones del uso del *VAN* es que este es un método diseñado principalmente para la valorización de bonos sin riesgo, y que su utilización se extendió también para la valorización de proyectos con inversiones reales. Sin embargo, la extensión de esta metodología presenta ciertos supuestos que afectan el resultado obtenido, como:

- Los flujos de caja que promete generar el proyecto se pueden reemplazar por sus valores esperados, tratados como conocidos desde el principio del análisis. Esto implica ignorar cambios en la gestión producto de la contingencia, durante toda la vida del proyecto.
- Asume una tasa de descuento conocida y constante durante toda la vida del proyecto, en circunstancias en que, en realidad, esta varía con el tiempo.
- No considera la variabilidad del precio en el horizonte de tiempo del proyecto.

Existen otros indicadores, como la tasa interna de retorno (TIR), la relación beneficio costo (B/C), o el período de retorno o *payback* (PER), que pueden ser efectivos cuando se trate de un proyecto de inversión (Calle y Tamayo, 2009). Sin embargo, por distintas razones discutidas en la gran mayoría de los libros de finanzas, estos no son representativos y menos lo son cuando el proyecto tiene una componente de flexibilidad (Dixit y Pindyck, 1994).

Bajo un escenario de incertidumbre, es conocido que la regla del *VAN* conlleva a una solución subóptima que es mejorable (Guzmán, 2011). El problema del uso del *VAN* determinístico implica en asumir que el *VAN* evaluado en los valores esperados, tanto de precios, costos, leyes

de mineral, recuperación metalúrgica, etc., es equivalente al valor esperado del VAN, es decir, el valor esperado que se obtiene de la distribución de probabilidad del VAN cuando dichos parámetros se consideran con sus respectivas distribuciones de probabilidad (o procesos estocásticos). Específicamente en minería, esto posee profundas implicancias considerando que, bajo incertidumbre, las empresas deberían decidir en base a la maximización de sus utilidades esperadas, no de la maximización de las utilidades en base a los valores esperados.

16.1.1 Opciones financieras y opciones reales

Las opciones se pueden clasificar estas en dos categorías: las opciones financieras y las opciones reales. La diferencia entre estas depende de las características del activo subyacente, el cual puede ser de tipo financiero o real (es decir, del mundo “físico” y no “financiero”).

En el caso de las opciones financieras, estas incorporan la capacidad de tomar una decisión con respecto a la venta o compra de un activo, dando así al derecho, pero no a la obligación, de comprar o vender una cantidad del activo a un precio fijado anteriormente en una fecha determinada.

Estos instrumentos financieros poseen dos formatos principales (Kodukula y Papudesu, 2006), uno de compra y otro de venta, siendo definidos como:

- Opción de compra (*Call*): Corresponde al derecho que mantiene su poseedor de comprar un activo determinado a un precio previamente pactado, mediante el pago de una prima (que en la práctica permite comprar ese derecho). Este derecho lo ejercerá su propietario siempre y cuando el precio de mercado del activo sea mayor al del precio pactado en la opción.

En la siguiente figura se muestra el comportamiento de pago del tipo *Call*:

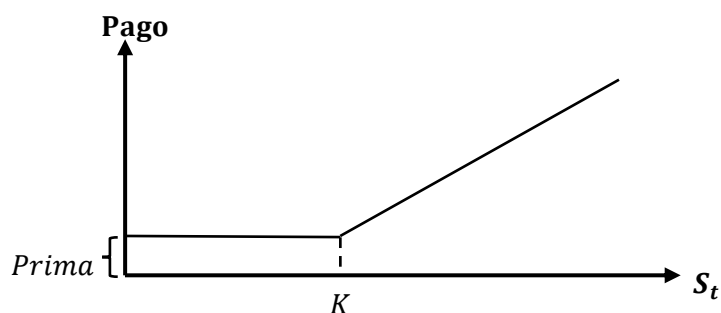


Figura: 16.1. Diagrama de pago de una opción de compra

En este caso, el beneficio del comprador está dado por la máxima diferencia entre la prima pactada y el precio de mercado del activo con el precio de ejercicio pactado:

$$C(T) = \max[-\text{prima}, S_t - K] \quad (16.1)$$

, donde $C(T)$ corresponde al beneficio del comprador de la opción de compra.

- Opción de venta (*Put*): Corresponde al derecho que mantiene su poseedor de vender un activo determinado a un precio previamente pactado, mediante el pago de una prima (que en la práctica permite comprar ese derecho). Este derecho lo ejercerá su propietario siempre y cuando el precio de mercado del activo es menor al del precio pactado en la opción.

En la Figura 16.2 figura se aprecia el diagrama de pago de una *Put*:

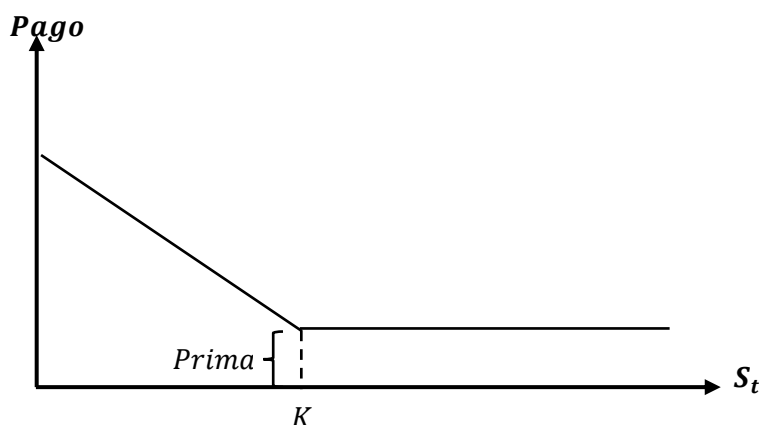


Figura 16.2. Diagrama de pago de una opción de venta

De la figura anterior se puede concluir que el beneficio del comprador de la opción de venta está dado por la máxima diferencia entre la prima pactada y el precio de mercado del activo con el precio de ejercicio pactado, es decir:

$$P(t) = \max[K - S_t, -\text{prima}] \quad (16.2)$$

, donde $P(t)$ es el beneficio del comprador de una opción de venta.

Otra característica de las opciones financieras radica en el momento en el cual se ejecuta la opción, la que genera dos casos extremos:

- Opción Americana: Puede ejercerse durante toda la vida del contrato.

- Opción Europea: Puede ejercerse solo en la fecha de vencimiento del contrato.

Y dentro de los principales parámetros que nos permiten valorar las opciones financieras se encuentran:

- Valor del activo subyacente (S_t): Es el valor del activo a transar al momento de ejercer la opción financiera.
- Volatilidad del activo subyacente (σ): Corresponde a la intensidad de los cambios del valor del activo en un horizonte de tiempo.
- Precio de ejercicio de la opción (K): Precio al que es transado el activo al momento de ejercer la opción.
- Prima: Es el pago que realiza el que adquiere la opción financiera.

El estudio de las opciones financieras se inició a finales de la década de 1960; sin embargo, no fue sino hasta 1973, con la publicación del artículo: *The pricing of options and corporate liabilities* (Black y Scholes, 1973), que las opciones financieras comenzaron a cobrar importancia a nivel mundial. El impacto de dicho estudio fue tan relevante que, en 1997, Myron Scholes ganó el Premio Nobel de Economía, reconocimiento que no fue adjudicado a Fisher Black por haber fallecido dos años antes.

En base al impacto del estudio de Black y Scholes (1973), las compañías comenzaron a cuestionarse la forma de valorizar sus proyectos bajo un contexto de incertidumbre. Primero, debido a que consideraban que los parámetros eran determinísticos y, segundo, porque evaluaban como si estuvieran obligados a realizar los desembolsos sin considerar que las inversiones son derechos y no obligaciones.

RECUADRO 16.1

ECUACIÓN DE BLACK – SCHOLES (1973)

Es una ecuación matemática utilizada para determinar el valor de los activos financieros. Se basa en la teoría de modelos estocásticos, particularmente, en el modelamiento de las variaciones de precio de una Opción Europea como un proceso de Wiener:

$$Call = S\Phi(d_+) - Ke^{-r_d T}\Phi(d_-)$$

$$Put = Ke^{-r_d T}\Phi(-d_-) - S\Phi(-d_+)$$

En donde:

$$d_{\pm} = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + (r_d - r_e \pm \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}$$

- *Call* es el valor de una opción de compra.
- *Put* es el valor de una opción de venta.
- *S* es el precio del activo subyacente en *T*.
- *K* es el precio del mercado de la opción.
- *T* es el tiempo que aún resta por transcurrir para ejercer la opción.
- r_d es la tasa de interés doméstica.
- r_e es la tasa de interés extranjera.
- σ es la tasa de volatilidad de cambio.
- Φ es la función de distribución normal acumulada.

Para los detalles de su derivación se recomienda la revisión de Black y Scholes (1973).

El primer alcance en cuanto a la decisión de cómo invertir en un proyecto real (más que en simples opciones financieras) sujeto a incertidumbre, fue desarrollado también en la década de los 1970 y corresponde a una técnica derivada de la industria financiera llamada opciones reales. El término opción real fue ocupado por primera vez por Steward Myers en un artículo llamado “*Determinants of Corporate Borrowing*” en 1977.

En la industria, el concepto de Opción Real se popularizó cuando Michael J. Mauboussin, gerente de inversiones de *Credit Suisse First Boston*, lo utilizó para explicar la diferencia entre el valor bursátil y el valor intrínseco de sus negocios (Mauboussin, 1999). Desde aquel momento las opciones reales han empezado a cobrar cada vez más importancia, convirtiéndose en una de las principales líneas de investigación en el campo de las finanzas y la economía empresarial en las décadas de 1990 y principios de la década de 2000.⁹⁷

⁹⁷ Como prueba de esto, todos los años se realiza la conferencia *Annual International Conference on Real Options*.

RECUADRO 16.2

STEWART MYERS

Stewart Myers es profesor emérito de La Escuela de Administración y Dirección de Empresas Sloan del MIT. Su libro *Principles of Corporate Finance* es conocido como la “biblia” de la administración financiera. Sus investigaciones se centran en la valoración real y financiera de activos, finanzas corporativas y aspectos financieros de regulación de negocios. Introdujo el *trade-off* y *pecking order theories* a la estructura de capital y fue el primero en reconocer la importancia de las opciones reales en finanzas corporativas

Myers ha influenciado investigaciones sobre Valor Presente Ajustado (APV), regulación de la tasa de retorno, localización de capital y manejo de riesgo en la banca y seguros, opciones reales, políticas de pagos, riesgos morales y problemas de información en decisiones financieras.

El artículo donde hace mención por primera vez al término de opciones reales se llama *Determinants of Corporate Borrowing*, y allí se aplica la teoría de opciones en la valorización de bienes no financieros. Específicamente, estudia la inversión en activos reales que presentan un componente de flexibilidad, tal como la inversión en investigación y desarrollo y en la expansión de plantas de manufactura (Calle y Tamayo, 2009), en el cual plantea básicamente lo siguiente:

$$V = V_A + V_B$$

En donde V es el valor de mercado de una firma, V_A es el valor de los activos actuales puestos por el mercado y V_G es el valor presente de las futuras inversiones.

Las similitudes entre las opciones financieras y las opciones reales se pueden ver en la siguiente tabla:

Tabla 16.1. Diferencias entre opciones reales y opciones financieras. Fuente: Kodukula y Papudesu (2006).

En general, una Opción Real tiene las siguientes características:

	OPCIÓN FINANCIERA	OPCIÓN REAL
Precio opción	Precio a pagar para adquirir la opción, el cual es fijado por el mercado	Precio a pagar para adquirir o crear la opción, mantenerla o disminuir la incertidumbre. El precio de la opción no es fijo (negociable)
Precio de ejercicio	Precio a pagar para comprar/vender el activo subyacente. Valor definido por contrato	Costo de comprar/vender el activo subyacente real
Fecha de vencimiento	Definida en las condiciones del contrato	Conocida en algunos casos y en otras no
Poseedor del control del valor de la opción	Nadie	Apropiada gestión puede aumentar el valor de la opción
Valor de la opción en función de la fecha de vencimiento	Mayor valor a mayor vida de la opción	Mayor valor a mayor vida de la opción
Valor de la opción en función de la volatilidad del activo subyacente	Aumenta	Aumenta
Determinación de la incertidumbre	Automáticamente con el vencimiento de la opción	A medida que pasa el tiempo. Muchas veces quien adquiere la opción debe invertir para disminuir la incertidumbre
Liquidación y transacción de la opción	Comúnmente en mercados financieros	En la mayoría de los casos no es transable ni liquidable
Racionalidad detrás de la decisión de ejercer	Altamente racional, dependiente de la diferencia numérica en valor entre el precio del ejercicio y el valor actual del activo subyacente	La decisión puede incorporar implicancias políticas y emocionales (Ej. abandono de un proyecto)

- Es un escenario de inversiones irreversibles en las que existen incertidumbres relevantes y es posible desarrollar opciones, siendo sensible al hecho de esperar por más información.
- Ser un derecho y no una obligación.
- Son valiosas cuando el valor puede estar asociado a futuros crecimientos en vez de escenarios actuales de flujos efectivos (Calle, 2009).
- Son valiosas cuando existen inversiones contingentes, actualización de proyectos y correcciones estratégicas.

- Cuando la incertidumbre es bastante alta como para tomar la flexibilidad en consideración, solo el enfoque de las opciones reales puede corregir el valor de las inversiones en flexibilidad.

RECUADRO 16.3

TALES DE MILETO: EL USO MÁS ANTIGUO DE UNA OPCIÓN REAL

Tales de Mileto (624 a.c. – 546 a.c.) fue un filósofo, matemático, geómetra, físico y legislador griego. Se le consideraba uno de los Siete Sabios de Grecia y se le atribuye la enunciación de los dos teoremas geométricos que llevan su nombre.

El ejemplo más antiguo del ejercicio de una opción real fue cuando Tales, cansado de las murmuraciones de personas que no creían en su intelecto debido a su pobreza, se hizo rico, gracias a su gran conocimiento en astronomía y su interés por la botánica. A partir de la observación de las estrellas predijo que la cosecha de la próxima temporada sería óptima, y compró el derecho de arrendar todas las prensas de aceite de oliva de Mileto y Quíos. En el caso de que su predicción fuera correcta, él se encontraría en la posición de monopolio de prensado de aceite.

Esto corresponde a una opción real, ya que en el caso de que no hubiera una buena cosecha, la demanda por prensas no sería alta, y Tales perdería todo el depósito ya realizado. En el caso de que la cosecha fuera óptima, podría ejercer su derecho y arrendar las prensas a un mayor precio que lo inusual. En este sentido, no estaba obligado a ejercer el derecho de utilizar las prensas de olivos. Finalmente, llegado el día de la cosecha, la predicción de Tales fue acertada, quién algún día habituado a la pobreza y quién había calculado la altura de las pirámides, se volvió rico.

16.1.2 Métodos de evaluación de opciones reales

Tres grandes grupos de metodologías son posibles de implementar para evaluar el valor de las opciones reales. Estos grupos son los siguientes (Rudloff, 2013):

- Ecuaciones diferenciales parciales: consiste en resolver una ecuación diferencial parcial con condiciones de borde. Dentro de este tipo de ecuaciones, la más común es la propuesta por Black y Scholes (1973). Para la resolución de los diferentes métodos de ecuaciones diferenciales parciales que permiten calcular el valor de una opción destacan

las aproximaciones y soluciones analíticas, y las soluciones numéricas a través de diferencias finitas.

- Simulaciones: el método de simulaciones para resolver problemas de opciones reales es similar a la técnica de Monte Carlo usada en el análisis de flujos descontados. Consiste en la realización de simulaciones sobre posibles caminos que pueda seguir el activo subyacente durante la vida del proyecto. De este modo se forma un cono de incertidumbre definido por el conjunto de posibles caminos que pueda llevar al proyecto dada la incertidumbre, como se observa a continuación:

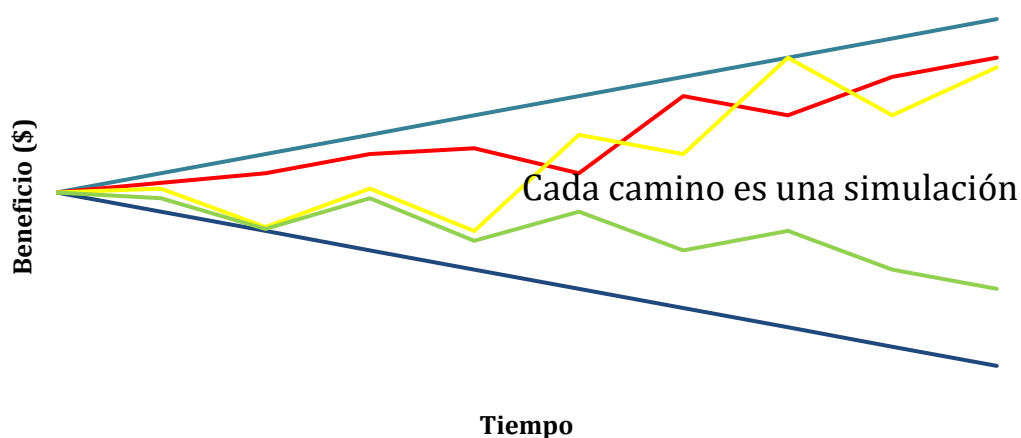


Figura 16.3. Simulaciones. Fuente: Rudloff (2013)

- Cuadrícula o red: este método consiste en la construcción de un enrejado, el cual tiene la posible evolución de los flujos futuros durante toda la vida del proyecto. La solución óptima del problema se obtiene a partir de la optimización de las futuras decisiones. Existen varios métodos de cuadrícula, donde el uso de cada uno depende en la cantidad de factores de caída y crecimiento que afectan a cada uno de ellos, aumentando considerablemente la cantidad de posibles escenarios futuros. Los métodos para resolver redes bajo estas condiciones son: binomial, trinomial, cuatrinomial y multinomial en general.

MODELO BINOMIAL

En 1979, Cox, Ross y Rubinstein crearon el modelo binomial para evaluar opciones reales en proyectos en tiempo discreto. En estos, el valor del proyecto solo puede tomar dos valores posibles en cada período: uno al alza y otro a la baja, con probabilidades p y $(1 - p)$, respectivamente, donde p corresponde a la probabilidad de aversión al riesgo, dada por:

$$r = p * r^+ + (1 - p) * r^-$$

Donde r es la tasa libre de riesgo, r^+ es la rentabilidad en el caso optimista y r^- es la rentabilidad en el caso pesimista (Cox *et al.*, 1979).

16.1.3 Caracterización de las inversiones en minería

La actividad minera contempla una amplia gama de inversiones, entendiendo estas como el acto de incurrir en un costo inmediato con la expectativa de obtener una retribución a futuro. Las inversiones forman parte tanto de proyectos *greenfields*, o nuevos proyectos, como de proyectos *brownfields*, o expansiones de las faenas en actual operación. Incluso, el reemplazo de equipos o la automatización de los procesos de la industria son inversiones y aunque su uso es menos común, las inversiones que involucran optimizaciones en la mina se refieren como *redfields*.

A pesar de la amplia gama de inversiones a considerar, la inversión bajo incertidumbre tiene como foco principal todas aquellas inversiones que generan un cambio en las reservas de la mina. Este foco se adopta, principalmente, por el alto monto de capital involucrado en la decisión, pero también debido a las cuatro grandes características de las inversiones que de acuerdo a Guzmán (2011) vienen dadas por:

- **Irreversibilidad:** Las inversiones son consideradas como irreversibles, es decir, una vez realizada la inversión, esta pasa a ser un costo hundido. Es decir, cuando una mina ya se ha construido, su VAN ya no tiene en consideración la inversión. A modo de ejemplo, en el caso de que la empresa quisiera vender la faena, la inversión materializada no sería recuperada, pues el valor de la mina estará dado sólo por el valor de los flujos de caja a futuro. La inversión es específica de la localización de

la mina, por lo que es imposible el traslado de una planta o galería de una faena a otra, lo que explica la irreversibilidad de la inversión en minería.⁹⁸

- **Opcionalidad:** La segunda característica se refiere a considerar la inversión como una opción. Con esto, la empresa tiene el derecho, pero no la obligación, a invertir. En la práctica, aunque generalmente este es el caso de los proyectos mineros, en algunas ocasiones las compañías se ven obligadas a invertir pues de lo contrario arriesgan perder los permisos de explotación o ambientales.
- **Incertidumbre:** considera que la inversión tiende a realizarse en un contexto de incertidumbre. Dado que muchos de los parámetros en minería son inciertos, es prácticamente imposible conocer *a priori* los ingresos y retribuciones futuras que generará el proyecto. Esto, debido a que tanto los precios de los *commodities* minerales como los costos de los insumos de producción, además de la producción misma, son inciertos en mayor o menor grado. En la práctica, estas variables inciertas son estimadas en la etapa de ingeniería de factibilidad, como última etapa, previo a la construcción de un proyecto, lo que permite valorizar la inversión. Sin embargo, la desviación respecto al valor pronosticado puede llegar hasta un 50%, lo que mantiene prácticamente a todas las variables del proyecto sujetas a algún grado de variabilidad en la vida real.
- **Largos ciclos de inversión:** Una de las características de las inversiones en minería son los largos ciclos asociados a la inversión,⁹⁹ entendido como aquel tiempo que toma desde que se inicia la inversión hasta que se empieza a recibir la retribución, debido al largo tiempo de construcción y preparación de las instalaciones.

Al momento de evaluar el valor de las inversiones en minería se hace necesario por tanto reconocer todos los factores anteriores. Los primeros tres obligan al tomador de decisiones a utilizar opciones reales para tal fin. Por su parte, el cuarto factor robustece la necesidad de utilizar opciones reales pues es posible que entre el momento que se toma la decisión de invertir

⁹⁸ Aunque en la vida real es posible vender los equipos mina en mercados especializados de segunda mano (no disponible, sin embargo, en todos los países), y la infraestructura de la planta como chatarra o tal vez una que otra pieza específica, lo cierto es que el porcentaje de la inversión realizada, que es posible recuperar, es mínimo.

⁹⁹ Este suele ser el caso también de industrias de recursos renovables, tales como la forestal y en el caso de algunos productos agrícolas que requieren años antes de alcanzar plena producción.

y el momento en que se empiezan a obtener los frutos de dicha inversión, gran parte de los supuestos considerados en la evaluación queden obsoletos.

16.2 Opciones reales en minería

Las primeras aplicaciones teóricas de las opciones reales en minería datan de fines de la década de 1970, no obstante, la primera gran aplicación teórica específica a la industria minera fue publicada por Brennan y Schwartz en 1985 y académicamente, se ha utilizado por más de 30 años en la literatura financiera, donde se considera hoy en día uno de los artículos clásicos de esta disciplina.

Por su parte, en la práctica las primeras aplicaciones de esta metodología en proyectos reales de la industria comenzaron en la década de 1990, pero siempre desde una perspectiva en la cual se valoraba el proyecto como si fuese una caja negra, más que introducir la metodología dentro de la complejidad propia del proyecto. Evidentemente este *approach* fue un fracaso y el autor de este libro pudo comprobar en persona como la simple introducción de fórmulas matemáticas en el VAN calculado del proyecto sin opciones (típicamente por medio de las fórmulas derivadas de la ecuación de Black y Scholes) causó un inmenso daño a la reputación de la metodología de las opciones reales en la industria minera.

Las primeras empresas en incorporar el valor de las opciones fueron aquellas que tenían un alto nivel de incertidumbre, como las empresas petroleras (British Petroleum) y farmacéuticas (Merck), dado que, por la naturaleza de sus procesos, poseen una etapa de investigación (exploración en el caso del petróleo) y, dependiendo de los resultados de esta etapa se procede con una expansión o abandono del proyecto original.

En la actualidad, las empresas mineras están haciendo más uso de la evaluación de proyectos mineros por medio de opciones reales. Tal vez el principal indicador de eso sea una encuesta realizada en Chile por GEM entre los años 2011 y 2013, a profesionales de distintas empresas (según la distribución que se detalla en la Figura 16.4).

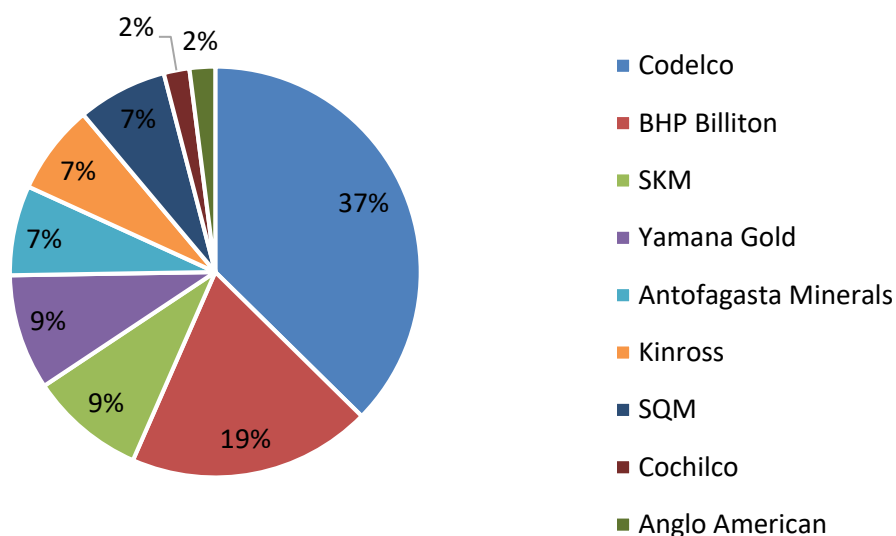


Figura 16.4. Uso de opciones reales en Empresas Mineras en Chile. Fuente: GEM (2013)

En esta encuesta se les preguntó a los profesionales acerca de las razones de por qué habían ocupado opciones reales para evaluar proyectos mineros en sus empresas, cuando este había sido el caso. Las razones se resumen en la Tabla 16.2 a continuación.

Tabla 16.2. Orden de importancia de las razones por las cuales ocuparon opciones reales por parte de las empresas que las aplicaron. Fuente: GEM (2013).

	RAZÓN DE USO	IMPORTANCIA ALTA/MODERADA
1	Proporciona una herramienta de gestión para ayudar a formar la visión estratégica	100,0%
2	Incorpora la flexibilidad de la gestión en el análisis	91,7%
3	Proporciona una manera de pensar la incertidumbre y su efecto sobre la valoración con el tiempo	83,3%
4	Proporciona una herramienta de análisis para hacer frente a la incertidumbre	83,3%
5	Complementa las técnicas tradicionales de inversión de capital	75,0%
6	Proporciona una ventaja competitiva a largo plazo a través de una mejor toma de decisiones	66,7%

Por su parte, cuando se les pregunta a los profesionales las razones de por qué no se habían aplicado opciones reales en la evaluación de sus proyectos de inversión (Tabla 16.3), las dos principales son la falta de experiencia tanto del equipo evaluador como de los directivos que deben tomar decisiones con estas evaluaciones.

Tabla 16.3. Razones por las cuales no se utilizaron opciones reales por parte empresas que no las aplicaron.

Fuente: GEM (2013)

	RAZÓN DE USO	IMPORTANCIA ALTA/MODERADA
1	Falta de experiencia o conocimiento de quienes toman las decisiones de inversión	91,2%
2	Falta de experiencia o conocimiento del equipo que realiza las evaluaciones	85,3%
3	Poco soporte organizacional para implementar modelos de opciones reales	64,7%
4	Dificultad para estimar parámetros (<i>inputs</i>)	52,9%
5	Requiere muchos recursos internos	50,0%
6	Complejo de aplicar	47,1%
7	No existe en el mercado apoyo profesional competente en el área	38,2%
8	Baja aplicabilidad al negocio	23,5%
9	Requiere supuestos poco realistas	17,6%
10	No ayuda a los gerentes a tomar mejores decisiones	8,8%

La mayoría de las veces en minería se toman decisiones de inversión que poseen opciones implícitas; sin embargo, es frecuente se asuma que durante la evaluación que dicha opcionalidad no existe. Un ejemplo clásico es la propia opción de invertir en un proyecto versus esperar e invertir en un tiempo posterior.

La metodología de las opciones reales modifica el proceso de toma de decisiones porque incorpora más información y reconoce que en la práctica los proyectos se resuelven dinámicamente en el tiempo, de forma tal que las decisiones no se toman todas al inicio del proyecto y para siempre, sino que se van ejecutando de forma contingente, es decir, en la medida que la calidad de la información va mejorando.

Un ejemplo representativo para los problemas de opciones reales en minería corresponde a la decisión con respecto a la capacidad de planta. Para ejemplificar esto considérese una planta del tipo concentradora, que cuenta con dos principales alternativas de inversión en cuanto a su capacidad:

- 60 ktpd durante todo el horizonte de tiempo.
- 60 ktpd los primeros nueve años, expandiendo la capacidad a 100 ktpd desde el año 10.

Es común que estas alternativas se sometan a una evaluación de ingeniería y que se escoja como mejor alternativa aquella que representa un mayor valor (típicamente *VAN*) para la empresa. Sin embargo, entendiendo que este tipo de inversiones se realiza en un contexto de incertidumbre, que la inversión es un derecho y no una obligación y que además es altamente irreversible, existe una alternativa intermedia entre ambas alternativas que tiende a ser obviada en las evaluaciones económicas tradicionales, pero que en los últimos años ha cobrado relevancia. Esta corresponde precisamente a la introducción de una opción real.

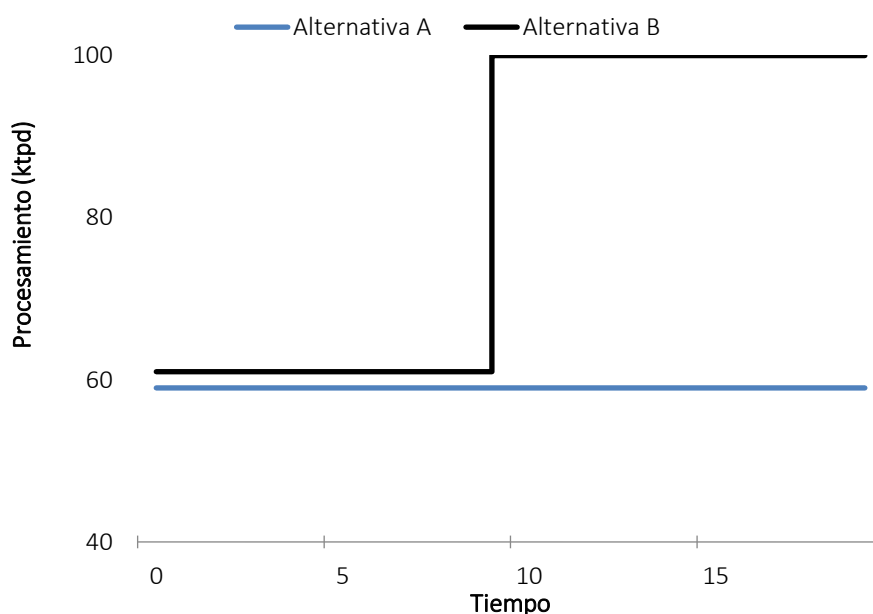


Figura 16.5. Ejemplo opción real de crecimiento

Para entender esta tercera alternativa de inversión en capacidad de planta considérese la Figura 16.5. En este se presentan dos alternativas (A y B) que dan cuenta de que en un inicio la capacidad de planta sería de 60 ktpd, pero en el año 10 o bien se mantiene la capacidad de planta (A) o aumenta a 100 ktpd (B). La decisión de ejercer o no la opción de crecimiento habría que tomarla algunos años antes del periodo en el cual la expansión de planta se

materializa (la cantidad de tiempo en general está asociado al periodo de construcción y permisos asociados). El ejercicio de dicha opción se realizará únicamente si se determina la conveniencia de hacerlo, lo que en general podrá realizarse con un nivel de confianza mayor mientras más avanzado se encuentre el tiempo.

Para ilustrar cómo el tiempo influye en la decisión supóngase que toda la fuente de incertidumbre proviniera de la ley del mineral. En el año 0, existiría un cierto nivel de información (basada en los sondeos y campañas de exploración realizadas en el pasado). El que el tiempo avance permite entre otras cosas invertir en nuevas campañas de sondeos, para reducir así el nivel de incertidumbre en las leyes.¹⁰⁰ Por lo tanto, la idea de incorporar una opción de expansión en este caso busca precisamente dejar abierta la posibilidad de expandirse hasta el momento en que se tenga la mayor cantidad de información actualizada. Por tanto, si en el momento de evaluar el proyecto nuevamente (con la información adicional que se cuenta), la inversión no resulta conveniente, simplemente no se ejerce la opción.

16.2.1 Cono de Incertidumbre

Para entender mejor la situación en la que se encuentra el inversionista en el presente se observa en la Figura 16.6 un cono en dos dimensiones que ilustra la variación del valor de un proyecto con respecto a la incertidumbre de las variables en el tiempo, ya que a medida que se obtiene mayor información del proyecto, el valor del mismo podría aumentar o disminuir. En esta figura se observa que la brecha entre el mejor y el menor valor en el futuro corresponde al rango de posibles valores futuros para el proyecto. En un instante de tiempo futuro, el valor de este podría tomar cualquier valor dentro del rango así establecido. Este gráfico se conoce como “cono de incertidumbre”, y de él se desprende que mientras más a futuro se realice el pronóstico, mayor será el nivel de incertidumbre que se tenga sobre el valor del proyecto.

¹⁰⁰ Debe notarse que el solo hecho de que avance el tiempo no reduce esta incertidumbre, sino que más bien general la posibilidad de reducirla. Existen otras fuentes de incertidumbre que sí pueden resolverse al pasar el tiempo (como el precio de los *commodities*).

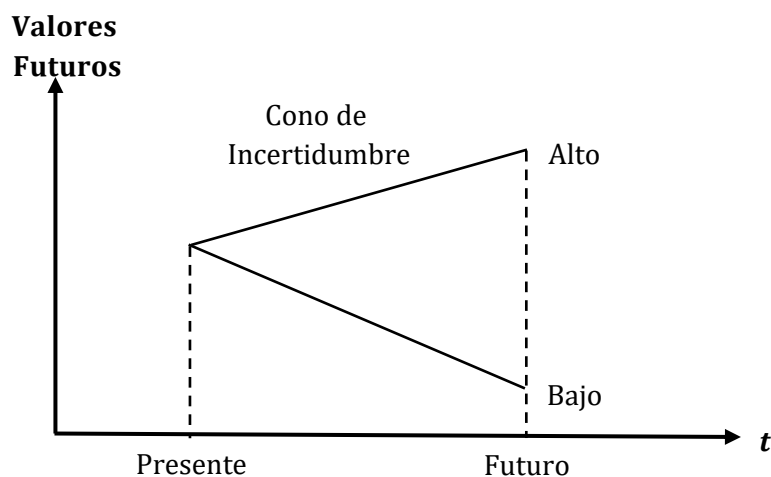


Figura 16.6. Cono de incertidumbre. Fuente: Guzmán (2011)

Al momento de evaluar un proyecto minero, cabe preguntarse cuáles son las fuentes de incertidumbres más relevantes que explican la apertura del cono de incertidumbre, y cuáles son las opciones que existen para hacer frente a estas incertidumbres. En la práctica ocurre que en general no hay más que un número limitado de incertidumbres que afectan significativamente al cono de incertidumbre.¹⁰¹ En particular, típicamente dos o tres incertidumbres explican el 80% de la apertura angular del cono.

Ahora bien, cuando se añade una opción o un conjunto de opciones a la valoración del proyecto, lo que sucede es que el cono de incertidumbre gira en sentido sinistrorso (contrario a las agujas del reloj) y en algunos casos, disminuye el ángulo de apertura, como sucede en la Figura 16.7.

¹⁰¹ El autor ha podido comprobar que en general no más de 10 fuentes de incertidumbres son en general suficientes para explicar la variabilidad en los proyectos mineros *greenfields* y *brownfields*.

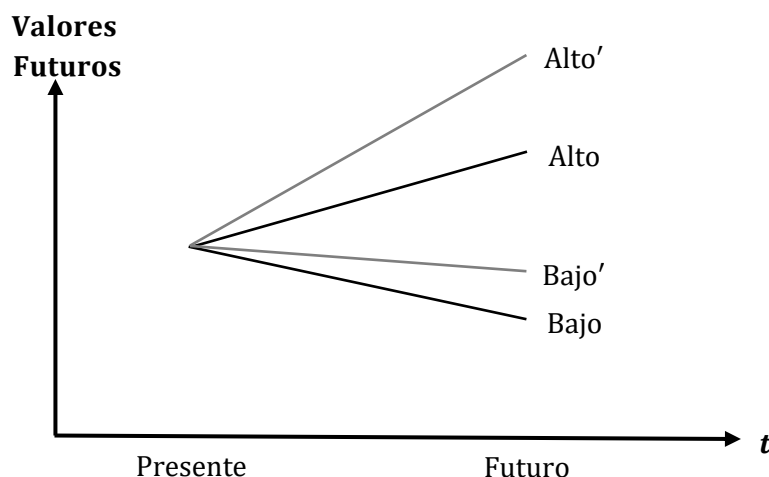


Figura 16.7. Variación del cono de incertidumbre sin y con opción. Fuente: Guzmán (2011)

Como se aprecia en la Figura 16.8 el efecto de girar el cono de incertidumbre mueve la distribución del valor del proyecto hacia la derecha, es decir, a valores mayores, mientras que una disminución del ángulo de apertura estrecha la distribución y, por consiguiente, la varianza de la distribución del valor del proyecto también disminuye.

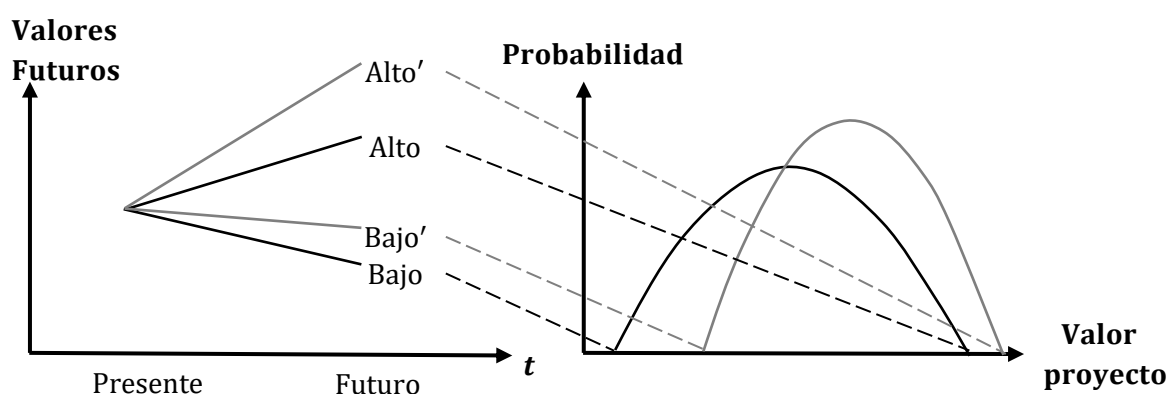


Figura 16.8. Efecto de introducir una opción en el cono de incertidumbre en el valor del proyecto. Fuente: Guzmán (2011)

Fuente: Guzmán (2011)

El valor de una opción dependerá de cuánto se modifique el cono de incertidumbre en base a las fuentes de incertidumbre consideradas y, por tanto, se tendrá un mayor número de opciones a medida que el ángulo de apertura sea mayor y viceversa.

16.2.2 Cuantificación de Incertidumbre

Una vez que se han identificado las incertidumbres relevantes para la evaluación del proyecto, se hace necesaria la cuantificación de estas. Los métodos más utilizados para cuantificar las

incertidumbres se basan en el uso de la teoría de las probabilidades. Uno de los factores que explica por qué sigue siendo la técnica más usada para cuantificar incertidumbres se explica en el Teorema de Cox, el cual establece que siempre será posible encontrar una probabilidad asociada a cada posible evento futuro si se amplía el rango de supuestos asociados (Cox, 1946).

En cuanto a la cuantificación de las incertidumbres estas se diferencian en dos tipos de probabilidades: objetiva y subjetiva. Como expone Guzmán (2011), las cuantificaciones objetivas generalmente consisten en realizar un análisis estadístico para determinar el histograma de frecuencia, y a partir de éste estimar de alguna forma la distribución de probabilidades y parámetros del proceso aleatorio que está detrás de dicha incertidumbre. Por otro lado, la probabilidad subjetiva o bayesiana mide el estado actual de conocimiento al momento en que se evalúan las probabilidades basadas en criterios, creencias y juicios expertos. Esta probabilidad es utilizada comúnmente para expresar incertidumbre de carácter aleatoria (intrínseca, y no de conocimiento o epistémica).

A diferencia de la probabilidad objetiva, la probabilidad bayesiana depende de quién realiza la estimación, lo que debe verse como una oportunidad en el sentido de utilizar el juicio de los expertos en evaluación económica, planificación y geociencias. A pesar de la diferencia, ambas logran ser consistentes a los axiomas de la teoría de las probabilidades. Pese a que en la mayoría de los casos será posible efectivamente derivar una distribución de probabilidades o proceso estocástico para describir una incertidumbre, hay casos en los que no es posible por no existir un proceso probabilístico subyacente a la incertidumbre.

16.2.3 Opciones reales en proyectos mineros

Los proyectos mineros suelen presentar (en teoría al menos) economías de escala en cuanto a los costos de extracción, procesamiento y/o *marketing*. Adicionalmente, existe un paradigma respecto a que el negocio minero también posee economías de escala en cuanto a las inversiones. En conjunto con las economías en costos este último ha justificado el que la mayoría de los proyectos mineros tiendan a seleccionar una gran capacidad, lo que se acentuó en el periodo 2005-2012, y en particular en la industria del cobre.

Mientras que los proyectos de la gran minería reducen los costos unitarios y mejoran la productividad, los proyectos más pequeños también poseen ventajas comparativas en cuanto a la incertidumbre, que se refiere a la capacidad que poseen estos planes de adaptarse a los cambios en las incertidumbres estratégicas que posee. Dado que el estudio de este beneficio

incorpora incertidumbre, la cuantificación de este comúnmente no se considera en el valor del proyecto (Humphreys, 1996).

Típicamente, las opciones reales que se han estudiado en la literatura para el caso de la explotación de minas son de dos tipos: opciones de exploración y opciones de desarrollo o expansión.

De hecho, si se piensa en la exploración o en las etapas de ingeniería como opciones reales, no es difícil ver que estas etapas no hacen más que modificar la exposición al riesgo de los proyectos. Por ejemplo, al momento de iniciar la exploración de una mina, el gasto en recursos es mucho menos intensivo que el de las etapas posteriores de exploración. Lo mismo ocurre con la ingeniería de perfil donde, de una etapa de prefactibilidad, por ejemplo, es posible llegar a una etapa de factibilidad. En órdenes de magnitud, sin embargo, típicamente pasar de una etapa a la siguiente implica un aumento de alrededor de 10 veces las inversiones en estudios. Pero se llega a la última etapa (ya sea en exploración o estudios) sí y sólo sí las etapas anteriores así lo validan como algo conveniente a realizar.

Por lo tanto, cuando se explora dentro del contexto de un proyecto, lo que realmente se está haciendo es aplicar opciones reales, pues se busca con esto modificar la exposición al riesgo del proyecto. Esto se explica mediante el cono de incertidumbre: a medida que se invierte en exploración, la incertidumbre geológica disminuye, al igual que el ángulo de apertura del cono de incertidumbre y, por ende, se reduce el riesgo de la inversión. Desde este punto de vista, la inversión en exploración en general se considera muy valiosa en los proyectos mineros (cuando el nivel de incertidumbre asociado al reconocimiento del mineral es alto).

En general, en la industria minera la decisión de invertir en exploración se realiza más bien por criterios técnicos que económicos; sin embargo, muchas empresas usan el concepto de “valor de la información”, que implícitamente corresponde al “valor de la opción” en exploración. A pesar de que la opción de exploración se describe como la inversión en sondajes, análisis de laboratorio y modelamiento para mejorar la calidad de la información geológica, cabe señalar que cualquier inversión que busque reducir o eliminar alguna incertidumbre, tales como pruebas metalúrgicas o ingeniería de perfil, será equivalente a la inversión en exploración y, por tanto, tendrá un gran potencial de ser valiosa para el proyecto.

Otra opción que se aplica bastante es la opción en desarrollo, o comúnmente conocida como “inversión de crecimiento” o “inversión de expansión”. Esta consiste en modularizar la

inversión. Así, por ejemplo, al iniciar la producción con un primer módulo de concentración y estudiar una posible expansión de planta, muchas veces se tendrá la alternativa de postergar esta decisión para esperar así mejores condiciones de mercado, más pruebas metalúrgicas para asegurar que la recuperación sea la esperada o mejorar el nivel de conocimiento en algún otro nivel de información.

En el artículo de Savolainen (2016) se revisa en extenso todas las opciones estudiadas en la literatura y que han sido aplicadas a la industria minera. Debido a lo numeroso de las opciones, este autor clasifica las opciones reales en minería de acuerdo a dos grupos principales:

- Opciones reales *sobre el proyecto*: Estas se refieren a la flexibilidad inherente en inversiones secuenciales. En general existirán una serie de opciones secuenciales antes de que la mina pueda empezar su explotación de mineral, tales como la exploración, estudios metalúrgicos y otros estudios ingenieriles y económicos.
- Opciones reales *en el proyecto*: Estas se refieren a la flexibilidad disponible de parte de la administración del proyecto para hacer frente durante la ejecución del mismo a las múltiples fuentes de incertidumbres externas o internas que se tengan.

En este sentido, una mina tiene un alto potencial para ser evaluada con aplicación de opciones reales. En la Figura 16.9 se reproducen las opciones presentes, de acuerdo a Savolainen (2016), que un proyecto minero podría presentar en función del tiempo y de la etapa de la ingeniería en la que se encuentra el proyecto.

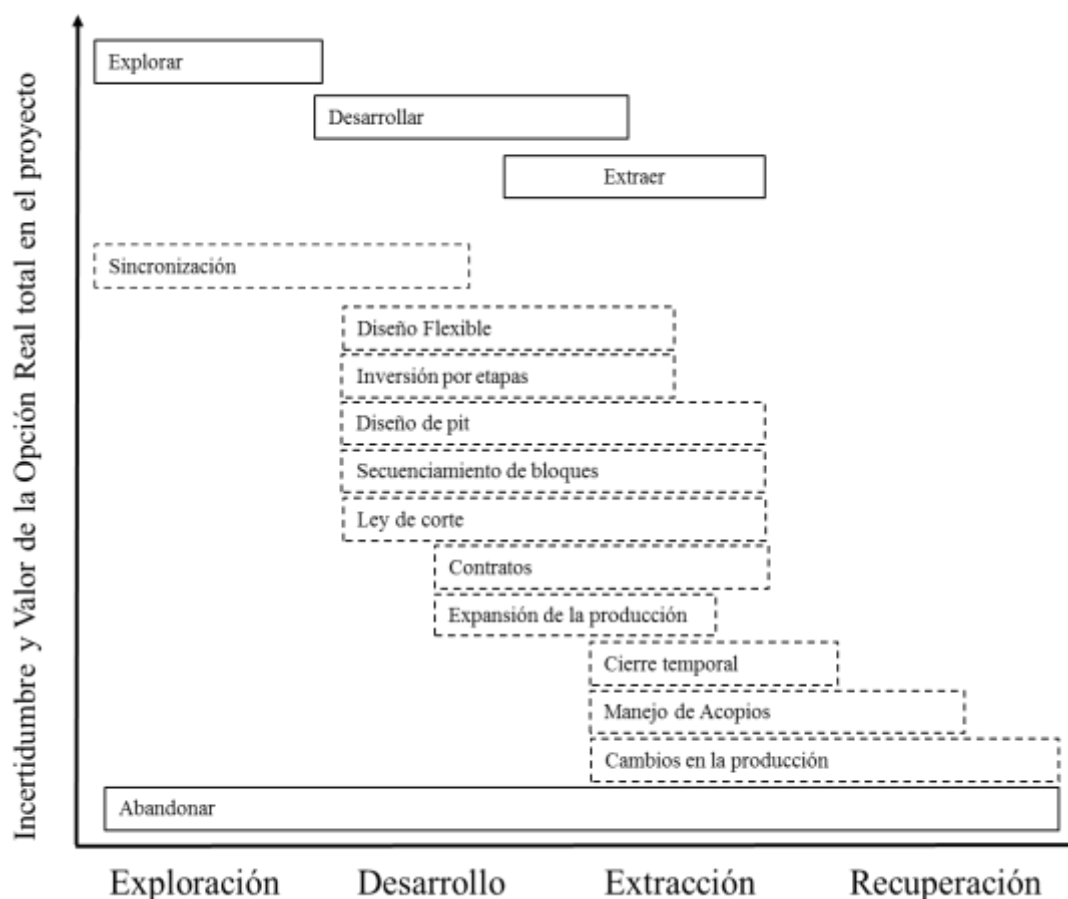


Figura 16.9. Disponibilidad de realizar la opción real en la vida del proyecto. Opción Real *en el proyecto*: línea punteada. Opción Real *sobre el proyecto*: línea sólida. Fuente: Savolainen (2016)

Dentro de las opciones reales *en el proyecto* con mayor valor típicamente en minería se encuentran:

- Flexibilidad en el diseño de la mina: según Newman *et al.* (2010), la determinación del método minero consiste en determinar el método de explotación del yacimiento, estimar la capacidad de producción y la inversión de la infraestructura y realizar el diseño de ingeniería de detalle. Todo esto en función a resultados óptimos de capacidad, métodos de explotación y leyes de corte ya determinados (Mayer y Kazakidis, 2007). Esto está asociado al material que se va a procesar y se debe buscar establecer un *trade - off* entre la cantidad de material que se enviará a planta y la ley de corte, el cual depende del tamaño y la geometría del diseño final.
- Flexibilidad en la planificación minera: El plan minero le da flexibilidad a la mina en términos de la ley de corte que se enviará a procesar a la planta, además de que se puede

establecer un secuenciamiento óptimo que hace maximizar el VAN de la mina. En relación a esto, el plan de la mina debe estar en función del precio, el cual irá dictando un plan minero estratégico para el negocio, que tendrá como objetivo definir sectores en la mina en función a sus leyes, dando así un plan flexible a cambios de mercado.

- Cierre temporal: La capacidad de cerrar una mina tras un escenario no favorable para la operación es una acción complicada dado lo intensivo en capital que es la minería Humphreys (1996). Típicamente el cierre de una mina se vuelve valioso en los períodos de precios bajos en los *commodities*.
- Expansión: La mina debe estar evaluando constantemente la opción de expandirse, debido a que en un yacimiento puede existir valor futuro que se puede aprovechar realizando una inversión adicional (dependiendo de cambios externos en el mercado o tecnológicos, por ejemplo).
- Postergación de la construcción: Esto ocurre cuando las ingenierías y estudios ya están realizados, pero todavía se debe comprometer la inversión asociada a la construcción.¹⁰²
- Cambiar de uso (*switch use*): Esta opción se asocia a cambiar insumos o productos de producción. Por ejemplo, en un campo de hidrocarburos pasar de producir petróleo a producir gas dado todo el equipamiento instalado en la misma área (Kulatilaka y Marcus, 1992). En general, esto no sucede en la minería metálica, debido a que los procesos tienen subproductos y subprocesos predeterminados con escasa flexibilidad (o alto costo de cambio). Sin embargo, en algunas circunstancias se puede ejercer esta opción, como por ejemplo cuando el precio de un subproducto aumenta lo suficiente como para volver rentable su recuperación.

Las opciones reales corresponden a una aplicación cada vez más presente en la industria minera. La evaluación de proyectos mineros debe tomar este camino para generar planes más robustos que hagan maximizar el valor de una mina, aunque esto esté limitado por la complejidad presente en las herramientas de evaluación de análisis de opciones reales. En las secciones siguientes, se discutirá el uso de programación dinámica en la resolución de estos problemas.

¹⁰² Algunas veces incluso se detiene la construcción estando esta avanzada, como fue el caso del proyecto de cobre Antucoya en Chile en 2012.

RECUADRO 16.5

OPCIONES REALES APLICADAS: DEEPMINE EN DIVISIÓN RADOMIRO TOMIC, CODELCO.

Como una forma de aprovechar las oportunidades que se generan a partir de cambios en el mercado, nació DeepMine, una herramienta de planificación estratégica para minas a rajo abierto que busca maximizar el valor del negocio, considerando tanto las componentes dinámicas como estocásticas del problema minero. El programa, además de incorporar y modelar la incertidumbre inherente al proceso de planificación minera estratégica, busca incluir la flexibilidad en el diseño de planes, de forma tal que los destinos (planta, *stock* o botadero) y las capacidades del sistema mina-planta se trabajan como opciones y no como alternativas inflexibles. Esto convierte a DeepMine en la única herramienta de la industria minera capaz de trabajar con opciones reales para la generación de un plan minero.

DeepMine posee un sistema de navegación que permite explorar visualmente modelos de bloques, reservas y planes mineros a través de una interfaz que combina vistas 2D, 2,5D y 3D en una misma pantalla. Su motor de cálculo avanzado, basado en programación dinámica aproximada, hace posible generar una secuencia de extracción operativizable, sin la necesidad de basarse en fases prediseñadas. Además, entrega planes mineros que cumplen restricciones de operatividad geotécnicas y de capacidades de mina y planta, bajo criterios económicos y operacionales.

En 2013, la mina Radomiro Tomic de Codelco utilizó este *software* para generar planes flexibles en cuanto a la capacidad de tratamiento de planta. Según Deck *et al.* (2013), el VAN del proyecto de expansión que manejaba Radomiro Tomic en ese entonces (Fase II) aumentó en un 68% cuando se incorporó la flexibilidad versus el caso en el cual se consideró un tamaño de planta inflexible.

El autor ha podido comprobar en el uso de DeepMine en varios otros proyectos que en general la introducción de las opciones reales aumenta el VAN del proyecto entre un 10% y hasta un 100%. De esta forma, el uso de opciones reales no solo es valioso en la evaluación de proyectos mineros, sino que incluso en la generación de planes mineros, esta técnica permite descubrir importantes fuentes de valor.

16.3 Oportunidad y *timing* de inversión

Actualmente, los proyectos de inversión son evaluados económicamente según la regla *naïve* del valor presente de los flujos descontados (VAN) que podría generar dicho proyecto. Esta

regla permite determinar en qué casos conviene realizar la inversión de un determinado proyecto. Particularmente, esta regla plantea que es conveniente invertir siempre y cuando los flujos netos descontados que se generarán sean mayores o iguales a la inversión. En otras palabras, se plantea que es conveniente invertir cuando el VAN del proyecto sea igual o superior a cero.

Sin embargo, la regla *naïve* del VAN no considera las dos características más importantes de una inversión. En primer lugar, la mayor parte de estas inversiones son irreversibles y una vez realizadas son muy difíciles de recuperar. En segundo lugar, una inversión puede ser retrasada, es decir, los tomadores de decisiones tienen la opción, pero no la obligación, de realizar la inversión irreversible. Esta última característica le da la oportunidad a la empresa de esperar hasta que se obtenga mejor información acerca de las incertidumbres exógenas y endógenas que afecten la viabilidad económica del proyecto. Por lo tanto, al no ser considerada la opción de retrasar la inversión, no se está considerando el costo de oportunidad de esperar por nueva información.

El material de esta sección está basado en Dixit y Pindyck (1994). En la sub-sección siguiente se verá una metodología para determinar el *timing* óptimo de una inversión considerando que el valor económico generado por el proyecto crece a una tasa constante conocida a lo largo del tiempo. Además, se sabe que existe una inversión fija conocida y el valor de oportunidad de inversión será descontado a una tasa fija conocida.

Posteriormente, se encontrará un criterio que permita conocer el *timing* óptimo de inversión, pero considerando que el valor del proyecto sigue un proceso estocástico geométrico Browniano. Esta aleatoriedad generará que la forma de determinar el tiempo óptimo de inversión dependa de un valor crítico V^* , el que a su vez dependerá del nivel de inversión y de un factor positivo mayor a uno que estará asociado a las condiciones del mercado y del proyecto.

A continuación se analizará el caso donde se incorporan costos operacionales y, además, el valor del proyecto está sujeto a un precio que sigue un proceso estocástico del tipo geométrico Browniano. A partir de esto, se encuentra el valor del proyecto y posteriormente, se calcula el valor de la oportunidad de invertir en dicho proyecto. En este caso, la decisión de cuándo invertir estará asociado a un valor crítico del precio denotado por P^* .

16.3.1 *Timing* óptimo de inversión en caso determinístico

Sea $V(t)$ el valor o VAN en el instante de tiempo t de un proyecto minero sin considerar la inversión inicial. Para ejemplificar se utilizará que el valor es una función del tiempo de acuerdo a:

$$V(t) = V_0 e^{\alpha t} \quad (16.3)$$

En esta expresión el término V_0 corresponde al valor inicial de un proyecto en el instante de tiempo $t = 0$. A su vez, α es una constante que representa la tasa de crecimiento del valor del proyecto en el tiempo t , la que puede ser positiva o negativa dependiendo del comportamiento creciente o decreciente de la función $V(t)$.

Por otro lado, se define la función $F(V)$ como el valor de la oportunidad de inversión. Este representa el valor del proyecto menos la inversión que se tendría que realizar para poder capturar ese valor. Por lo tanto, $V(t)$ corresponde al valor del proyecto sin inversión y $F(V)$ corresponde al valor del proyecto con inversión. De este modo, la expresión para $F(V)$ viene dada por:

$$F(V) = V_0 e^{\alpha t} - I \quad (16.4)$$

La identidad (16.4) no considera el contexto temporal, es decir, esta ecuación no incluye una tasa de descuento que permita traer los flujos futuros a su valor presente. Para corregir esto se debe multiplicar el lado derecho de (16.4) por e^{-rt} para traerlo a un valor presente, donde r corresponde a la tasa de descuento del inversionista. Esto se puede apreciar en la Figura 16.10. De aquí, se obtiene la siguiente expresión para el valor de la oportunidad de inversión:

$$F(V) = (V_0 e^{\alpha t} - I) e^{-rt} \quad (16.5)$$

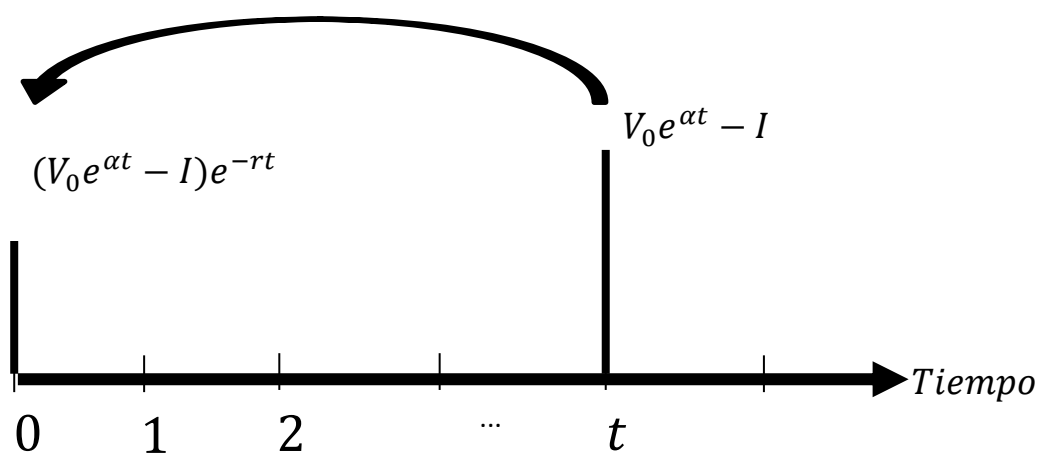


Figura 16.10. Esquema de cómo se ven afectados los flujos futuros al ser descontados

Lo interesante es responder la interrogante de cuál es el *timing* óptimo de inversión, es decir, en qué instante de tiempo \mathfrak{p}^{103} conviene realizar la inversión. Dado que en este caso no se tiene incertidumbre, se puede calcular de manera sencilla este tiempo óptimo. Para esto se debe resolver el tiempo tal que maximice la función $F(V)$, es decir:

$$\max_{\mathfrak{p}} F(V) = (V_0 e^{\alpha \mathfrak{p}} - I) e^{-r \mathfrak{p}} \quad (16.6)$$

Dado que la ecuación a maximizar no es lineal, entonces para resolver la ecuación se debe derivar $F(V)$ con respecto a \mathfrak{p} e igualarlo a 0:

$$\frac{\partial F(V)}{\partial \mathfrak{p}} = 0 \quad (16.7)$$

Antes de continuar y obtener la búsqueda del tiempo óptimo de inversión, es necesario hacer un estudio para distintos casos de α . Cuatro posibilidades se reconocen en este caso:

- $\alpha \leq 0$.
- $\alpha > r$.
- $0 < \alpha \leq r$.

En el primer caso ($\alpha \leq 0$) conviene invertir hoy, ya que el valor del proyecto se mantiene constante o va decayendo, castigándose por tanto los flujos futuros. Entonces el valor de \mathfrak{p} óptimo es 0. Para el segundo caso ($\alpha > r$), el \mathfrak{p} óptimo es infinito, es decir, nunca se invertiría en el proyecto. Esto se debe a que al tener una tasa de descuento inferior a la tasa de crecimiento el valor del proyecto aumenta más que el descuento por el paso del tiempo. Por lo tanto, el único caso interesante de analizar es cuando la tasa de crecimiento es positiva pero inferior a la tasa de descuento ($0 < \alpha < r$), existiendo un *trade off* entre esperar y perder debido al castigo que produce la tasa de descuento o realizar el proyecto hoy perdiendo el crecimiento futuro del valor del proyecto.

De aquí, se asumirá que α se encuentra entre 0 y r . Con lo que al derivar la expresión (16.6), se obtiene:

¹⁰³ La letra \mathfrak{p} también forma parte de los alfabetos anglosajón, nórdico antiguo e islandés, y se conoce como *thorn*. El uso de la letra \mathfrak{p} en estos alfabetos particulares se basa en la runa de la misma forma.

$$\frac{\partial F(V)}{\partial \beta} = -(r - \alpha)V_0 e^{-(r-\alpha)\beta} + rI e^{-r\beta} = 0 \quad (16.8)$$

Se debe desarrollar la segunda derivada de esta expresión para verificar que se está maximizando el valor β . Derivando nuevamente con respecto a β la ecuación (16.8) se llega a la expresión:

$$\frac{\partial^2 F(V)}{\partial \beta^2} = (r - \alpha)^2 V_0 e^{-(r-\alpha)\beta} - r^2 I e^{-r\beta} \quad (16.9)$$

Como se puede apreciar en la ecuación (16.9), la segunda derivada es negativa, cumpliéndose el criterio del máximo. Esto se debe a que la función exponencial es siempre positiva, y la expresión $(r - \alpha)^2 V_0 < r^2 I$, ya que $\alpha \in (0, r)$ y la expresión $(r - \alpha)^2$ se encuentra entre 0 y r^2 , siendo este siempre menor a r^2 . Por lo tanto, el término $r^2 I e^{-r\beta}$ es siempre mayor (o igual) a $(r - \alpha)^2 V_0 e^{-(r-\alpha)\beta}$, cumpliéndose la condición de segundo orden.

Al despejar la variable β de la ecuación (16.8), se obtiene el óptimo que viene dado por:

$$\beta = \max\left\{\frac{1}{\alpha} \ln\left(\frac{rI}{(r-\alpha)V_0}\right), 0\right\} \quad (16.10)$$

Se incluye la condición de un máximo entre $\frac{1}{\alpha} \ln\left(\frac{rI}{(r-\alpha)V_0}\right)$ y 0, debido a que el valor de la variable β no puede ser negativo. Esto pues no se puede retroceder en el tiempo, por lo que el tiempo óptimo no puede realizarse antes del inicio de la evaluación. Es decir, se tiene la posibilidad de invertir hoy o mañana, pero no ayer. Nótese que este tiempo óptimo depende de la tasa de crecimiento, de la tasa de descuento, de la inversión y del valor inicial del proyecto.

RECUADRO 16.6

CIRCUNSTANCIAS NECESARIAS PARA QUE EXISTA *TIMING* ÓPTIMO NEGATIVO

El *timing* óptimo representa el tiempo en el que realizar la inversión maximiza el valor de oportunidad de inversión. Por lo mismo, resulta evidente establecer la restricción de que dicho tiempo sea estrictamente mayor a cero. Sin embargo, matemáticamente es posible lograr valores de β negativos bajo ciertas condiciones. En la expresión siguiente:

$$b = \frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{rI}{(r-\alpha)V_0} \right)$$

Para que b sea menor a cero, es necesario que la expresión al interior del logaritmo natural sea inferior a uno, ya que anteriormente se estableció que $r > \alpha > 0$ y, por lo tanto, $\frac{1}{\alpha}$ será siempre positivo. De aquí, para que el interior del logaritmo natural sea menor a uno es necesario que:

$$\frac{rI}{(r-\alpha)V_0} < 1 \rightarrow I < \frac{(r-\alpha)V_0}{r}$$

A partir esto se puede concluir que el *timing* óptimo de inversión será negativo siempre y cuando la inversión de un proyecto sea inferior al flujo inicial V_0 multiplicado por la razón entre la diferencia de la tasa de crecimiento y la tasa de descuento, siendo este factor menor a uno.

Reemplazando el valor de b obtenido en la ecuación (16.10) en $F(V)$ y analizando los casos posibles de la expresión $\frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{rI}{(r-\alpha)V_0} \right)$ (caso en el que sea menor a 0), se obtiene:

$$F(V) = \begin{cases} \frac{\alpha I}{r-\alpha} \left[\frac{(r-\alpha)V}{rI} \right]^{\frac{r}{\alpha}} & , V \leq V^* \\ V - I & , V \geq V^* \end{cases} \quad (16.11)$$

Donde V^* representa el valor de indiferencia entre invertir hoy o postergar esta decisión. Esto en esencia se produce cuando la expresión dentro del logaritmo natural es 1, tal como se puede observar a continuación:

$$\frac{rI}{(r-\alpha)V^*} = 1 \quad (16.12)$$

Luego, al despejar la variable V^* se obtiene la expresión:

$$V^* = \frac{rI}{r-\alpha} \quad (16.13)$$

Lo interesante a observar es que el factor $\frac{r}{r-\alpha}$ que acompaña a la inversión es siempre mayor a 1, por lo tanto, se invertirá siempre y cuando el valor del proyecto exceda a la inversión de forma positiva. Si el valor del proyecto cambia en el tiempo, entonces no necesariamente se debe invertir cuando el VAN es superior a cero. Además, mientras α sea más cercano a r , se esperará que el valor del proyecto sea mucho más grande que la inversión para llevar a cabo esta iniciativa.

De aquí, V^* corresponde al valor de indiferencia o de inflexión que permite modelar completamente el comportamiento de la función de la oportunidad de inversión y, además, encontrar el tiempo óptimo β . Para reflejar de mejor forma el valor óptimo al cual invertir se presenta en la Figura 16.11 el valor de oportunidad de inversión versus el valor del proyecto.

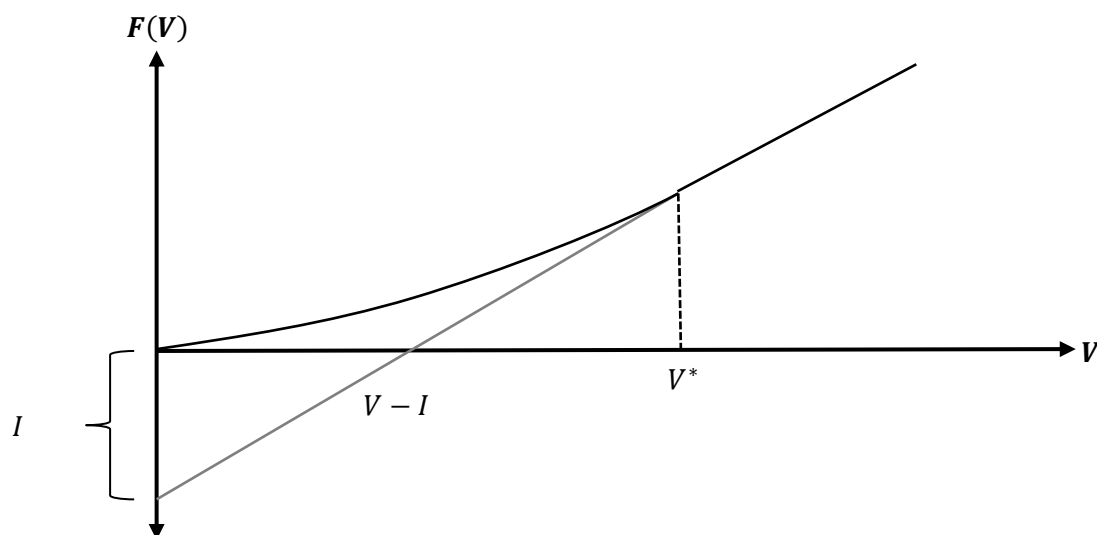


Figura 16.11. Valor de la Oportunidad de Inversión en función del VAN

Esta figura está compuesta por dos curvas, una correspondiente a $F(V)$ y otra correspondiente a $V - I$. La curva $F(V)$ crece hasta el momento en que interseca a la recta $V - I$ y sus tangentes se igualan, y luego de esto desaparece. Este punto en el cual ambas curvas se reúnen es el valor de indiferencia V^* . Por lo tanto, desde este punto se escogerá la curva de $F(V)$, si se está a la izquierda del valor de V^* , mientras que si se está a la derecha de este valor se escogerá la curva dada por $V - I$. La curva $F(V)$ resultante posee una forma convexa, propiedad que será clave para explicar más adelante el valor de las opciones reales.

La curva $F(V)$ intuitivamente expresa el costo de oportunidad de postergar la inversión y esperar a que el proyecto se vuelva más rentable (por ejemplo, que cambie el precio de largo plazo del *commodity*). $F(V)$ corresponde al valor del activo en cada instante de tiempo, el cual no puede ser negativo. Finalmente, como la empresa no está obligada a invertir inmediatamente, es posible aplazar esta decisión hasta que la rentabilidad del proyecto sea positiva y mayor que $V^* - I$.

Dado que el caso examinado corresponde a uno determinístico, se puede derivar de forma explícita el valor del *timing* óptimo de inversión (β). En los proyectos reales, sin embargo, este

tipo de decisiones es mucho más complejo, ya que se debe decidir cuándo invertir, pero el inversionista desconoce cuál es el valor del proyecto a futuro debido a la incertidumbre propia del proyecto y el mercado. Dado lo anterior, es necesario encontrar el tiempo óptimo de inversión tomando en cuenta la estocasticidad asociada al valor del proyecto, lo que se hará en la siguiente sub-sección.

16.3.2 *Timing* óptimo de inversión bajo incertidumbre

Tras haber realizado la primera aproximación al problema utilizando una función $V(t)$ determinística, es de interés analizar el caso en que el valor del proyecto sigue un comportamiento estocástico. Para esto se asume que la función $V(t)$ funciona como una caja negra que entrega el valor presente del proyecto y que incorpora la incertidumbre del proyecto en dicha variable de forma directa. Esto consiste en una simplificación de la realidad, dado que el valor del proyecto no contiene incertidumbre intrínsecamente, sino que se hace incierta producto de la estocasticidad de los factores y parámetros que permiten calcular su VAN, como por ejemplo, el precio del *commodity*, las condiciones geometalúrgicas del mineral, entre otros.

Al igual que en los modelos planteados por McDonald y Siegel (1986) y Dixit y Pindyck (1994), el problema se define como encontrar el tiempo óptimo en que conviene pagar un costo de inversión instantáneo $I > 0$ para poner en marcha un proyecto cuyo valor viene dado por $V(t)$, y que para efectos del ejemplo a desarrollar se asumirá evoluciona según un movimiento geométrico Browniano. Con esto en consideración, el problema se plantea matemáticamente como sigue:

$$F(V) = \max_p E\{(V(t) - I) * e^{-r^p}\} \quad (16.14)$$

s. a.

$$dV = \alpha V dt + \sigma V dz \quad (16.15)$$

$$p \geq 0 \quad (16.16)$$

Para resolver este problema se utilizará programación dinámica estocástica, cuyas bases matemáticas se encuentran explicadas en el Capítulo 14. Siguiendo la metodología planteada en dicho capítulo, se inicia el desarrollo con la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman estocástica en su forma general:

$$rJ = \max_q \{E(\pi) + E\left(\frac{dJ}{dt}\right)\} \quad (16.17)$$

Luego, se debe adaptar esta ecuación al presente problema. Se cambia J por F , el cual es un funcional dependiente de $V(t)$. Además, el término $E(\pi)$ se anula, dado que no existe tal para este caso.

$$rFdt = E(dF) \quad (16.18)$$

Se desarrolla el término dF según el Lema de Itô, dado que el valor de la oportunidad de inversión depende de $V(t)$, entendiendo el funcional como $F(V)$:

$$dF = F'(V)dV + \frac{1}{2}F''(V)dV^2 \quad (16.19)$$

$$dF = \left(\alpha VF'(V) + \frac{1}{2}\sigma^2 V^2 F''(V)\right) dt + \sigma VF'(V) dz \quad (16.20)$$

Luego, se incorpora este resultado en la ecuación (16.18).

$$rF(V)dt = E\left(\left(\alpha VF'(V) + \frac{1}{2}\sigma^2 V^2 F''(V)\right) dt + \sigma VF'(V) dz\right) \quad (16.21)$$

Como $E(dz) = 0$, se tiene que:

$$rF(V)dt = \left(\alpha VF'(V) + \frac{1}{2}\sigma^2 V^2 F''(V)\right) dt \quad (16.22)$$

Dividiendo por dt y reordenando se obtiene la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 V^2 F''(V) + \alpha VF'(V) - rF(V) = 0 \quad (16.23)$$

El resultado anterior corresponde a una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden que posee una solución explícita. Sin embargo, para dar con una curva de solución completa para $F(V)$ se necesitan tres condiciones: dos condiciones iniciales para encontrar el valor de las constantes de integración que surgen al resolver la ecuación diferencial y una para determinar una variable que se encuentra implícita en el problema, la cual se trata del nivel óptimo de ejercicio del proyecto, dada por V^* . Esta variable muestra el valor óptimo de $V(t)$ para el cual se debe ejecutar el proyecto, es decir, indica a partir de qué valor del proyecto empieza a ser conveniente invertir I y poner en marcha la iniciativa.

RECUADRO 16.7

COMPARACIÓN CON DERIVADOS FINANCIEROS

El problema de opciones reales abordado en este capítulo se puede ilustrar con el funcionamiento de derivados financieros. Con este fin, basado en Hull (2015), se define un *forward* (F) como un acuerdo a comprar (vender) un activo a un precio fijo (K) en una fecha determinada (T). Por otro lado, una opción europea (C) entrega al tenedor el derecho de comprar (vender) cierto activo a un precio fijo (K) en una fecha determinada. Con esto en consideración, el valor terminal en función del precio del activo subyacente (S) asociado a cada uno de estos instrumentos está dado por:

$$F(S) = S - K$$

$$C(S) = \max(S - K, 0)$$

Esta característica hace que la valoración de la *forward* durante el tiempo sea lineal, en cambio, la de la opción sigue la forma de una curva determinada por la ecuación de Black-Scholes. Este comportamiento de forma gráfica se puede ver en la Figura 16.12, donde la curva C posee una forma idéntica a la derivada en el problema determinístico de la sub-sección anterior. El método tradicional de evaluación se parece a un *forward*, en cambio, el método de opciones reales se parece así a una opción financiera (*call* en este caso).

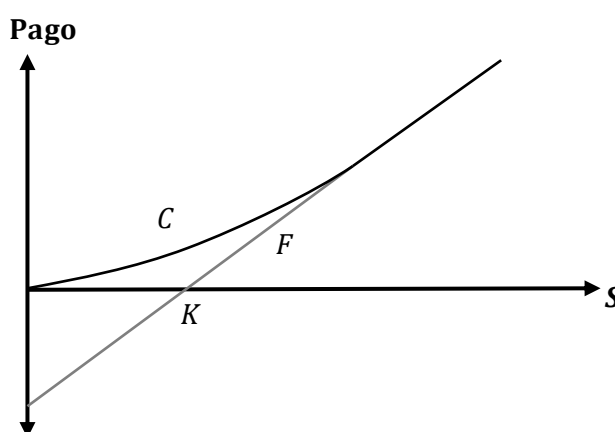


Figura 16.12. Valoración de derivados financieros en función del precio del subyacente

En definitiva, la regla de inversión en el caso estocástico está dado por encontrar el valor de V^* en lugar de determinar un tiempo óptimo (\mathcal{P}) para invertir (como ocurre en el caso determinístico). Esta política de inversión se encuentra especificada en la Tabla 16.4. Al

analizar los posibles estados, resulta fácil deducir que V^* corresponde a un punto de quiebre entre dos posibles decisiones: ejecutar el proyecto o postergar su ejecución. Esto permite hacer un símil con las opciones financieras, para las cuales también existe una política óptima de ejercicio.

Tabla 16.4. Política óptima de inversión según valor del proyecto.

$V < V^*$	$V = V^*$	$V > V^*$
Esperar	Indiferente	Invertir

A continuación, se retoma la resolución del problema con la incorporación de las restricciones que permitirán obtener la solución explícita para la ecuación (16.23), para lo cual se derivan las tres condiciones requeridas antes mencionadas.

Condición 1: $F(0) = 0$.

Esta condición refiere a un punto de absorción del valor de la oportunidad de inversión. Si $V(t)$ se vuelve cero, $F(V)$ deberá ser 0 y mantenerse en dicha condición para siempre. Esto se justifica por el movimiento geométrico Browniano que gobierna la incertidumbre de este proceso, cuya forma matemática con la variable multiplicada en ambos términos de la expresión genera esta particular situación.

Esta condición de borde es ampliamente utilizada en el mundo de la valoración de derivados financieros y de las opciones reales en general. Para aclarar este punto de vista, se da el ejemplo abordado por Hull (2015) en el que se caracteriza al patrimonio (S) de una empresa como un derivado de los activos (A) de forma que se puede expresar el valor de las acciones en función de los activos $S(A)$. Si dicha empresa quiebra, es decir, si sus activos son insuficientes para pagar su deuda ($A = 0$), el valor del patrimonio se desploma y las acciones alcanzan un precio de 0. Lo anterior demuestra de forma más empírica que $S(A = 0) = 0$, análogamente al caso estudiado $F(V = 0) = 0$.

Condición 2: $F(V^*) = V^* - I$.

Esta corresponde a la ecuación de continuidad. De la misma manera en que ocurre en el caso determinístico, el valor de la oportunidad de inversión en V^* debe ser igual al valor obtenido

para ejecutar el proyecto. Esto genera que la solución sea continua, de la forma que se mostró en la Figura 16.11.

Una interpretación distinta de esta condición de continuidad se da en Dixit y Pindyck (1994). Estos autores reescriben la ecuación como $V^* - F(V^*) = I$, la que representa el diferencial de realizar la inversión, obteniéndose el valor de V^* , pero perdiéndose la oportunidad u opción de invertir $F(V)$. Entonces, la ganancia menos el costo de oportunidad deberá venir dado por $V - F(V)$. Luego, el V^* crítico es aquel para el cual esta ganancia neta iguala al costo de inversión requerido. De forma homóloga, Dixit y Pindyck (1994) reescriben la ecuación como $V^* = I + F(V^*)$, que directamente muestra que en el punto crítico V^* el valor del proyecto obtenido como ganancia debe igualar los costos, que consideran tanto costo de inversión como el costo de oportunidad representado por $F(V)$.

Condición 3: $F'(V^*) = \frac{d(V-I)}{dV}(V^*) = 1$.

Esta es una condición ampliamente utilizada en la valoración de opciones reales y financieras, y se denomina “condición de pegado suave”. Su implicancia es que no basta con que la curva del valor de la oportunidad de inversión $F(V)$ sea continua, sino que además las derivadas de las dos curvas que lo componen deben ser iguales en el punto crítico (V^*). Geométricamente esto significa que en ese punto tanto la curva por la izquierda como la por la derecha comparten la misma recta tangente. Esto, en conjunto con la condición 2, asegura que en el punto de cambio de comportamiento la curva posea tanto valores como derivadas iguales, con lo cual se asegura la existencia de un pegado suave de forma intuitiva, como así lo representa el nombre de la condición.

RECUADRO 16.8

CONDICIÓN DE PEGADO SUAVE (DIXIT, 1993)

Normalmente llamada en inglés como *smooth pasting condition* o *high contact condition*, esta condición apunta a que en el límite óptimo entre dos líneas de acción distintas, ofrecidas por una opción, las derivadas de las funciones deben ser iguales. Esta condición ha sido permanentemente utilizada en la valorización de opciones reales y financieras, investigaciones entre las que destacan los trabajos de Black, Scholes, Merton y Schwartz, entre otros académicos destacados.

Una explicación intuitiva de esta condición es elaborada por Laibson (2011) y Dixit y Pindyck (1994). El argumento se basa en las situaciones mostradas en la Figura 16.13. Ambas gráficas ilustran pegados no suaves, en las que al lado izquierdo de x^* conviene esperar y al lado derecho conviene ejercer (invertir). Para la situación (a), por contradicción, se puede deducir que el punto x^* no puede ser óptimo, dado que si sobre ese mismo punto ocurre una perturbación hacia el estado $x^* + dx$, entonces sería más conveniente mantenerse en la función ψ , es decir, seguir esperando. Por otro lado, para la situación (b) se puede intuir que sobre el punto x^* es más conveniente esperar a que transcurra un tiempo dt , ya que la situación después de ese tiempo ($x^* \pm dx$) en promedio será mejor que el estado en x^* , como muestra la línea punteada gris. Entonces, nuevamente por contradicción, el punto x^* no puede ser el valor óptimo de cambio de estado.

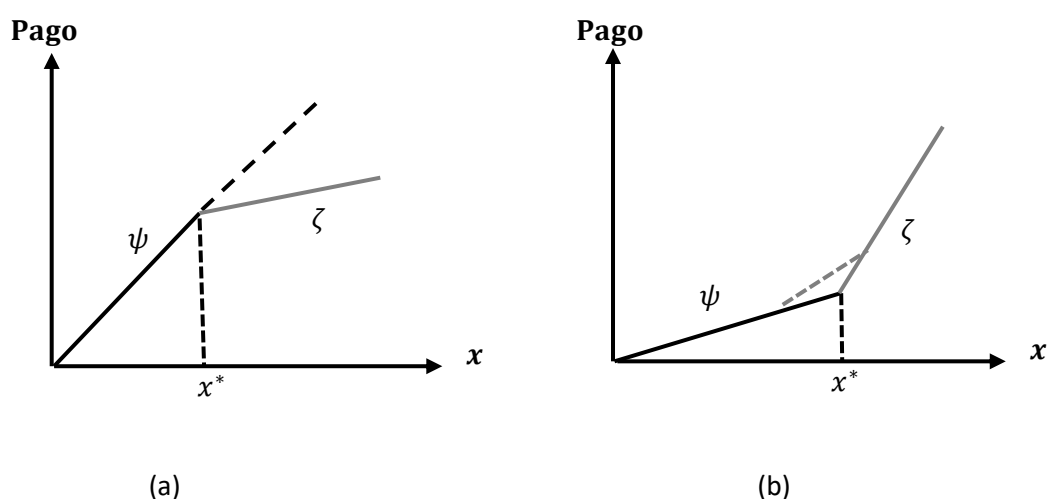


Figura 16.13. Explicación de la condición de pegado suave. Fuente: Dixit y Pindyck (1994)

Con las tres condiciones necesarias ya definidas se procede a encontrar la solución del problema. Para ello se debe resolver la ecuación diferencial (16.23). Para mantener la notación usada por Dixit y Pindyck (1994), que tiene mucho sentido en el mundo financiero, se hace un cambio de variables tal que $\alpha = r - \delta$. Con esto la ecuación queda como:

$$\frac{1}{2}\sigma^2V^2F''(V) + (r - \delta)VF'(V) - rF(V) = 0 \quad (16.24)$$

La solución de la ecuación diferencial de segundo orden debe tener una forma dada por $F(V) = A_1V^{\beta_1} + A_2V^{\beta_2}$. Con A_1 y A_2 constantes a determinar con las condiciones de borde y $\beta_{1,2}$ a determinar con la solución de la ecuación diferencial. Para encontrar el valor de estos coeficientes se introduce la forma general de la solución en (16.24), de donde se obtiene la siguiente ecuación cuadrática:

$$\frac{1}{2}\sigma^2\beta(\beta - 1) + (r - \delta)\beta - r = 0 \quad (16.25)$$

Las raíces que satisfacen esta ecuación son precisamente los valores $\beta_{1,2}$. Tras resolver la ecuación (16.25) para β se obtiene:

$$\beta_1 = \frac{1}{2} - \frac{r-\delta}{\sigma^2} + \sqrt{\left(\frac{r-\delta}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2r}{\sigma^2}} \quad (16.26)$$

$$\beta_2 = \frac{1}{2} - \frac{r-\delta}{\sigma^2} - \sqrt{\left(\frac{r-\delta}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2r}{\sigma^2}} \quad (16.27)$$

Es de interés hacer un análisis de los posibles valores que pueden tomar estas raíces β , para así acotar la estructura de la solución del problema diferencial. Con este fin, basado en lo realizado por Cortázar y Schwartz (1993), se hace la siguiente sustitución:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} - \frac{(r-\delta)}{\sigma^2} \quad (16.28)$$

$$\alpha_2 = \sqrt{\alpha_1^2 + \frac{2r}{\sigma^2}} \quad (16.29)$$

Incorporando dicha sustitución para β_1 y β_2 , se obtiene que:

$$\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2 \quad (16.30)$$

$$\beta_2 = \alpha_1 - \alpha_2 \quad (16.31)$$

Luego, como la tasa de descuento (r) es positiva por definición y $\sigma^2 > 0$, se tiene que $\frac{2r}{\sigma^2} > 0$, dado que es una multiplicación de parámetros estrictamente positivos. De aquí:

$$\alpha_2 = \sqrt{\alpha_1^2 + \frac{2r}{\sigma^2}} > \sqrt{\alpha_1^2} \quad (16.32)$$

$$\alpha_2 > \sqrt{\alpha_1^2} \quad (16.33)$$

$$\alpha_2 > \alpha_1 \quad (16.34)$$

Esta relación permite concluir directamente que $\beta_2 < 0$, ya que en la relación mostrada anteriormente ($\beta_2 = \alpha_1 - \alpha_2$) el sustraendo es mayor al minuendo, por lo que la diferencia resulta ser negativa.

Para completar el estudio de las raíces encontradas, se hace un estudio geométrico de la ecuación cuadrática (16.25). Para ello, se puede reordenar la ecuación de forma que muestre claramente la parábola que representa:

$$\frac{1}{2}\sigma^2\beta^2 + \left(r - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\beta - r = y(\beta) \quad (16.35)$$

El coeficiente que acompaña al término cuadrático β^2 es positivo, por lo que la parábola es convexa, es decir, apunta hacia arriba. Luego, se determinan dos valores relevantes para la forma cuadrática. Estos son: $y(0) = -r < 0$ e $y(1) = -\delta < 0$, los cuales demuestran que una raíz de la función cuadrática debe estar a la izquierda de 0 y la otra a la derecha de 1. Este resultado se puede ver de forma gráfica en la Figura 16.14. Con esto queda demostrado que la raíz negativa β_2 es negativa y que la raíz positiva β_1 es mayor a 1.

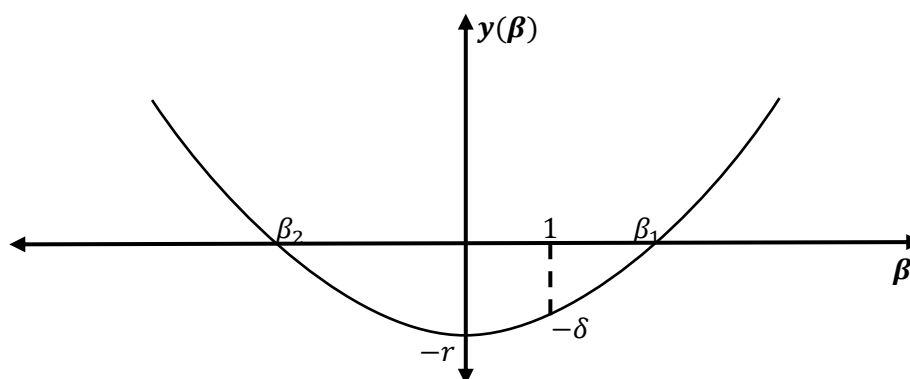


Figura 16.14. Gráfico de función cuadrática que muestra límites para los valores de β . Fuente: Dixit y Pindyck (1994)

En síntesis, se logró demostrar que $\beta_1 > 1$ y que $\beta_2 < 0$. Ahora, este resultado se incorpora al análisis de la Condición 1 dada anteriormente. Como $F(0) = 0$, debe ocurrir entonces que:

$$\lim_{V \rightarrow 0} F(V) = \lim_{V \rightarrow 0} A_1 V^{\beta_1} + A_2 V^{\beta_2} = 0 \quad (16.36)$$

Se inspecciona el primer término y se ve que:

$$\lim_{V \rightarrow 0} A_1 V^{\beta_1} = 0 \quad (16.37)$$

Para todo β_1 , dado que es mayor a 1. Por otro lado, el segundo término arroja:

$$\lim_{V \rightarrow 0} A_2 V^{\beta_2} = \infty \quad (16.38)$$

Luego, para obligar que $F(V)$ converja a 0 cuando V tiende a cero se requiere que A_2 sea igual a cero. Entonces, la Condición 1 permite determinar que $A_2 = 0$, con lo que la forma del valor de la oportunidad de inversión está dada por $F(V) = A_1 V^{\beta_1}$. Dicha forma funcional se aplica sobre las condiciones restantes:

$$A_1(V^*)^{\beta_1} = V^* - I \quad (16.39)$$

$$A_1 \beta_1 (V^*)^{\beta_1 - 1} = 1 \quad (16.40)$$

Dividiendo (16.39) por (16.40) se obtiene:

$$V^* = \beta_1 (V^* - I) \quad (16.41)$$

$$V^* = \frac{\beta_1 I}{\beta_1 - 1} \quad (16.42)$$

Finalmente, el valor de V^* encontrado se introduce en la ecuación (16.39) para determinar el valor de A_1 . Con este último cálculo se completa solución analítica al problema del *timing* de inversión para comportamiento del VAN estocástico. En este caso:

$$A_1 = \frac{I^{1-\beta_1}}{\beta_1^{\beta_1}} (\beta_1 - 1)^{\beta_1 - 1} \quad (16.43)$$

Cabe destacar que la solución para $F(V)$ tiene la misma forma funcional que en el caso determinístico y se puede componer de la manera mostrada a continuación. En la Figura 16.15, a su vez, se puede observar que $V = V^*$ nuevamente corresponde a un punto de indiferencia entre llevar a cabo o no el proyecto. Además, este punto marca el cambio de curva que determina el valor de la oportunidad de inversión.

$$F(V) = \begin{cases} A_1 V^{\beta_1} & \text{si } V \leq V^* \\ V - I & \text{si } V \geq V^* \end{cases} \quad (16.44)$$

Un detalle importante sobre la regla de inversión óptima encontrada con V^* es que como $\beta_1 > 1$, se tiene que $\frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} > 1$, ya que el numerador es siempre mayor al denominador. Luego, como muestra la ecuación (16.42) con $V^* = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} I$, se debe cumplir que:

$$V^* > I \quad (16.45)$$

Este último hallazgo es la conclusión más relevante del problema de oportunidad y *timing* de inversión estudiado, puesto que muestra que la regla *naïve* del VAN sin considerar opciones reales es incorrecta. La regla de inversión, en este caso, indica que es óptimo invertir en el momento en que el VAN es un múltiplo de la inversión y no cuando el VAN supera a la inversión. Es decir, no es suficiente que el valor presente del proyecto supere a la inversión necesaria, sino que debe superar a un múltiplo mayor al monto requerido como inversión. Este es el nuevo punto de vista de las opciones reales, en las que no existe una obligación a llevar a cabo un proyecto, sino que existe una oportunidad para hacerlo. En resumen, la regla es que se debe invertir cuando el VAN alcanza la cifra de $\frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} I$, tal como se muestra en la Figura 16.15. A diferencia del caso determinístico, se obtiene una regla y no un tiempo óptimo de inversión (P^*).

Como señala Dixit y Pindyck (1994), la incertidumbre e irreversibilidad conllevan a un cambio a la hora de decidir si llevar a cabo un proyecto. Específicamente, al analizar la solución dada por $F(V)$, se encuentra que a mayores valores de los parámetros α y σ de la ecuación de estado, mayor se hace el valor de esperar el momento preciso para invertir. Una vez más esto se puede comparar con el caso de una opción financiera, para las cuales ocurre exactamente lo mismo. Ante escenarios más inciertos (mayores valores de σ o volatilidad), mayor es el valor de la opción, que en el caso estudiado corresponde a la opción de esperar y postergar la inversión.

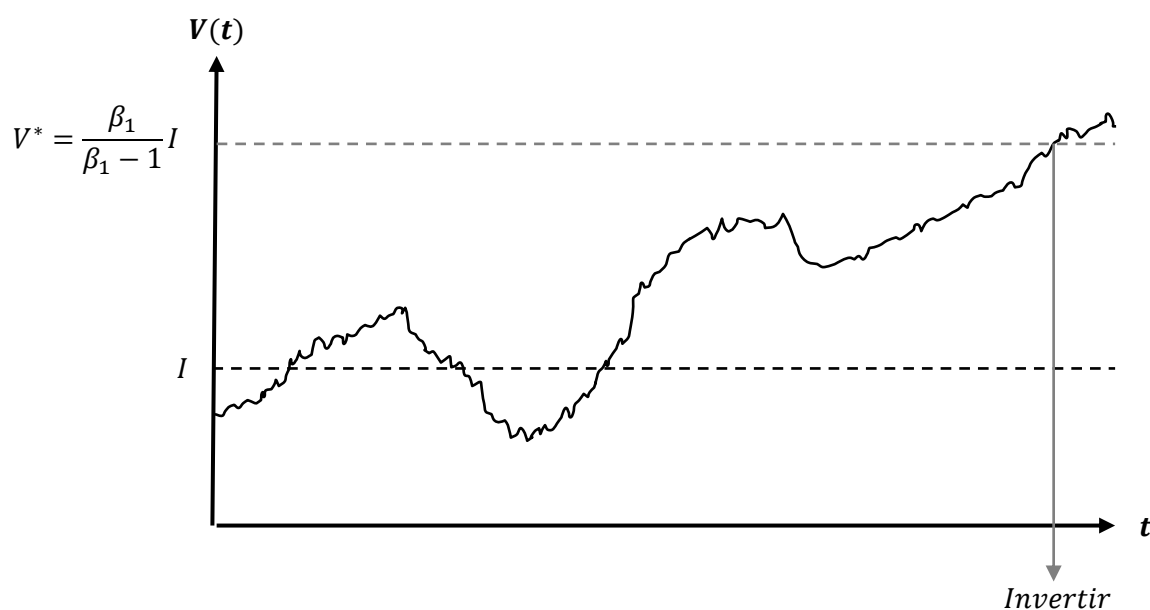


Figura 16.15. Comportamiento estocástico del VAN y regla de inversión óptima

Cabe señalar que en minería el multiplicador $\frac{\beta_1}{\beta_1-1}$ corresponde a una métrica conocida como IVAN (en español) o *profitability index* (en inglés). Lo interesante es que en la práctica los tomadores de decisiones efectivamente consideran este indicador para objeto de tomar decisiones de inversión, exigiendo un valor mínimo con objeto de proceder con dichas inversiones. La Tabla 16.5 muestra un conjunto de valores para distintas industrias de minerales, para los cuales se deriva el mutiplicador óptimo en base a estadísticas propias de los mercados en cuestión, comparándose estas con los indicadores subjetivos que el propio autor ha podido comprobar en la práctica.

Tabla 16.5 Valores de IVAN mínimos para invertir óptimamente en diferentes industrias de *commodities* minerales. Fuente: Elaboración propia

<i>COMMODITY</i>	<i>r</i>	δ	σ	β_1	$IVAN = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} - 1$
Cobre	8%	12%	25%	USD/libra	0,5
Carbonato de litio	6%	12%	14%	USD/tonelada	0,1
Oro	8%-10%	12%	14%	USD/onza	0,2

16.3.3 Timing óptimo de inversión bajo incertidumbre en el precio

El enfoque de esta sección aborda el mismo problema desarrollado en la sección anterior, pero incorporando incertidumbres exógenas al valor del proyecto. Este planteamiento representa de manera más realista lo que ocurre en un proyecto minero, ya que el valor del proyecto no es estocástico por sí mismo, sino que debido a los factores externos que lo determinan. Para desarrollar este punto de vista, se tomó como base lo desarrollado en Dixit y Pindyck (1994).

A continuación, se presentan varios casos de interés.

Sin costos operacionales

En este caso se asume que el precio (P) sigue un proceso estocástico dado por un movimiento geométrico Browniano, el cual sigue la ecuación:

$$dP = \alpha P dt + \sigma P dz \quad (16.46)$$

Ahora, el *output* del proyecto es directamente negociable y la tasa de descuento μ corresponde a la tasa esperada de retorno del precio en un mercado ajustado por riesgo.

$$\mu = r + \varphi\sigma\rho_{pm} \quad (16.47)$$

Donde r es la tasa de descuento libre de riesgo, ρ_{pm} es el coeficiente de correlación entre los activos y el portafolio de mercado. Por otro lado, φ es el premio por riesgo. Para que el valor del proyecto tenga sentido, es necesario que $\mu > \alpha$. La diferencia $\mu - \alpha$ se denota como δ .

El proyecto puede ser tomado en cuenta como un derivado financiero cuya rentabilidad depende netamente del valor del activo más importante, es decir, el precio. De aquí, se puede definir el valor del proyecto como una variable dependiente del precio $V(P)$. Luego, se construye un portafolio libre de riesgo al tomar combinaciones adecuadas de activos para ser evaluadas ($V(P)$) y el activo básico (P). Como se trata de un portafolio libre de riesgo la rentabilidad de este debe ser la tasa libre de riesgo. Luego, al igualar el retorno del portafolio con el retorno libre de riesgo se obtiene la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 P^2 V''(P) + (r - \delta)P V'(P) - rV(P) + P = 0 \quad (16.48)$$

La parte homogénea de esta ecuación tiene soluciones de la forma $V(P) = AP^\beta$, donde β es una raíz de la ecuación cuadrática fundamental:

$$Q \equiv \frac{1}{2}\sigma^2\beta(\beta - 1) + (r - \delta)\beta - r = 0 \quad (16.49)$$

Esta ecuación es similar a la explicada en la sub-sección anterior, donde se entregan detalles de las raíces y su dependencia con los parámetros r , σ y δ . La solución general para el valor del proyecto, a diferencia de la obtenida anteriormente, contiene una solución particular $\frac{P}{\delta}$.

$$V(P) = B_1 P^{\beta_1} + B_2 P^{\beta_2} + \frac{P}{\delta} \quad (16.50)$$

Para proseguir con el desarrollo del ejercicio, solo se tomará en cuenta la solución particular de la ecuación diferencial, con lo cual:

$$V(P) = \frac{P}{\delta} \quad (16.51)$$

Por otro lado, la forma de la solución para el valor de la oportunidad de inversión se sigue de la sección anterior y está dada por la siguiente ecuación:

$$F(P) = A_1 P^{\beta_1} + A_2 P^{\beta_2} \quad (16.52)$$

Donde A_1 , A_2 , B_1 y B_2 son constantes que deben ser determinadas para lo cual se utilizarán las condiciones de continuidad y pegado suave:

$$F(P^*) = V(P^*) - I \quad (16.53)$$

$$F'(P^*) = V'(P^*) \quad (16.54)$$

Se resuelve entonces el sistema para P^* , precio óptimo de inversión, con lo que se obtiene:

$$P^* = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} \delta I \quad (16.55)$$

Y al reemplazar este precio en la ecuación (16.53) se encuentra que el valor del proyecto que gatilla la inversión es:

$$V^* = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} I \quad (16.56)$$

Es fácil comprobar que la decisión de inversión óptima es idéntica a la encontrada en la subsección 16.3.2. Este es un resultado muy importante, pues indica que si se expresa el valor del proyecto y el valor de la opción en términos de un precio con carácter estocástico se obtiene exactamente el mismo valor que al considerar que la estocasticidad recae en el valor del proyecto $V(t)$ directamente. Esta conclusión resulta conveniente pues, en general, es más fácil trabajar en términos del precio como variable económica principal que determina el valor de un proyecto. En las secciones siguientes, se presentan más casos en los cuales se seguirá utilizando la modelación del precio como variable estocástica.

Con costos operacionales y suspensiones temporales

Para este caso se considera que la operación del proyecto posee un flujo de costo de C constante. La operación puede cerrar temporalmente si el precio P cae más bajo que C y posteriormente, puede ser reabierto cuando el precio P alcance un mayor valor que C . A partir de lo anterior, el beneficio del proyecto en cada instante de tiempo queda definido como:

$$\pi(P) = \max\{P - C, 0\} \quad (16.57)$$

Otra mirada al problema consiste en pagar C en un instante de tiempo t , para recibir el precio P que está dado en dicho instante de tiempo, lo cual se asemeja a una opción de compra (*call*) europea.

RECUADRO 16.9

OPCIONES EUROPEAS

Una opción europea es aquella que solo puede ser ejercida al final de su vida, es decir, en el instante justo en que va a expirar. Las opciones europeas normalmente se negocian sin contrapartida, mientras que las opciones americanas, opciones que pueden ser concretadas en cualquier instante de tiempo desde que está disponible, incluyendo el momento en el que expiran, suelen operar en mercados estandarizados (por ejemplo, bolsas de comercio).

Las opciones europeas son contratos que le dan al dueño el derecho, pero no la obligación, de vender o comprar el valor subyacente a un precio específico, conocido como precio de ejercicio, en la fecha de vencimiento de la opción. Un comprador de una opción europea que no quiere esperar la madurez de esta para ejercerla puede vender dicho derecho.

Con esto en consideración, la ecuación diferencial para el valor del proyecto es:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 P^2 V''(P) + (r - \delta)PV'(P) - rV(P) + \pi(P) = 0 \quad (16.58)$$

La solución homogénea tiene dos soluciones independientes: P^{β_1} y P^{β_2} . La parte no homogénea, dada por $\pi(P)$, da paso a dos soluciones diferentes determinadas cuando $P < C$ y cuando $P > C$, que deben ser tratadas de forma separada.

Cuando $P < C$ se cumple que $\pi(P) = 0$. De aquí la solución general es solo una combinación lineal de la solución homogénea de dos raíces:

$$V(P) = K_1 P^{\beta_1} + K_2 P^{\beta_2} \quad (16.59)$$

Las constantes K_1 y K_2 deben ser determinadas con las condiciones de borde.

Por otro lado, cuando $P > C$ se cumple que $\pi(P) = P - C$, luego la solución general toma la misma combinación lineal mostrada anteriormente, pero se incorpora una solución particular.

Se puede notar que $\frac{P}{\delta} - \frac{C}{r}$ satisface la ecuación, entonces la solución queda definida por:

$$V(P) = B_1 P^{\beta_1} + B_2 P^{\beta_2} + \frac{P}{\delta} - \frac{C}{r} \quad (16.60)$$

Aquí también B_1 y B_2 son constantes que deben ser determinadas con las condiciones de borde.

La solución encontrada presenta una interpretación económica sencilla. Cuando $P < C$ la operación se suspende y el proyecto no genera beneficio alguno. Cabe destacar que existe una probabilidad de que el precio se mueva a la región en que $P > C$, situación en la cual la operación será reanudada y el proyecto generará beneficios. De este modo, el valor $V(P)$ cuando $P < C$ es justamente el valor presente esperado de los flujos futuros.

Considérese ahora la situación en que $P > C$. En este caso el valor esperado de los ingresos crece a tasa α y es descontado a la tasa apropiada ajustada por el riesgo μ , por lo que el valor presente esperado es $\frac{P}{\mu-\alpha} = \frac{P}{\delta}$. El costo C constante, es descontado a la tasa sin riesgo r dando un valor presente de $\frac{C}{r}$. El valor neto $\frac{P}{\delta} - \frac{C}{r}$ constituye el último término de la solución expresada anteriormente.

Para determinar los valores de las constantes se debe utilizar consideraciones que aplican en los límites de las regiones. En la región en que $P < C$, cuando el precio disminuye lo suficiente, la probabilidad de que el precio supere la barrera de C se hace muy ínfima, al menos en el corto plazo. Es por esto que el valor presente esperado de los beneficios debiese irse a 0 y con ello también el valor del proyecto. Teniendo esto en consideración, se analiza la segunda raíz del valor del proyecto en esta región, $K_2 P^{\beta_2}$. Como $\beta_2 < 0$ y P es muy pequeño, entonces el término tiende a infinito, por lo que la única manera de que el valor sea 0, es que la constante K_2 debe ser igual a 0.

En la región en que $P > C$, cuando el precio aumenta lo suficiente, la opción de suspender la operación se hace muy improbable, por lo menos en el corto plazo, por lo que el valor de la opción de suspensión debiese ser 0. Teniendo esto en consideración, si se analiza la primera raíz del valor del proyecto en esta región, $B_1 P^{\beta_1}$, se tiene que $\beta_1 > 0$ y P es muy grande, entonces el término tiende a infinito, por lo que la única manera de que el valor sea 0, es que la constante B_1 debe ser igual a 0.

De aquí se obtiene que:

$$V(P) = \begin{cases} K_1 P^{\beta_1} & \text{si } P < C \\ B_2 P^{\beta_2} + \frac{P}{\delta} - \frac{C}{r} & \text{si } P > C \end{cases} \quad (16.61)$$

Luego, quedan solo dos constantes por determinar K_1 y B_2 , para ello se estudia el caso en que $P = C$, donde las dos regiones se encuentran. Aquí la solución $V(P)$ debe ser continuamente diferenciable. Se utiliza la condición de pegado suave, igualando los valores y derivadas de los dos componentes de solución en C , se obtiene:

$$K_1 C^{\beta_1} = B_2 C^{\beta_2} + \frac{C}{\delta} - \frac{C}{r} \quad (16.62)$$

$$\beta_1 K_1 C^{\beta_1-1} = \beta_2 B_2 C^{\beta_2-1} + \frac{1}{\delta} \quad (16.63)$$

Al resolver este sistema de ecuaciones resulta:

$$K_1 = \frac{C^{1-\beta_1}}{\beta_1-\beta_2} \left(\frac{\beta_2}{r} - \frac{\beta_2-1}{\delta} \right) \quad (16.64)$$

$$B_2 = \frac{C^{1-\beta_2}}{\beta_1-\beta_2} \left(\frac{\beta_1}{r} - \frac{\beta_1-1}{\delta} \right) \quad (16.65)$$

Ambas constantes deben ser positivas pues reflejan el valor esperado del beneficio de reabrir y suspender la operación en el futuro respectivamente. Para que las constantes sean positivas se necesita que:

$$r > \beta_1(r - \delta) \quad (16.66)$$

$$r > \beta_2(r - \delta) \quad (16.67)$$

Al determinarse el valor del proyecto $V(P)$, es posible obtener el valor de la opción de invertir en el proyecto, $F(P)$ y con ello la regla de inversión óptima. Dado que el precio sigue un movimiento geométrico Browniano se puede establecer que el valor de la oportunidad de inversión toma la forma:

$$F(P) = A_1 P^{\beta_1} + A_2 P^{\beta_2} \quad (16.68)$$

Dado que el precio sigue un movimiento geométrico Browniano, si el precio cae a 0 entonces se mantiene en 0 para siempre, lo que implica que $P = 0$ sea una barrera en la cual $F(0) = 0$, de donde se desprende que la constante $A_2 = 0$. La opción de invertir no será considerada en el caso que $P < C$, pues no hay motivo para incurrir en un costo I solo para mantener el proyecto sin operar. El término $A_1 P^{\beta_1}$ no puede satisfacer las condiciones de continuidad y pegado suave con $K_1 P^{\beta_1} - I$, por lo que se utilizará el valor de $V(P)$ determinado en la región en que $P > C$. Las ecuaciones de continuidad y de pegado suave quedan entonces como:

$$A_1(P^*)^{\beta_1} = B_2(P^*)^{\beta_2} + \frac{P^*}{\delta} - \frac{C}{r} - I \quad (16.69)$$

$$\beta_1 A_1(P^*)^{\beta_1-1} = \beta_2 B_2(P^*)^{\beta_2-1} + \frac{1}{\delta} \quad (16.70)$$

Se tienen así dos ecuaciones para dos incógnitas: A_1 y P^* (recordar que la constante B_2 fue determinada anteriormente). Al resolver el sistema por eliminación de A_1 resulta:

$$(\beta_1 - \beta_2)B_2(P^*)^{\beta_2} + (\beta_1 - 1)\frac{P^*}{\delta} - \beta_1\left(\frac{C}{r+I}\right) = 0 \quad (16.71)$$

Esta ecuación puede ser resuelta de manera sencilla al asignar valores numéricos a los parámetros, lo que entrega el precio gatillo P^* . Se puede verificar que de esta ecuación existe solo una única solución positiva para P^* la cual es mayor que $(C + rI)$, llamado costo completo *Marshalliano*, que considera tanto el costo de operación C sumado al interés en el costo capital de inversión y también que $V(P^*) > I$, lo que implica que el VAN del proyecto debe ser estrictamente mayor a 0 antes de que sea óptimo invertir.

Con producción variable

Se considera un proyecto, el cual una vez ejecutado, permite cierta flexibilidad en su operación en cualquier instante de tiempo. Esto porque es posible variar ciertos *inputs* como pueden ser la mano de obra o la materia prima que no requieren de ningún compromiso irreversible que se deba extender en el tiempo, luego la producción en cada instante dependerá del precio en ese momento. El proyecto tendrá así una curva de oferta con pendiente positiva.

Sea v un vector que denota alguna de las variables de operación que pueden ser modificadas (como por ejemplo, la mano de obra). La producción será una variable dependiente de v , la cual será denominada $h(v)$. Del mismo modo, el costo será una función de este vector, es decir, se tiene que $C(v)$. De aquí se puede formular una función instantánea del beneficio como:

$$\pi(P) = \max_v \{Ph(v) - C(v)\} \quad (16.72)$$

Ahora, se plantea un caso más general para el beneficio que el formulado en el apartado anterior, el cual era solamente binario. Luego, se considera la función de producción de Cobb-Douglas donde v corresponde a un escalar y la función es:

$$h(v) = v^\emptyset, \quad 0 < \emptyset < 1 \quad (16.73)$$

Al derivar e igualar a 0 el lado derecho de la función de beneficios, encontramos que el v que maximiza los beneficios es:

$$v = \left(\frac{\emptyset P}{c}\right)^{\frac{1}{1-\emptyset}} \quad (16.74)$$

Y con ello la función de oferta instantánea queda expresada como:

$$h(v) = \left(\frac{\emptyset P}{c}\right)^{\frac{\emptyset}{1-\emptyset}} \quad (16.75)$$

El flujo de beneficio cuando la variable del *input* es escogida correctamente está dado por:

$$\pi(P) = (1 - \emptyset) \left(\frac{\emptyset P}{c}\right)^{\frac{\emptyset}{1-\emptyset}} P^{\frac{1}{1-\emptyset}} \quad (16.76)$$

Para simplificar esta expresión, se establece que $\gamma = \frac{1}{1-\emptyset}$ y $K = (1 - \emptyset) \left(\frac{\emptyset P}{c}\right)^{\frac{\emptyset}{1-\emptyset}}$ con lo cual (16.76) queda como:

$$\pi(P) = KP^\gamma \quad (16.77)$$

Se calcula el valor del proyecto que corresponde al valor de todas las secuencias de opciones de operación. De aquí, la opción es ejercida en cada instante, pero con diferentes pares de v y P . Al asumir que el precio sigue un proceso geométrico Browniano, la ecuación diferencial que se obtiene para el valor del proyecto es:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 P^2 V''(P) + (r - \delta)PV'(P) - rV(P) + KP^\gamma = 0 \quad (16.78)$$

La parte homogénea de esta ecuación es idéntica a la obtenida anteriormente, pero la parte no homogénea es diferente y su solución es:

$$V(P) = \frac{KP^\gamma}{r - (r - \delta)\gamma - \frac{1}{2}\sigma^2\gamma(\gamma - 1)} \quad (16.79)$$

Este es el valor presente esperado del flujo de beneficios KP^γ calculado con el uso de la apropiada tasa de descuento ajustada por riesgo. De acuerdo a lo propuesto por Dixit y Pindyck (1994), se puede utilizar la tasa de descuento sin riesgo, siempre y cuando cambie el proceso estocástico del precio P , a modo de tener una tasa de crecimiento diferente ($r - \delta$). Entonces, para cada instante de tiempo t futuro y al utilizar los resultados de una distribución lognormal para $P(t)$ se tiene que:

$$\varepsilon'[K(P_t)^\gamma] = KP^\gamma e^{[\gamma(r-\delta) + \frac{1}{2}\sigma^2\gamma(\gamma-1)]t} \quad (16.80)$$

En la expresión anterior, P corresponde al precio inicial y ε' denota la expectativa calculada respecto a este nuevo proceso. Al multiplicar por e^{-rt} e integrar, se obtiene el valor presente en la ecuación anterior. Utilizando el Lema de Itô, se puede escribir la tasa de crecimiento esperada de P^γ , denominada α' . Entonces:

$$\alpha' = \frac{\varepsilon[dP^\gamma]}{P^\gamma} = \left\{ \gamma\alpha + \frac{1}{2}\sigma^2\gamma(\gamma-1) \right\} dt \quad (16.81)$$

La tasa μ' para un flujo de beneficio proporcional a P^γ es:

$$\mu' = r + \gamma(\mu - r) \quad (16.82)$$

Y dado esto, el retorno por conveniencia de P^γ debe ser:

$$\delta' = \mu' - r = r - (r - \delta)\gamma - \frac{1}{2}\sigma^2\gamma(\gamma-1) \quad (16.83)$$

Dado lo anterior, se puede establecer que el valor para el proyecto corresponde a:

$$V(P) = \frac{KP^\gamma}{\delta'} \quad (16.84)$$

Donde δ' debe ser positivo para que el valor del proyecto tenga sentido económico y γ debe ser un valor ubicado entre las dos raíces mencionadas a lo largo del capítulo (β_1 y β_2), en particular $\gamma < \beta_1$, lo que supone una nueva restricción en la potencia admisible de la función de producción de Cobb-Douglas. La solución para el valor de la opción de invertir toma la forma:

$$F(P) = A_1 P^{\beta_1} \quad (16.85)$$

Al usar las ecuaciones de continuidad y pegado suave para el precio P óptimo:

$$F(P^*) = V(P^*) - I \quad (16.86)$$

$$F'(P^*) = V'(P^*) \quad (16.87)$$

Al resolver este sistema, se obtiene que el precio P^* óptimo que gatilla la inversión, es decir, el precio que servirá como regla para determinar cuándo invertir satisface la relación:

$$\frac{K(P^*)^\gamma}{\delta'} = \frac{\beta_1}{\beta_1 - \gamma} I \quad (16.88)$$

De este modo, se puede examinar el efecto de la incertidumbre en la inversión. En un principio se consideró δ como un parámetro independiente de σ , donde si σ aumenta, la raíz β_1 se hace más pequeña y por tanto también lo hacía todo el término $\frac{\beta_1}{\beta_1 - \gamma}$. Esto deriva finalmente en que el precio P^* incremente. En otras palabras, un crecimiento en la incertidumbre aumenta el valor de la opción de invertir y, por consiguiente, amplifica el precio que gatilla la inversión. Sin embargo, se ha añadido un nuevo efecto, a medida que σ crece y se deja fijo el parámetro δ , se puede extraer de la ecuación (16.79) que δ' decrece y con ello también lo hace el precio P^* . Esto corresponde a una mayor incertidumbre dada por σ que implica un mayor valor esperado del beneficio, lo que es un estímulo para la inversión.

16.4 Un problema clásico en minería: Brennan y Schwartz (1985)

16.4.1 Antecedentes de apertura y cierre de faenas mineras

Considerando el escenario siempre incierto del precio de los *commodities* una de las principales interrogantes para una compañía minera es la decisión del tiempo óptimo para iniciar la producción en una faena, así como también cuándo tomar la decisión de cerrar o suspender las operaciones.

Hockley y Hockley (2015) analizan el concepto de cierre de faenas mineras, sus principales causas, y cómo ha ido evolucionando en la historia bajo distintos factores económicos, técnicos, sociales y ambientales. Dicho estudio fue desarrollado en base a más de 4.000 artículos relacionados al cierre de operaciones mineras publicados entre 1900 y 2010, utilizando una serie de programas computacionales para recopilarlos y caracterizarlos de acuerdo a variables de interés. Sin embargo, el análisis se centró principalmente en aquellos divulgados a partir de 1960, ya que en años previos no se utilizó suficiente énfasis numérico en la explicación de las causas para el cierre de las faenas.

Dentro de las principales conclusiones de Hockley y Hockley (2015) destacan:

- Los requerimientos para el cierre de una faena minera surgieron como materia de discusión a principios del siglo XX, cuando las escalas de explotación crecieron a un nivel tal que comenzaron a afectar o comprometer otros usos de tierras y aguas.
- Las débiles regulaciones, el crecimiento acelerado del ritmo de producción de las

faenas, y el mayor conocimiento en las consecuencias ambientales, derivó en la promulgación de legislaciones estrictas para el cierre de minas a partir de las décadas de 1960 y 1970.

- Desde la década de 1980 las normas establecidas para el cierre de operaciones mineras comenzaron a implementarse en los principales países productores de *commodities*, y los tópicos tratados en ella expandieron las materias habituales de derecho de tierra y agua a asuntos más estrictos de protección y remediación ambiental y social.
- La literatura técnica respecto al cierre de faenas mineras tuvo un auge a partir de 1990 y a comienzos del actual siglo, y consistió en dar guías y procedimientos rigurosos para el manejo de los procesos involucrados.

Dentro de las causas más frecuentes, uno de los factores determinantes para el cierre de una mina es la caída del precio del *commodity*. Así, por ejemplo, en el estudio de Moel y Tufano (2001) se analizó la causa de cierre de 169 minas de oro en Estados Unidos entre 1988 y 1997. Aunque variadas, en general el cierre se debe a consideraciones económicas (47%) y en segundo lugar al agotamiento de las reservas (43%). La descomposición completa se presenta en la Figura 16.16.

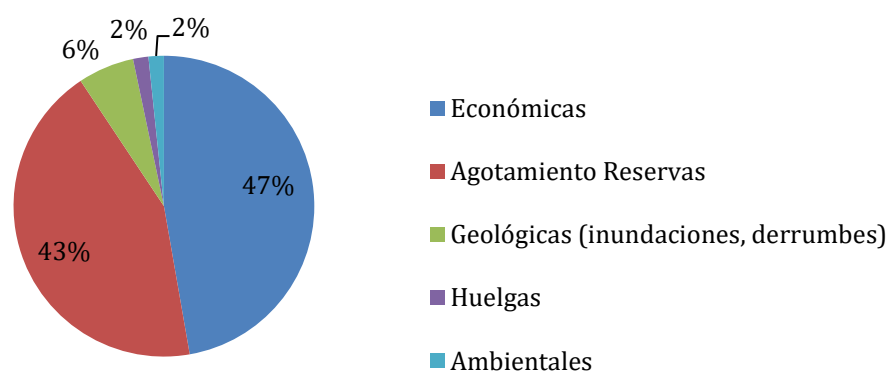


Figura 16.16. Razones de cierre en minas de oro (USA). Fuente: Moel y Tufano (2001)

Debido a que el precio de los *commodities* suele estar asociados a las decisiones de cierre, pero también de apertura (lo que se desprende de Auger y Guzmán, 2010), a continuación, se estudiará en más detalle el efecto que tiene sobre estas decisiones la introducción de la incertidumbre en precios.

RECUADRO 16.10

LEY 20.551 CIERRE DE FAENAS E INSTALACIONES MINERAS EN CHILE

La ley 20.551 que regula el cierre de faenas e instalaciones mineras en Chile fue publicada el 11 de noviembre de 2011 y entró en vigencia a partir del 11 de noviembre de 2012. Ese mismo año fue publicado el reglamento de esta ley.

Esta ley obliga a que todas las faenas mineras cuenten con un plan de cierre aprobado por el Sernageomin, previo al inicio de las operaciones mineras y que debe contener la totalidad de las instalaciones de la faena. Un plan de cierre es un proyecto de ingeniería en el cual se presentan un conjunto de medidas y acciones destinadas a mitigar los efectos que se derivan del desarrollo de la industria extractiva minera, en los lugares en que ésta se realice, de forma de asegurar la estabilidad física y química de las instalaciones, en conformidad a la normativa ambiental aplicable.

Previo a la Ley 20.551, todos los proyectos mineros ya contaban con planes de cierre de seguridad minera y obligaciones de cierre derivados de la Resolución de Calificación Ambiental (RCA) de cada proyecto en particular.

Las principales razones que motivaron el desarrollo de esta normativa son:

- Ausencia de una normativa específica, que regulara los aspectos negativos de la Industria Minera Extractiva.
- Materializar el concepto de “el que contamina paga”. La empresa minera debe hacerse cargo de las externalidades, e incorporarlas como un elemento más dentro del negocio minero.
- Impedir la generación de nuevas faenas mineras abandonadas.
- Ausencia de una garantía financiera que asegurara al Estado, el cumplimiento de las medidas de cierre comprometidas por la empresa.

De esta manera, los objetivos de la Ley de Cierre de Faenas e Instalaciones Mineras son:

- Resguardar la vida, salud y seguridad de las personas y del medio ambiente.
- Mitigar los efectos negativos de la industria.

- Evitar el abandono de faenas mineras después del cese de las operaciones.
- Asegurar la estabilidad física y química de los lugares en que se desarrolle la actividad minera.
- Establecer garantías financieras para el cierre efectivo de las faenas e instalaciones mineras.
- Crear un fondo de post-cierre para el monitoreo de faenas cerradas.

16.4.2 Planteamiento financiero del valor futuro del precio del *commodity*

El artículo de Brennan y Schwartz (1985) marcó un antes y un después en la aplicación de las opciones reales en economía, y fundamentalmente en economía minera. Dicha publicación fue pionera en la toma de decisiones respecto a invertir o abandonar un proyecto en evaluación. En ella se desarrolla un modelo matemático en el que el precio varía estocásticamente y a partir de esta incertidumbre se determina la decisión de abrir, suspender o cerrar una mina.

Para resolver este problema, se utilizará como ejemplo que el precio instantáneo se comporta como un proceso de geométrico Browniano, por lo que la tasa de retorno del precio estará dada por:

$$\frac{dP}{P} = \alpha dt + \sigma dz \quad (16.89)$$

Para simplificar el problema se considera que el rendimiento marginal neto del *commodity* se puede definir como función del precio instantáneo y del tiempo, denotado como $B(P, t)$. Esta función se explica como el valor generado por las fluctuaciones del precio en cada instante de tiempo. Sin embargo, se asume en este caso que la tasa de interés es constante e igual a r , con el propósito de estudiar la relación existente entre el precio instantáneo y futuro. De esta forma se define la función $F(P, \tau)$, que representa el precio futuro del *commodity* en un tiempo τ respecto al presente. De aquí, se puede escribir el cambio instantáneo del precio futuro mediante el Lema de Itô:

$$dF = \left(-F_{\tau} + \frac{1}{2}F_{PP}\sigma^2P^2\right)dt + F_P dP \quad (16.90)$$

Además, el retorno esperado por unidad monetaria invertida se puede expresar en función de un portafolio de inversiones. Este portafolio está constituido por la compra de $(F_P)^{-1}$, posiciones cortas en contratos futuros, la rentabilidad esperada del precio, $\frac{dP}{P}$; y el rendimiento marginal neto de adquirir una unidad adicional del *commodity*, $B(P)$:

$$\frac{dP}{P} + \frac{B(P)dt}{P} - \frac{(F_P)^{-1}}{P} dF = \frac{(F_P)^{-1}}{P} [F_\tau - \frac{1}{2}F\sigma^2P^2 + F_P B(P)]dt \quad (16.91)$$

Al no presentar características estocásticas el retorno del portafolio, dado por el lado izquierdo de la ecuación (16.91), este será igual a un portafolio libre de riesgo igual a $r dt$. De esta forma se obtiene la siguiente ecuación diferencial parcial con condición inicial:

$$\frac{1}{2}F_{PP}\sigma^2P^2 + F_P(rP - B) - F_\tau = 0 \quad (16.92)$$

$$F(P, 0) = P \quad (16.93)$$

La ecuación (16.93) representa la condición de borde para la resolución de la ecuación diferencial parcial planteada en (16.92). Esta condición establece que si $\tau = 0$, el precio futuro será igual al precio presente. De esta forma, se puede reescribir la ecuación (16.90) en función de las soluciones obtenidas en (16.91):

$$dF = F_P(P(\alpha - r) + B)dt + F_P P \sigma dz \quad (16.94)$$

De este modo, ahora se puede derivar la ecuación diferencial parcial para la situación asociada al problema minero. Para esto se considera que la función de beneficio de la mina depende del precio, P ; las reservas de la mina, S ; políticas operacionales, ϕ ; y una variable binaria que determina si la mina se encuentra abierta (1) o cerrada (0), que se denotará por el índice i . Además, las políticas operacionales se describen mediante la tasa de extracción cuando la mina se encuentra abierta, definida como $q(P, S, t)$. Por lo tanto, se pueden establecer tres posibles escenarios de precios para el *commodity*:

- $P_1(S, t)$: Precio en el cual la mina se encuentra cerrada o abandonada, en caso de que haya estado abierta previamente.
- $P_2(S, t)$: Precio en el cual la mina se encuentra abierta, si estuvo cerrada previamente.
- $P_0(S, t)$: Precio en el cual la mina se encuentra abandonada, si ya se encuentra cerrada.

16.4.3 Resolución analítica del problema

A partir del planteamiento anterior descrito por Brennan y Schwartz (1985), Dixit y Pindyck (1994) desarrollan las opciones reales de apertura y cierre para una mina.

Supóngase siguiendo Dixit y Pindyck (1994), un proyecto minero cuyo valor es una función del precio del *commodity* que se va a extraer, y a su vez este precio sigue un movimiento

geométrico Browniano. El dueño del proyecto tiene dos opciones: puede esperar hasta que el precio sea suficientemente alto e igual a P_H para invertir I , y así comenzar a operar la mina (suponiendo por ahora que no existe tiempo de construcción). En caso de que ya se encontrara en producción, entonces la mina se puede mantener operando hasta que el precio baje a un valor igual a P_L , en cuyo caso es conveniente abandonar la mina pagando un costo de cierre igual a E (también de forma instantánea). Se supone acá que se mantiene abierta la opción de que una vez el precio alcance nuevamente el valor P_H se opte por reinvertir I para retomar la producción.

Se busca maximizar así el valor VAN (V) utilizando la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman obtenida a través de programación dinámica estocástica:

$$rV = \max_q \left\{ \pi + \frac{1}{dt} E(dV) \right\} \quad (16.95)$$

Para el análisis se considera un precio que evoluciona según la ecuación diferencial estocástica $dP = \alpha P dt + \sigma P dz$. El término α es una constante positiva que representa la tasa de rendimiento en el tiempo y σ es una constante que representa la volatilidad del precio. Existe una tasa descuento r y un costo unitario fijo C . La producción se considera consistente de una única unidad. La rentabilidad ajustada al riesgo viene dada por μ y el retorno por conveniencia (*convenience yield*) es δ ,¹⁰⁴ donde se tiene la relación $\delta = r - \alpha$.

Mediante programación dinámica estocástica es posible obtener el valor de la mina según:

$$rV = 0 + \frac{1}{dt} E(dV) \quad \text{si la mina está cerrada} \quad (16.96)$$

$$rV = \pi + \frac{1}{dt} E(dV) \quad \text{si la mina está abierta} \quad (16.97)$$

Para resolver lo anterior, se tiene que $V = V(t, S, P)$, por lo tanto aplicando el Lema de Itô:

$$dV = V_t dt + V_S dS + V_P dP + \frac{1}{2} V_{PP} (dP)^2 \quad (16.98)$$

Para simplificar la exposición, de forma de transformar las ecuaciones diferenciales parciales en ecuaciones diferenciales ordinarias, Brennan y Schwartz asumen que $V_t = 0$ y $V_S = 0$.

¹⁰⁴ El retorno por conveniencia es el beneficio o premio que el poseedor de un activo físico exige por sobre el que tendría si solo poseyera un activo financiero asociado al activo físico.

Aunque esta última condición contradice todo lo visto en este libro (pues asume implícitamente que los recursos son infinitos y por tanto no agotables), se introducirá en primer lugar la solución bajo esta condición asumiendo que el activo subyacente se encuentra lejos del agotamiento. De aquí:

$$dV = V_P dP + \frac{1}{2} V_{PP} (dP)^2 \quad (16.99)$$

Pero como se sabe que:

$$dP = \alpha P dt + \sigma P dz$$

Entonces se obtiene que:

$$dV = (\alpha P V_P + \frac{1}{2} \sigma^2 P^2 V_{PP}) dt + \sigma P V_P dz \quad (16.100)$$

Aplicando a la expresión anterior el operador de esperanza matemática:

$$E(dV) = (\alpha P V_P + \frac{1}{2} \sigma^2 P^2 V_{PP}) dt \quad (16.101)$$

$$\frac{1}{dt} E(dV) = \alpha P V_P + \frac{1}{2} \sigma^2 P^2 V_{PP} \quad (16.102)$$

Pero, en este caso:

$$V_P = V'(P) \quad (16.103)$$

$$V_{PP} = V''(P) \quad (16.104)$$

$$\alpha = r - \delta \quad (16.105)$$

Luego:

$$\frac{1}{dt} E(dV) = (r - \delta) P V'(P) + \frac{1}{2} \sigma^2 P^2 V''(P) \quad (16.106)$$

A continuación, se estudiarán los dos casos de interés, que corresponde a la mina cerrada y abierta. Antes de introducir estos casos, y a modo de ejemplo se muestran conceptualmente las zonas de cierre y apertura de manera esquemática dada la evolución de un precio de un *commodity*.

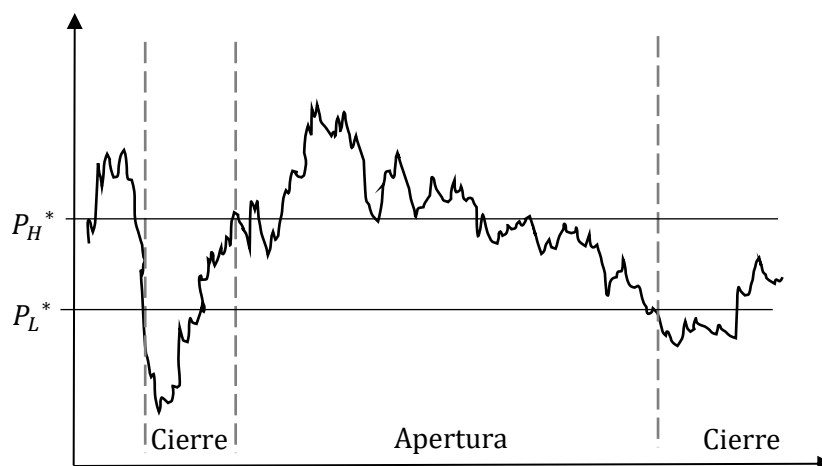


Figura 16.17. Precio histórico de un commodity con zonas de cierre y apertura

Mina cerrada

Si la mina se encuentra cerrada (precio entre 0 y P_H), se debe reemplazar (16.106) en (16.96) con lo cual se debe satisfacer la siguiente ecuación (donde V_0 denota el valor de la mina estando cerrada):

$$\frac{1}{2}\sigma^2 P^2 V_0''(P) + (r - \delta)P V_0'(P) - rV_0(P) = 0 \quad (16.107)$$

La expresión anterior corresponde a una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden y su solución viene dada por:

$$V_0(P) = A_1 P^{\beta_1} + A_2 P^{\beta_2} \quad (16.108)$$

Sabiendo que $\beta_1 > 1$ y $\beta_2 < 0$

$$\beta_{1,2} = \frac{1}{2} - \frac{r - \delta}{\sigma^2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{r - \delta}{\sigma^2}\right)^2 + \frac{2r}{\sigma^2}}$$

Además, debe cumplirse que si el precio es idénticamente nulo entonces $V_0(0) = 0$. Es por esta condición que $A_2 = 0$. Por lo tanto, se obtiene que el valor de una mina cerrada viene dado por:

$$V_0(P) = A_1 P^{\beta_1} \quad (16.109)$$

Mina abierta

Por otro lado, si la mina está abierta (precio entre P_L y ∞), se debe reemplazar (16.106) en (16.97) con lo cual se obtiene la siguiente ecuación (donde V_1 es el valor de la mina abierta u operando):

$$\frac{1}{2}\sigma^2 P^2 V_1''(P) + (r - \delta)P V_1'(P) - rV_1(P) + P - C = 0 \quad (16.110)$$

Se aprecia su similitud con el caso de la ecuación diferencial de la mina cerrada. Sin embargo, en este caso aparece adicionalmente el término $(P - C)$, que representa el beneficio instantáneo de operar la mina en cada instante de tiempo (cuando está abierta). Resolviendo la ecuación (16.110) se obtiene:

$$V_1(P) = B_1 P^{\beta_1} + B_2 P^{\beta_2} + \frac{P}{\delta} - \frac{C}{r} \quad (16.111)$$

Mientras que los dos primeros términos representan el valor de la opción de abandono, los últimos dos términos representan el valor del proyecto estando activo a perpetuidad, es decir, sin ejecutar su cierre o cese de operaciones. Utilizando condiciones de borde, se nota que $V_1(0)$ no es relevante para el problema, pues en este caso la mina está cerrada y no abierta. Ahora bien, si se toma $V_1(\infty)$, la mina siempre estará abierta, obteniéndose la solución particular para el valor de la mina como $V_1(\infty) = \frac{P}{\delta} - \frac{C}{r}$, llamado también como “valor fundamental de la mina”. Debido a esta condición, el primer término de la ecuación (16.111) resulta igual a cero, ya que, a un precio infinito, el valor de la opción de abandono tiende a cero, es decir B_1 resulta cero, por lo que finalmente se obtiene:

$$V_1(P) = B_2 P^{\beta_2} + \frac{P}{\delta} - \frac{C}{r} \quad (16.112)$$

Por lo tanto, las cuatro variables que se deben determinar para encontrar la solución a este problema son A_1, B_2, P_H, P_L . Para ello se establece el siguiente sistema de ecuaciones:

$$V_1(P_H) - I = V_0(P_H) \quad \text{condición de continuidad para } P_H \quad (16.113)$$

$$V_1(P_L) = V_0(P_L) - E \quad \text{condición de continuidad para } P_L \quad (16.114)$$

$$V_1'(P_H) = V_0'(P_H) \quad \text{condición de pegado suave para } P_H \quad (16.115)$$

$$V_1'(P_L) = V_0'(P_L) \quad \text{condición de pegado suave para } P_L \quad (16.116)$$

Se aprecia en las condiciones de continuidad (16.113) y (16.114) que a un precio P_H la empresa es indiferente a abrir o cerrar la mina considerando una inversión I , y a su vez en un precio P_L

ocurre la misma situación, pero considerando un costo de cierre E . Ahora bien, reemplazando $V_0(P)$ y $V_1(P)$ de las ecuaciones (16.109) y (16.112) en estas cuatro condiciones, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$-A_1 P_H^{\beta_1} + B_2 P_H^{\beta_2} + \frac{P_H}{\delta} - \frac{C}{r} = I \quad (16.117)$$

$$-A_1 P_L^{\beta_1} + B_2 P_L^{\beta_2} + \frac{P_L}{\delta} - \frac{C}{r} = -E \quad (16.118)$$

$$-\beta_1 A_1 P_H^{\beta_1-1} + \beta_2 B_2 P_H^{\beta_2-1} + \frac{1}{\delta} = 0 \quad (16.119)$$

$$-\beta_1 A_1 P_L^{\beta_1-1} + \beta_2 B_2 P_L^{\beta_2-1} + \frac{1}{\delta} = 0 \quad (16.120)$$

La resolución del sistema (16.117)-(16.120) no es trivial, puesto que su no-linealidad impide alcanzar una solución algebraica. Es por eso que la próxima sub-sección se presentará una resolución numérica del problema.

16.4.4 Resolución numérica del problema

Para ilustrar la forma de la solución del sistema (16.117)-(16.120) se utilizarán parámetros de una empresa minera de cobre referente al año 1992, analizada por Dixit y Pindyck (1994) para ilustrar el comportamiento del modelo y cómo es afectado según algunas variables. Los parámetros utilizados corresponden a:

- Inversión $I = 20 \text{ MUSD}$.
- Costo cierre $E = 2 \text{ MUSD}$.
- Costo $C = 0,80 \frac{\text{USD}}{\text{lb}}$.
- Rentabilidad ajustada al riesgo $\mu = 0,06$.
- Tasa crecimiento $\alpha = 0,02$.
- Retorno por conveniencia (*rate convenience yield*) $\delta = \mu - \alpha = 0,04$.
- Tasa libre de riesgo $r = 0,04$.
- Volatilidad $\sigma = 0,2$.

La resolución numérica del sistema anterior conlleva a la solución de P_L y P_H mostradas en la Figura 16.18.

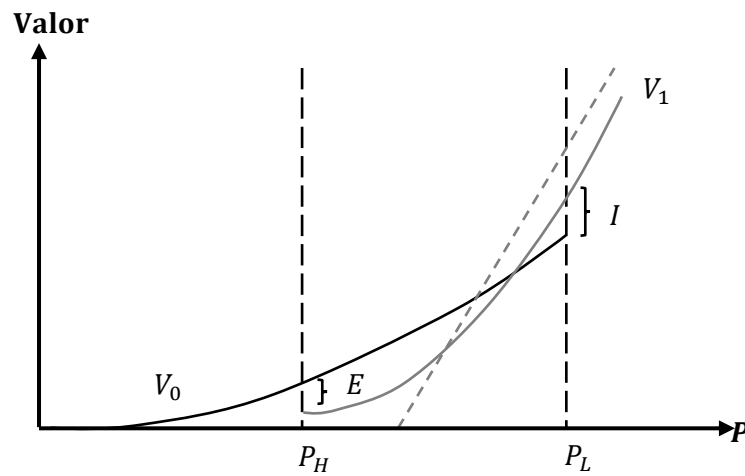


Figura 16.18. Resultados P_H y P_L . Fuente: Elaboración propia en base a Dixit y Pindyck (1994).

En esta figura se ilustra el valor de la firma activa V_1 y no activa V_0 como funciones respecto al precio P , ilustrándose también los precios de gatillo $P_H = \$0,88$ y $P_L = \$0,79$. Se aprecia en dichos límites la transición de un estado a otro considerando costo de cierre E e inversión I . De este modo, para un precio P_L se aprecia que el valor de la mina cerrada excede al de la mina abierta por una diferencia de E que sería el costo que debe incurrir la mina activa para abandonar la faena.

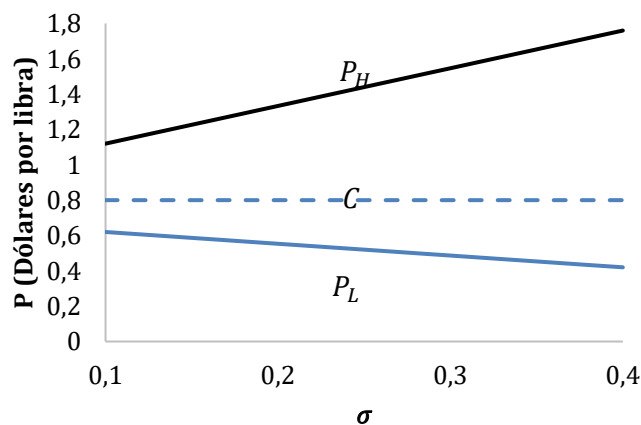


Figura 16.19. Variación de P_H y P_L respecto a σ . Fuente: Dixit y Pindyck (1994)

En la Figura 16.19 se observa cómo varían los precios P_H y P_L en función de σ . A medida que se agrega volatilidad al precio, más alto se exige que sea el valor de P_H para hacer atractiva la

inversión debido al incremento en el riesgo. Del mismo modo, el precio de cierre P_L disminuye a medida que aumenta la volatilidad del precio ya que, a pesar de encontrarse en un escenario desfavorable, la propia volatilidad podría producir una repentina alza que favorezca permanecer activo. En conclusión, la volatilidad en el precio producirá un aumento en la zona de inacción o *status quo*.

Tanto en el artículo de Dixit y Pindyck (1994), como en el de Brennan y Schwartz (1985), se describe que se cumple $P_H > P_L$. Como consecuencia, el precio podría bajar de P_H e igualmente ser conveniente mantener abierta la mina, lo que se explica debido a la existencia del costo de cierre E . Mientras más grande sea E , más bajo será P_L , y de igual forma, mientras mayor sea la inversión I para abrir la mina, más alto será P_H . Lo anterior refleja las opciones reales en minería en su máxima expresión.

RECUADRO 16.11

DOS EXTENSIONES AL MODELO EN ESTUDIO

Avinash Dixit (nacido el 6 de agosto de 1944 en Bombay, India), quien continuando la línea de investigación de los estudios de Brennan y Schwartz (1985), publicó el año 1989 el libro "*Entry and Exit Decisions under Uncertainty*" realizado dos extensiones al modelo antes presentado:

- **Precio con reversión a la media**

Si el comportamiento del precio posee reversión a la media, se producirá que el rango delimitado por P_H y P_L se expandirá con respecto al caso en que se utiliza un precio geométrico Browniano; es decir, la zona de inacción será más amplia.

Por ejemplo, en el caso que el precio actual sea alto, una firma que se encuentre inactiva será más aversa a invertir para entrar en producción, ya que por la naturaleza del comportamiento del precio probablemente bajará en el futuro para restituir el valor a la media de largo plazo. Por lo tanto, P_H se elevará. Por el contrario, si el precio actual es bajo, una firma activa será más reacia a cerrar la mina considerando la probabilidad de un incremento de éste para aproximarse al precio promedio. Por ende, P_L disminuirá.

Idéntico fenómeno produce una legislación en que se fija un precio máximo (mayor a P_H) y/o un precio mínimo (menor a P_L) a un producto en particular. Una firma inactiva esperará un precio mayor respecto al problema sin restricción, debido a que considera los beneficios que deja de recibir si el precio subiera más que el precio establecido por la ley. De igual modo ocurre con una firma activa y su postergación en la decisión de cerrar debido al precio mínimo garantizado por el Estado. Dixit propone que un acotamiento suficiente de precio mínimo y máximo fijado por ley, inducirá que no se produzcan entradas o salidas al rubro, es decir, que las minas no cerrarán (considerando recursos infinitos) y existirán firmas inactivas que no invertirán para comenzar a producir.

- **Producción variable**

Hasta el momento se ha asumido una producción unitaria. Si ahora se considera una producción q variable, y sin tomar en cuenta economías de escalas o costos fijos, una firma actualmente activa, en los escenarios más desfavorables de precios, podrá reducir sus pérdidas a niveles despreciables escogiendo una producción menor (y que cumpla el mínimo requerido para el correcto funcionamiento del sistema minero).

Lo anterior producirá que ambos precios P_H y P_L disminuyan. La razón se explica por la incorporación de flexibilidad al sistema, que por un lado incentivará a invertir para comenzar la producción de inmediato, y por otro lado será menos atractivo el cierre de la faena por esta minimización en las pérdidas económicas.

16.4.5 Comparación con la microeconomía clásica

En la microeconomía clásica, la teoría de inversión y abandono de un proyecto se basa en los conceptos Marshallianos, los que consideran costos medios y costos variables a largo y corto plazo, respectivamente. De esta forma, el costo promedio de una operación a largo plazo consiste en la suma de los costos operacionales y el interés devengado por la inversión, en donde la firma estará dispuesta a invertir si esta suma es menor a un precio P , es decir, $(C - rI)$. Similarmente, una firma debería abandonar si en el corto plazo el precio es menor que sus costos variables.

Sin embargo, cuando existe un costo de cierre E asociado al abandono de la operación, la firma tiene que tomar en cuenta los intereses relacionados a este costo. Lo anterior significa que la decisión de cerrar en el corto plazo está dada por $(C - rE)$. Esto implica que los conceptos

Marshallianos buscan comparar el retorno de la inversión dado por $\frac{P-C}{I}$ con respecto al retorno de dejar de invertir considerando un costo de cierre E , es decir, $\frac{C-P}{E}$.

Este resultado indica que, cuando la rentabilidad asociada a seguir con el proyecto es mayor que la rentabilidad de cerrar la operación, es conveniente mantenerse operando. No obstante, en el análisis Marshalliano se considera típicamente que el precio se mantiene constante en el tiempo.

La pregunta que surge tras este análisis es cómo se puede relacionar el precio P_H con el precio propuesto por las teorías de Marshall ($C + rI$) y, de forma análoga, cómo se relaciona el precio P_L con ($C - rE$). Para encontrar la respuesta a esta pregunta, se define la siguiente función diferencial entre el valor de la mina abierta y cerrada:

$$G(P) = V_1(P) - V_0(P) \quad (16.121)$$

$$G(P) = -A_1 P^{\beta_1} + B_2 P^{\beta_2} + \frac{P}{\delta} - \frac{C}{r} \quad (16.122)$$

Esta función se puede establecer para cualquier precio P . No obstante, $V_1(P)$ corresponde al valor de la firma si se encuentra abierta con dominio en el intervalo (P_L, ∞) , y $V_0(P)$ es el valor de la firma si se encuentra cerrada con dominio en $(0, P_H)$. Por consiguiente, la función $G(P)$ se mueve entre el rango de (P_L, P_H) y se puede interpretar como el valor incremental de la firma de convertirse en activa, o bien, qué tanto más valioso es encontrarse activa que no activa en términos cuantitativos.

Ahora bien, utilizando condiciones de borde para $G(P)$, se desprenden las siguientes ecuaciones:

$$G(P_H) = I \quad \text{condición de continuidad para } P_H \quad (16.123)$$

$$G(P_L) = -E \quad \text{condición de continuidad para } P_L \quad (16.124)$$

$$G'(P_H) = 0 \quad \text{condición de pegado suave para } P_H \quad (16.125)$$

$$G'(P_L) = 0 \quad \text{condición de pegado suave para } P_L \quad (16.126)$$

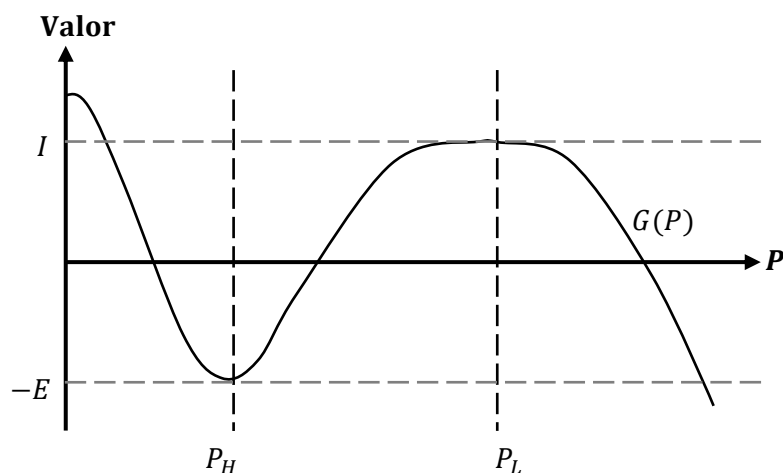


Figura 16.20. Valor del Activo vs Precio. Fuente: Dixit y Pindyck (1994)

De la Figura 16.20 se observa que para los precios P_H y P_L la curva $G(P)$ necesariamente será cóncava y tangente a I en su máximo, y convexa y tangente a $-E$ en su mínimo respectivamente. Si utilizamos las ecuaciones anteriores y evaluamos en P_H y P_L , se obtiene que:

- $P_H > C + rI$
- $P_L < C - rE$

De estas dos inecuaciones se aprecia que en contraste al modelo Marshalliano, los límites P_H y P_L se encuentran a una mayor distancia entre sí. La presencia de incertidumbre en los precios futuros afecta el momento de decisión acerca de si activar un proyecto, o desactivar éste en caso de ya encontrarse activado, de manera tal que estas decisiones son ejecutadas con mayor cautela y no de forma tan inmediata como es el caso de precios determinísticos. En conclusión, la incertidumbre provocará un aumento en la zona de pasividad o inacción como fue descrito en la Figura 16.19.

16.4.5 Resolución analítica del problema incorporando suspensión de la mina

Adicional a lo estudiado en las secciones anteriores, en donde se analizaron los casos cuando la mina se encuentra en operación y en abandono, se agrega una tercera opción que consiste en la suspensión temporal de la mina, con un costo de mantención asociado.

La ventaja de esta nueva opción es que permite dividir el cierre de la operación en dos etapas. Una primera etapa donde el proyecto se suspende temporalmente, con un costo de cierre E_M .

Y una segunda etapa de abandono en que se liquidan gradualmente los valores residuales de los activos físicos restantes, de tal forma de destinar este beneficio devengado en otros ámbitos atingentes al cierre de la mina. El costo asociado a la pérdida de valor de estos activos en la segunda etapa se denota E_S , y además se cumple que el costo total de cierre estudiado al inicio de la sección, E , equivale a la suma de ambos costos, es decir, $E = E_M + E_S$.

Dividir el cierre en dos etapas permite considerar que cuando la mina se encuentra suspendida, se puede incurrir en un costo D para reinstalar el proyecto nuevamente y en un costo R asociado a reactivarla hasta dejarla operativa. De esta forma, se cumple que la suma de estos costos es menor que la inversión completa del proyecto, lo que permite considerar un caso intermedio entre las opciones de apertura y cierre de por vida de la mina. Lo anterior solamente tiene sentido si el costo de mantención M es menor al costo de operación C . Además, si se asume que la inversión I es mayor que el costo de reactivación R , entonces se cumple que $P_H > P_R$, siendo este último que permite la reactivación de la faena.

Por lo tanto, si la mina se puso en marcha con una inversión I asociada a un precio P_H del *commodity*, la firma tiene la opción de suspender temporalmente las operaciones si el precio baja hasta alcanzar un precio P_M o seguir operando. Si la faena llega a ser suspendida, se tiene que incurrir en un costo de mantención M lo que permite que ocurran dos posibles escenarios:

- El precio vuelve a subir hasta alcanzar un precio P_R , correspondiente al precio de reactivación de la operación, incurriendo en un costo R para reactivar la producción.
- El precio sigue bajando hasta alcanzar un precio P_S , en donde la empresa abandona la faena con un costo E_S , puesto que en esta instancia se empiezan a liquidar los activos a su valor residual para pagar la restauración del lugar u otros costos de cierre asociado al término de la operación.

Mediante la aplicación de estos conceptos se pueden volver a plantear matemáticamente los valores del proyecto para estos tres escenarios:

Mina cerrada

- Si la mina está cerrada (precio entre 0 y P_H), se debe satisfacer la siguiente ecuación (donde V_0 corresponde al valor de la mina estando cerrada):

$$V_0(P) = A_1 P^{\beta_1} \quad (16.127)$$

Esta expresión es el resultado del mismo procedimiento utilizado para la ecuación (16.109).

Mina abierta

- Si la mina está abierta (precio entre P_L y ∞), se debe satisfacer la siguiente ecuación (donde V_1 es el valor de la mina abierta):

$$V_1(P) = B_2 P^{\beta_2} + \frac{P}{\delta} - \frac{C}{r} \quad (16.128)$$

Esta expresión es el resultado del mismo procedimiento utilizado en la ecuación (16.112).

Mina suspendida

Si la mina está suspendida (precio entre P_S y P_R), se debe satisfacer la siguiente ecuación (donde V_m es el valor de la mina mientras se encuentra suspendida):

$$V_m(P) = D_1 P^{\beta_1} + D_2 P^{\beta_2} - \frac{M}{r} \quad (16.129)$$

Se puede apreciar que, a diferencia de los casos anteriores, en este caso no es posible eliminar términos debido a que los rangos de precios existentes no incluyen ni cero ni infinito. De aquí, el primer término de la expresión anterior corresponde al valor de reactivar la operación, el segundo término representa el valor de cerrar dicha operación, y, por último, el tercer término corresponde a la capitalización del costo de mantenimiento asumiendo que se mantendrá en el estado actual a perpetuidad.

Al integrar las ecuaciones de continuidad y pegado suave para las condiciones actuales, se obtiene el siguiente sistema:

$$V_1(P_H) - I = V_0(P_H) \quad \text{condición de continuidad para } P_H \quad (16.130)$$

$$V_1(P_M) = V_m(P_M) - E_M \quad \text{condición de continuidad para } P_M \quad (16.131)$$

$$V_m(P_R) = V_1(P_R) - R \quad \text{condición de continuidad para } P_R \quad (16.132)$$

$$V_m(P_S) = V_0(P_S) - E_S \quad \text{condición de continuidad para } P_S \quad (16.133)$$

$$V_1'(P_H) = V_0'(P_H) \quad \text{condición de pegado suave para } P_H \quad (16.134)$$

$$V_m'(P_M) = V_1'(P_M) \quad \text{condición de pegado suave para } P_M \quad (16.135)$$

$$V_1'(P_R) = V_m'(P_R) \quad \text{condición de pegado suave para } P_R \quad (16.136)$$

$$V_0'(P_S) = V_m'(P_S) \quad \text{condición de pegado suave para } P_S \quad (16.137)$$

Se analiza en primer lugar la interacción entre la suspensión de la mina y la reactivación de esta. Despejando con las condiciones anteriores se obtiene lo siguiente:

$$-D_1 P_R^{\beta_1} + (B_2 - D_2) P_R^{\beta_2} + \frac{P_R}{\delta} - \frac{C-M}{r} = R \quad (16.138)$$

$$-D_1 P_M^{\beta_1} + (B_2 - D_2) P_M^{\beta_2} + \frac{P_M}{\delta} - \frac{C-M}{r} = -E_M \quad (16.139)$$

$$-\beta_1 D_1 P_R^{\beta_1-1} + \beta_2 (B_2 - D_2) P_R^{\beta_2-1} + \frac{1}{\delta} = 0 \quad (16.140)$$

$$-\beta_1 D_1 P_M^{\beta_1-1} + \beta_2 (B_2 - D_2) P_M^{\beta_2-1} + \frac{1}{\delta} = 0 \quad (16.141)$$

A partir de esto se pueden determinar las cuatro incógnitas dadas por P_R, P_M, D_1 y $(B_2 - D_2)$. Finalmente, utilizando las condiciones de continuidad y pegado suave descritas, se despejan las cuatro ecuaciones restantes para la activación de la mina y su abandono:

$$-A_1 P_H^{\beta_1} + B_2 P_H^{\beta_2} + \frac{P_H}{\delta} - \frac{C}{r} = I \quad (16.142)$$

$$(D_2 - A_2) P_S^{\beta_1} + D_2 P_S^{\beta_2} - \frac{M}{r} = -E_S \quad (16.143)$$

$$-\beta_1 A_1 P_H^{\beta_1-1} + \beta_2 B_2 P_H^{\beta_2-1} + \frac{1}{\delta} = 0 \quad (16.144)$$

$$-\beta_1 (D_1 - A_1) P_S^{\beta_1-1} + \beta_2 D_2 P_S^{\beta_2-1} = 0 \quad (16.145)$$

La resolución del sistema (16.138)-(16.145) no es trivial, por lo que a continuación se analizan distintos escenarios y los efectos que tiene en las variables descritas según una resolución numérica.

16.4.6 Resolución numérica del problema incorporando suspensión de la mina

A continuación, se utilizan parámetros utilizados por Dixit y Pindyck (1994) para ilustrar el comportamiento del modelo con la posibilidad de suspensión incorporada, y cómo es afectado según distintas variables.

- Inversión $I = 2 \text{ MUSD}$.
- Costo cierre $E = 0 \text{ MUSD}$.

- Costo $C = 1 \frac{USD}{lb}$.
- Rentabilidad ajustada al riesgo $\mu = 0,05$.
- Tasa crecimiento $\alpha = 0$.
- Retorno por conveniencia (*rate convenience yield*) $\delta = \mu - \alpha = 0,05$.
- Tasa libre de riesgo $r = 0,05$.
- Volatilidad $\sigma = 0,2$.

Utilizando las ecuaciones (16.142)-(16.145), se resuelve el sistema y se obtienen los valores $P_H = \$1,6$ y $P_L = \$0,71$. La Figura 16.21 ilustra el comportamiento del modelo con respecto a la tasa de descuento.

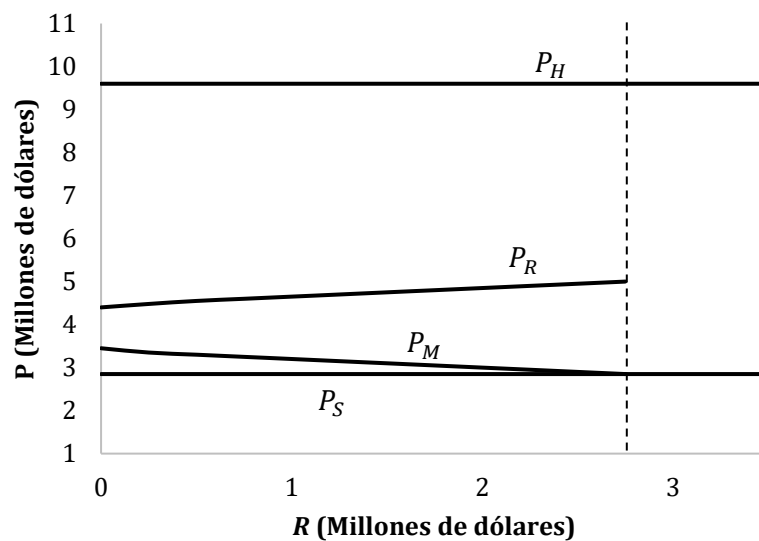


Figura 16.21. Umbral crítico respecto a R . Fuente: Dixit y Pindyck (1994)

En la Figura 16.21 se puede observar que P_R y P_S aumentan a medida que incrementa r y P_M disminuye lentamente. Además, la mina del ejemplo mantiene una opción de viabilidad en cuanto su costo de reactivación sea menor a 2,7 millones de dólares.

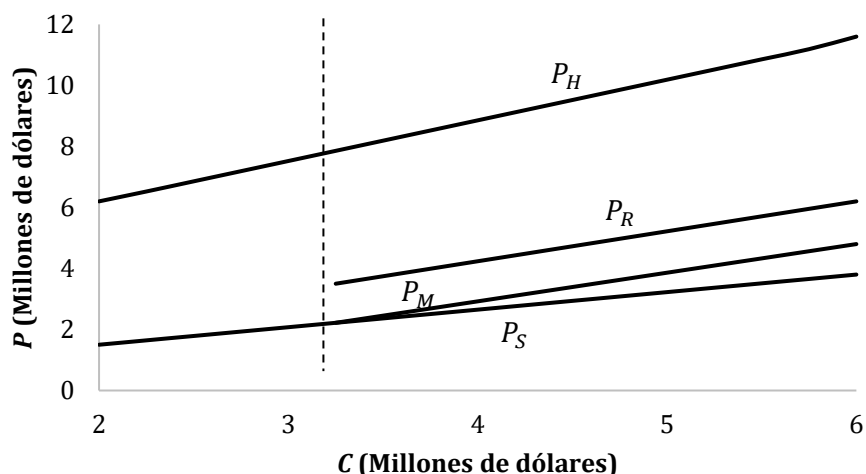


Figura 16.22. Umbral crítico respecto a C. Fuente: Dixit y Pindyck (1994)

Por otra parte, y tal como cabe esperar, en la Figura 16.22 se puede observar que a mayor valor del costo operacional C , entonces el umbral crítico aumenta en su conjunto, es decir, aumenta el precio límite de todas las opciones.

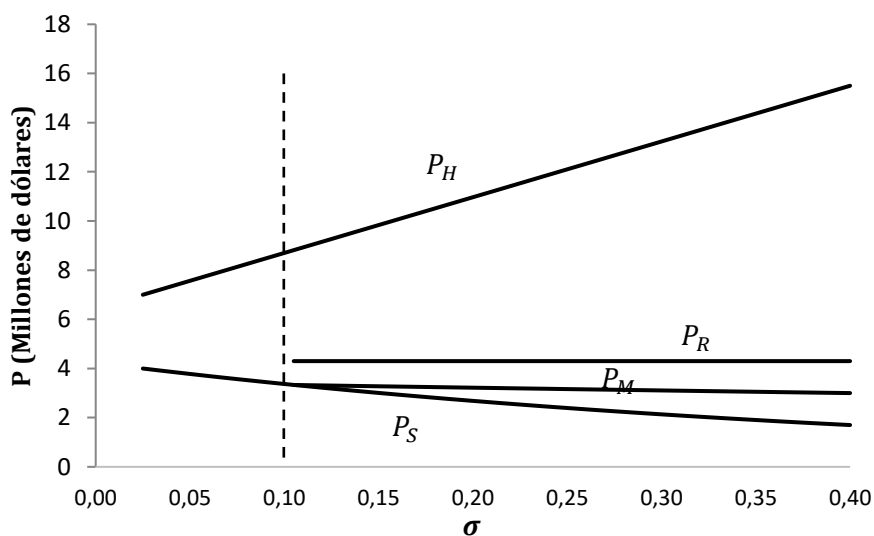


Figura 16.23. Umbral crítico respecto a la variabilidad. Fuente: Dixit y Pindyck (1994)

En la Figura 16.23 se muestra el umbral crítico en función de la desviación estándar del cambio anual del precio. En especial P_H y P_S son muy sensibles a σ . De hecho, para valores grandes de esta última variable, la zona de suspensión se hace considerable. Es interesante lo que pasa con una desviación cercana a 0,1 pues P_S y P_M coinciden por lo que no hay una opción real,

esto sucede debido a que no hay una probabilidad razonable de un incremento substancial del precio.

16.4.7 Enfoque financiero del problema incorporando impuestos y expropiación

La solución obtenida por Brennan y Schwartz (1985) permitió generar un modelo sobre la variación del valor de la mina, con el propósito de comprender el comportamiento del beneficio de un proyecto minero frente a la posibilidad de apertura o cierre de la operación. Sin embargo, los autores incorporaron impuestos en la resolución del problema, lo que permite generalizar el modelo a un caso incluso más realista en sentido financiero. Para esto se plantearon las siguientes variables, con el propósito de representar matemáticamente el flujo de caja después de impuestos:

$$q(P - C) - M(1 - i) - \lambda_i V - \tau \quad (16.146)$$

- $C(q, S, P, t)$: costo promedio de producir a una tasa de extracción q en un tiempo t , cuando las reservas del yacimiento son S .
- $M(t)$: costo ajustado después de impuestos de mantenimiento de la mina cuando se encuentra cerrada.
- $\lambda_i (i = 0, 1)$: proporción de la tasa de impuestos al valor de la mina cuando se encuentra cerrada o abierta.
- $\tau(q, S, P, t)$: recaudación total de impuestos a la renta y *royalties* cuando la mina se encuentra operando. Esta puede ser expresada mediante la siguiente ecuación en función de t_1 y t_2 , siendo estas los *royalties* e impuestos a la renta:

$$\tau(q, S, P, t) = t_1 q P + \max\{t_2 q [P(1 - t_1) - C], 0\} \quad (16.147)$$

Los parámetros λ_0 y λ_1 se pueden interpretar como la intensidad de un proceso de Poisson que domina el evento de una expropiación sin ser compensada para el propietario de la mina. Por consiguiente, la pérdida esperada producto de una expropiación es el término $\lambda_i V$, esto significa que la ecuación (16.133) representa el flujo de caja neto de un proyecto minero considerando un costo esperado de expropiación. De este modo, se asume que el problema deja de ser determinista, dado la probabilidad existente de expropiación.

Se considera luego que se compran (V_P/F_P) contratos futuros con una rentabilidad del portafolio dado por posiciones largas en la mina y posiciones cortas en el activo libre de riesgo.

De este modo, el retorno del portafolio será la suma del retorno de la mina más el retorno esperado para un portafolio libre de riesgo, utilizando las ecuaciones (16.129), (16.131) y (16.133), y viene dado por:

- Retorno esperado de la mina:

$$q(P - C) - M(1 - i) - \lambda_i V - \tau \quad (16.148)$$

- Retorno del portafolio menos riesgoso:

$$\frac{1}{2} V_{PP} \sigma^2 P^2 - qV_S + V_P(rP - B) + V_t \quad (16.149)$$

De donde se obtiene que:

$$\frac{1}{2} V_{PP} \sigma^2 P^2 - qV_S + V_t + q(P - C) - M(1 - i) - \lambda_i V - \tau + V_P(rP - B) = 0 \quad (16.150)$$

La ecuación obtenida en (16.150) muestra que el problema descrito es determinístico cuando se ignora la probabilidad de expropiación de la mina. De este modo, para evitar oportunidades de arbitraje, el retorno del valor de la inversión del proyecto tiene que ser igual al retorno menos riesgoso, es decir, rV . Finalmente, igualando este término con la ecuación (16.149) y considerando un cambio de variable $B = P\delta$ se obtiene:

$$\frac{1}{2} V_{PP} \sigma^2 P^2 - qV_S + V_t + q(P - C) - M(1 - i) - (\lambda_i + r)V - \tau + V_P P(r - \delta) = 0 \quad (16.151)$$

Esta última ecuación corresponde al comportamiento del valor del proyecto con respecto a todas sus variables, por ende, es una forma generalizada de la ecuación (16.109) en donde se considera un recurso infinito y que no existen externalidades que afecten el valor del futuro del proyecto. El significado de cada uno de los términos de la ecuación (16.150) son los siguientes:

- $\frac{1}{2} V_{PP} \sigma^2 P^2$: efecto en el valor del proyecto producto de la variabilidad existente en el precio del *commodity*.
- qV_S : efecto que la extracción de las reservas en el tiempo. En el caso donde el recurso es infinito, este término tiende a cero, dado que no existe un costo de oportunidad de extraer una unidad del *commodity*.
- V_t : efecto en el valor del proyecto producto de externalidades negativas o positivas en el transcurso del tiempo. Para la resolución del problema presentado al inicio de la sección este valor se considera cero, puesto que se espera que no existan externalidades que afecten en el proyecto.

- $q(P - C)$: beneficio generado producto de la extracción de mineral.
- $M(1 - i)$: costo asociado de mantener la mina cerrada, pero con oportunidad de apertura en el futuro. En el caso que la mina se encuentra abierta, i toma el valor 1 de tal forma de anular este costo.
- $(\lambda_i + r)V$: asociado al costo de oportunidad de vender el proyecto e invertir todo ese dinero en un activo libre de riesgo. Además, este término incorpora un costo asociado a la expropiación de la mina, considerando una probabilidad de ocurrencia del evento.
- τ : Recaudación fiscal producto de impuestos a la renta y *royalties*. Este término tiene un efecto negativo en el valor del proyecto.
- $V_p P(r - \delta)$: efecto en el valor del proyecto producto de una variación en el precio del *commodity*.

Puesto que la ecuación (16.151) corresponde a una ecuación diferencial parcial de segundo orden, la solución es en general compleja de derivar. Sin embargo, Brennan y Schwartz (1985) simplificaron este problema considerando que el recurso es infinito, llegando a una solución numérica, correspondiente a las ecuaciones de la mina abierta y cerrada presentadas en la Subsección 16.4.3.

Como se estudió en la parte anterior es interesante evaluar cómo el impuesto puede afectar al precio de cierre y apertura de una operación. En este punto se analizará el precio de cierre desde el punto de vista del Estado, pero poniéndose en la posición de la empresa. Lo que se hará es evaluar una política de impuesto que depende del precio al cuál se encuentre el *commodity*, $\tau(p(t))$. Puesto que al Estado le conviene tener mineras operando frente a que estén temporalmente cerradas o abandonas, dado que generan ingresos a los países por las regalías y recaudaciones que reciben por las ventas, producción o utilidades generadas según corresponda, y además ayudan a disminuir la tasa de desempleo, debido a que generan gran número de puestos de trabajo directos e indirectos. Para profundizar sobre impuestos revisar Capítulo 12.

Como se revisó en la sub-sección 16.4.2 se asume que existe un P_L de cierre. Este precio se puede modificar si se varía la tasa de impuesto a las ventas τ . Lo que se busca es disminuir el impuesto si el precio está bajo de manera que le permita a la mina seguir operando, por lo tanto, se modificará el precio a un precio de cierre nuevo P_L .

Planteando el problema que debe resolver el Estado desde el punto de vista de la empresa minera, aplicando un impuesto a las ventas será:

$$\max_q \int_0^T [(1 - \tau(P))Pq - cq]e^{-rt} dt \quad (16.152)$$

s.a.

$$ds = -qdt \quad (16.153)$$

$$dP = \alpha Pdt + \sigma Pdz \quad (16.154)$$

$$0 \leq q \leq K \quad (16.155)$$

$$S, T, K, \tau > 0 \quad (16.156)$$

$$q^* = \begin{cases} 1, & \text{si } (1 - \tau)Pq - cq > 0 \\ 0, & \text{si } (1 - \tau)Pq - cq < 0 \end{cases} \quad (16.157)$$

$$\tau^*(P) = \begin{cases} \tau & \text{si } P > P_\tau \\ \tau' & \text{si } P_\tau > P > P_{\tau'} \end{cases} \quad (16.158)$$

Este problema puede ser resuelto mediante programación dinámica estocástica:

$$rV = \max_q \left\{ \pi + \frac{1}{dt} E(dV) \right\} \quad (16.159)$$

Se tienen los casos:

$$rV = \begin{cases} 0 + \frac{1}{dt} E(dV) & \text{si } q = 0 \\ \pi + \frac{1}{dt} E(dV) & \text{si } q = 1 \end{cases} \quad (16.160)$$

El beneficio viene dado por:

$$\pi = ((1 - \tau)P - c)q \quad (16.161)$$

Considerando $V(P)$, o sea el VAN dependo solo del precio del *commodity* y no de las reservas ni del tiempo. Se obtiene:

$$\frac{1}{dt} E(dV) = \alpha PV_P + \frac{1}{2} \sigma^2 P^2 V_{PP} \quad (16.162)$$

Es posible analizar tres casos, el primero será cuando no se produce, el segundo es cuando se produce y el precio está entre P_τ y $P_{\tau'}$ y el tercero es cuando el precio está sobre P_τ .

Caso 1: mina cerrada, donde se reemplaza (16.162) en (16.160) obteniéndose:

$$rV = \alpha PV'(P) + \frac{1}{2} \sigma^2 P^2 V''(P) \quad (16.163)$$

Resolviendo la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden:

$$V_0(P) = A_1 P^{\beta_1} + A_2 P^{\beta_2} \quad (16.164)$$

Donde se debe cumplir que en $V(0) = 0$, por lo tanto $A_2 = 0$, y se llega a:

$$V_0(P) = A_1 P^{\beta_1} \quad (16.165)$$

Caso 2: Mina abierta con $P_{\tau'} \leq P \leq P_{\tau}$, se reemplaza (16.162) en (16.160) obteniéndose:

$$rV = (1 - \tau')P - c + \alpha P V'(P) + \frac{1}{2} \sigma^2 P^2 V''(P) \quad (16.166)$$

Resolviendo la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden:

$$V_1(P) = B_1 P^{\beta_1} + B_2 P^{\beta_2} + \frac{(1-\tau')P-c}{r} \quad (16.167)$$

Se debe cumplir que $V(\infty) = \frac{(1-\tau')P-c}{r}$, por lo tanto $B_1 = 0$. Así:

$$V_1(P) = B_2 P^{\beta_2} + \frac{(1-\tau')P-c}{r} \quad (16.168)$$

Caso 3: Mina abierta con $P_{\tau} \leq P$:

Se realizan los pasos del caso anterior y se obtiene:

$$V_2(P) = C_2 P + \frac{(1-\tau)P-c}{r} \quad (16.169)$$

De aquí se obtiene que:

$$(1 - \tau(P)) = \begin{cases} (1 - \tau') \rightarrow V_1(p) = B_2 P^{\beta_2} + \frac{(1 - \tau')P - c}{r} & P_{\tau'} \leq P \leq P_{\tau} \\ (1 - \tau) \rightarrow V_2(P) = C_2 P^{\beta_2} + \frac{(1 - \tau)P - c}{r} & P_{\tau} \leq P \end{cases}$$

Se deben calcular las constantes A_1 , B_2 , C_2 y τ' , P_{τ} , $P_{\tau'}$. Al momento del cierre se aplica un costo E , por lo tanto, se aplica plantean las ecuaciones de continuidad y pegado suave, dadas por:

$$i) V_2(P_{\tau}) = V_1(P_{\tau}) \quad (16.170)$$

$$ii) V_2(P_{\tau}) = V_0(P_{\tau}) - E \quad (16.171)$$

$$iii) V_1(P_{\tau'}) = V_0(P_{\tau'}) - E \quad (16.172)$$

$$iv) V_2'(P_{\tau}) = V_1'(P_{\tau}) \quad (16.173)$$

$$v) V_2'(P_{\tau'}) = V_0'(P_{\tau'}) \quad (16.174)$$

$$vi) V_1'(P_{\tau'}) = V_0'(P_{\tau'}) \quad (16.175)$$

Reemplazando se obtiene un sistema no-lineal de seis ecuaciones y seis incógnitas:

$$i) C_2 P_{\tau}^{\beta_2} + \frac{(1-\tau)P_{\tau} - c}{r} = B_2 P_{\tau}^{\beta_2} + \frac{(1-\tau')P_{\tau} - c}{r}$$

$$ii) C_2 P_{\tau}^{\beta_2} + \frac{(1-\tau)P_{\tau} - c}{r} = A_1 P_{\tau}^{\beta_1} - E$$

$$iii) B_2 P_{\tau'}^{\beta_2} + \frac{(1-\tau')P_{\tau'} - c}{r} = A_1 P_{\tau'}^{\beta_1} - E$$

$$iv) C_2 \beta_2 P_{\tau}^{\beta_2-1} + \frac{(1-\tau)}{r} = B_2 \beta_2 P_{\tau}^{\beta_2-1} + \frac{(1-\tau')}{r}$$

$$v) C_2 \beta_2 P_{\tau}^{\beta_2-1} + \frac{(1-\tau)}{r} = A_1 \beta_1 P_{\tau}^{\beta_1-1}$$

$$vi) B_2 \beta_2 P_{\tau'}^{\beta_2-1} + \frac{(1-\tau')}{r} = A_1 \beta_1 P_{\tau'}^{\beta_1-1}$$

Debido a la no-linealidad de las ecuaciones anteriores no es posible derivar una solución algebraica para A_1 , B_2 , C_2 , τ' , P_{τ} , $P_{\tau'}$. Para obtener una solución habría que recurrir a métodos numéricos. Con un análisis de esta naturaleza es posible mostrar que el nuevo impuesto τ' genera un precio gatillo P_l que satisface $P_l < P_L$.

16.4.8 Aproximación al problema considerando recursos finitos

En el caso real en que las reservas son finitas, debe ser incorporada la condición de agotabilidad al modelo que deriva en la aparición de un costo de oportunidad. Este problema puede ser resuelto mediante programación dinámica estocástica según la ecuación:

$$rV = \max_q \left\{ \pi(K) + \frac{1}{dt} E(dV) \right\} \quad (16.176)$$

Entonces:

$$V = V(P, S) \quad (16.177)$$

$$dV = \left[-qV_S + \alpha PV_P + \frac{1}{2} \sigma^2 P^2 V_{PP} \right] dt + \sigma p V_P dz \quad (16.178)$$

Aplicando el operador esperanza:

$$E(dV) = \left[-qV_S + \alpha PV_P + \frac{1}{2} \sigma^2 P^2 V_{PP} \right] dt \quad (16.179)$$

$$\frac{1}{dt} E(dV) = -qV_S + \alpha p V_P + \frac{1}{2} \sigma^2 p^2 V_{PP} \quad (16.180)$$

-Si la mina está cerrada: $rV(P, S) = -qV_S + \alpha PV_P + \frac{1}{2} \sigma^2 P^2 V_{PP}$ (16.181)

-Si la mina está abierta: $rV(P, S) = Pq - Cq - qV_S + \alpha PV_P + \frac{1}{2} \sigma^2 P^2 V_{PP}$ (16.182)

Para un P bajo se tiene que V_S es un número considerable, en consecuencia, el diferencial de V es menor que en el caso infinito. Se debe recordar que la diferencia en la ecuación entre el caso con recursos finitos e infinitos es precisamente el término $-qV_S$.

$$rV_0(P, S) < rV_0(P) \quad (16.183)$$

$$-qV_S + \alpha PV_P + \frac{1}{2} \sigma^2 P^2 V_{PP} < \alpha PV_P + \frac{1}{2} \sigma^2 P^2 V_{PP} \quad (16.184)$$

A medida que V_S disminuye, el diferencial de $V(P, S)$ finito se va acercando al valor del recurso infinito, por lo que sobre cierto precio se puede apreciar un comportamiento similar al caso infinito, es decir, que $V(P, S)$ crece casi lineal.

Si $V_S \rightarrow 0$ entonces:

$$V_1(P, S) \approx V_1(P) \quad (16.185)$$

En términos prácticos, esto significa que la curva de valor de la mina abierta con recursos finitos, $V_1(P, S)$, crece más lento que en el caso de recurso infinito, $V_1(P)$. Por lo tanto, dado que se debe cumplir la condición de pegado suave, los valores de P_H y P_L se incrementan. Como se puede apreciar en la Figura 16.24, esto significa un desplazamiento de la política de operación hacia la derecha que puede entenderse como la incorporación del costo de oportunidad al modelo.

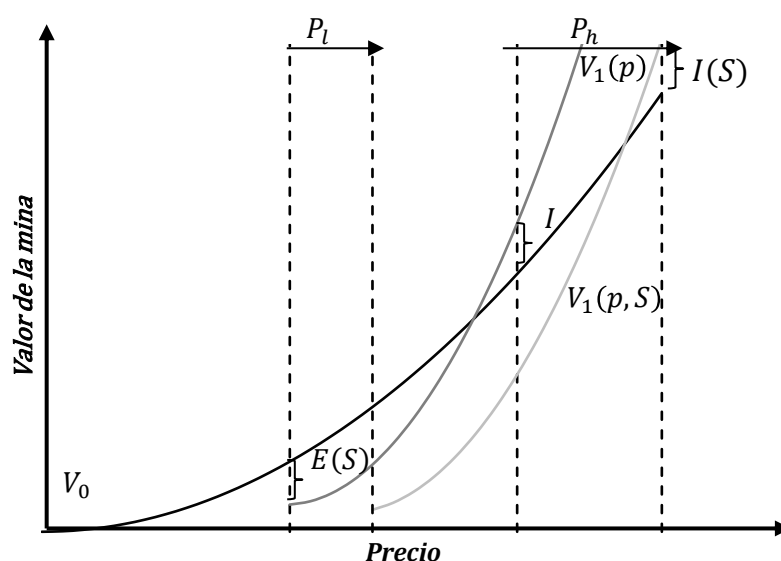


Figura 16.24. Comparación curva V_1 recursos finitos vs recursos infinitos

16.5 Inversión secuencial

En secciones anteriores se ha analizado la decisión de cuándo invertir en un proyecto, en particular referidos a determinar los precios de gatillo a los cuales es óptimo cerrar y/o abrir la operación. En estos casos se asumió que la inversión (y desinversión) era instantánea, lo que evidentemente es una simplificación puesto como se ha estudiado en este capítulo la inversión en minería toma un tiempo considerable. En esta sección se estudia entonces el caso en que la inversión es secuencial.

Si se analizan distintos tipos de inversiones que parecen ser realizadas en un único instante de tiempo pero que en realidad constituyen una serie de decisiones en el tiempo, es posible entonces convertir el problema en uno de inversiones secuenciales. La razón es que muchos proyectos tardan una cantidad considerable de tiempo en ser completados, y pueden ser detenidos en alguna etapa del proceso para abandonarlos temporal o permanentemente. Esto puede ocurrir por ejemplo si el valor del proyecto completo cae bajo un umbral, o si los costos de completar la inversión aumentan. Cuando es posible detener la inversión en algún punto intermedio es posible referirse al conjunto de opciones que se generan el tiempo (interrelacionadas entre sí) como “opciones anidadas”.

Por ejemplo, en minería se tienen las siguientes etapas principales en la cadena de valor: exploración, desarrollo, minería, metalurgia y *marketing*. Para que la empresa minera pueda comenzar a producir y generar utilidades, es necesario completar las etapas de exploración y desarrollo. En la etapa de exploración se realizan los análisis necesarios para saber si el yacimiento estudiado es factible de extraer desde el punto de vista técnico-económico. En esta etapa se realiza la primera inversión del proyecto (los que a su vez se pueden descomponer en múltiples inversiones asociadas a las etapas de ingeniería). Posteriormente, si los estudios de exploración resultan en un yacimiento factible, se inicia la etapa de desarrollo, es decir, se realiza una segunda inversión (típicamente de un orden de magnitud mayor a la anterior). Esta etapa consiste en la construcción de la infraestructura necesaria para que la mina pueda funcionar.

El ejemplo descrito muestra un problema de inversión secuencial de dos etapas, en la que ambas etapas son necesarias para que la empresa pueda generar utilidades. En la siguiente sub-sección se analiza a qué precio es conveniente ejecutar estas etapas. Este modelo fue originalmente desarrollado por Majd y Pindyck (1987). Es importante resaltar que las inversiones en ambas etapas pueden ser consideradas como opciones, pues la empresa a cargo no está obligada a realizarlas.

RECUADRO 16.12

ÁRBOL DE DECISIÓN

Un árbol de decisión es un método analítico que facilita, a través de una representación esquemática de las alternativas disponibles que puede tener una empresa, la toma de mejores decisiones, especialmente cuando existen riesgos, costos, beneficios y múltiples opciones interrelacionadas en el tiempo. El nombre deriva de la apariencia del modelo parecido a un árbol y su uso es amplio en el ámbito de la toma de decisiones bajo incertidumbre (teoría de decisiones).

Como ejemplo se puede tomar el trabajo realizado por Dapena y Fidalgo (2002). Estos autores consideran una firma neutral al riesgo que está evaluando realizar una inversión $I_c = I_1 + I_2$ para una posible expansión, donde I_1 corresponde a la inversión en una primera etapa e I_2 en una segunda etapa. En $t = 0$ se tiene una estimación de los posibles valores del flujo de caja de la empresa y sus probabilidades asociadas, y en función del mismo una estimación del valor V_i de la empresa. En $t = 1$ existen dos estados de la naturaleza posibles: uno donde se puede alcanzar un flujo de fondos

asociado, F_h , con probabilidad p y otro, F_l , con probabilidad $q = 1 - p$. En $t = 1$ se revela el verdadero estado de la naturaleza del flujo de fondos F_t asociado a la empresa. Si se realiza, el inversor tiene la oportunidad de escalar su inversión por una variable aleatoria K_t que refleja el valor agregado privado para el inversor de tomar el control de la empresa que adopta dos posibles valores, K_h con probabilidad π y K_l con probabilidad $1 - \pi$. Se impone la restricción que todas las inversiones son irre recuperables. Por simple deducción surge que si eventualmente el flujo de fondos verificado es F_l , el inversor no elige invertir en el control de la empresa ni realizar inversiones posteriores, ya que solamente estaría multiplicando las pérdidas (medidas por el escalar K sobre un $F_t < 0$). En este caso solo le queda enviar a pérdida el monto ya invertido I_1 , y retirarse del proyecto. Por el contrario, si el flujo de fondos verificado es F_h , entonces el inversor debe tomar la decisión de invertir en el control de la empresa para capturar la opción de crecimiento implícita.

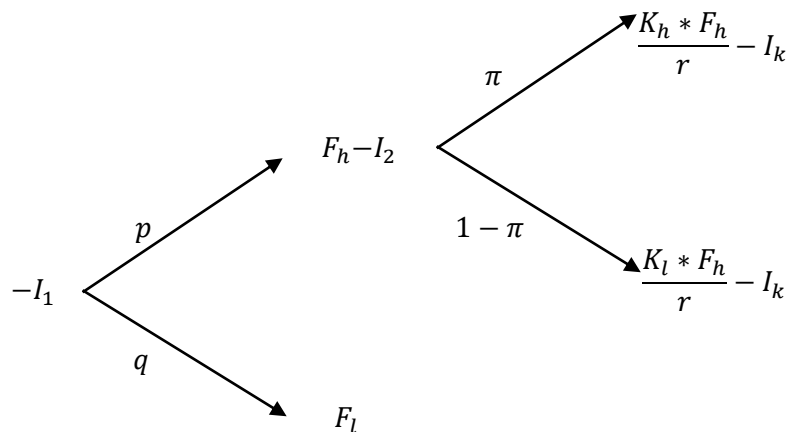


Figura 16.25. Secuencia de eventos del árbol de decisiones. Fuente: Dapena y Fidalgo (2002).

16.5.1 Regla de inversión para un proyecto en dos etapas

Para la construcción del problema a estudiar en esta sub-sección, se consideran las siguientes variables y parámetros:

- P : precio de la unidad vendida.
- C : costo de la unidad producida.
- μ : tasa de descuento ajustada al riesgo.
- $\delta: \mu - \alpha$ (*convenience yield*).
- r : tasa libre de riesgo.

- $V(P)$: valor del proyecto en función del precio del *commodity*.
- $F(P)$: valor de la opción de invertir en el proyecto en función del precio del *commodity*.
- P_i^* : precio de gatillo o crítico al que es óptimo invertir en la etapa i -ésima.

Para la modelación se asume que la incertidumbre proviene únicamente del precio del *commodity*, el cual se considera sigue un proceso estocástico del tipo movimiento geométrico Browniano dado por:

$$dP = \alpha P dt + \sigma P dz \quad (16.186)$$

Considérese que la empresa comienza con la opción de invertir en la primera etapa y que esta opción tiene valor $F_1(P)$. Dicha inversión le permite a la empresa abrir una nueva opción de invertir en una segunda etapa, con valor de $F_2(P)$. Con esta segunda inversión la empresa puede empezar operando la mina, con lo cual obtiene un VAN de $V(P)$.

Para efectos del modelo se asume que la operación de la mina puede suspenderse de forma instantánea, sin costo, cuando el precio cae a un valor menor a C , y es posible reabrir la instantáneamente (sin costo también) cuando el precio sube nuevamente a un valor mayor a C . El beneficio obtenido por la empresa es $\pi(P) = \max[P - C, 0]$. Sin pérdida de generalidad se asume que la producción de la mina es unitaria.

Los costos asociados a las inversiones en las etapas 1 y 2 son I_1 e I_2 , respectivamente. Dichos costos se consideran irreversibles (es decir, son costos hundidos).

El problema se resuelve mediante inducción hacia atrás, con los pasos que se describen a continuación. En primer lugar, se debe encontrar el valor completo del proyecto, $V(P)$. En segundo lugar, se busca el valor de la opción de invertir en la segunda etapa, $F_2(P)$ y el precio de gatillo al que es conveniente realizar esta inversión, P_2^* . En tercer lugar, se debe encontrar el valor de la opción de invertir en la primera etapa, $F_1(P)$ y el precio de gatillo al que es conveniente realizar esta inversión, P_1^* .

Encontrar $V(P)$:

Se demuestra en la sección anterior que $V(P)$ debe satisfacer la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{2} \sigma^2 P^2 V''(P) + (r - \delta) P V'(P) - r V(P) + \pi(P) = 0 \quad (16.187)$$

Además, se debe cumplir que:

$$V(0) = 0 \quad (16.188)$$

Por continuidad, cuando $P = C$,

$$V(P) = \begin{cases} A_1 P^{\beta_1} & \text{si } P < C \quad (\text{mina no opera}) \\ B_2 P^{\beta_2} + \frac{P}{\delta} - \frac{C}{r} & \text{si } P > C \quad (\text{mina opera}) \end{cases} \quad (16.189)$$

$$\beta_1 = \frac{1}{2} - \frac{(r-\delta)}{\sigma^2} + \sqrt{\left[\frac{(r-\delta)}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right]^2 + \frac{2r}{\sigma^2}} > 1 \quad (16.190)$$

$$\beta_2 = \frac{1}{2} - \frac{(r-\delta)}{\sigma^2} - \sqrt{\left[\frac{(r-\delta)}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right]^2 + \frac{2r}{\sigma^2}} < 0 \quad (16.191)$$

Los coeficientes A_1 y B_2 se determinan por la continuidad de $V(P)$ y $V'(P)$ en $P = C$, lo que resulta:

$$A_1 = \frac{C^{1-\beta_1}}{\beta_1 - \beta_2} \left(\frac{\beta_2}{r} - \left(\frac{\beta_2 - 1}{\delta} \right) \right) \quad (16.192)$$

$$B_2 = \frac{C^{1-\beta_2}}{\beta_1 - \beta_2} \left(\frac{\beta_1}{r} - \left(\frac{\beta_1 - 1}{\delta} \right) \right) \quad (16.193)$$

Con las ecuaciones (16.189), (16.192) y (16.193) se puede encontrar el valor de $V(P)$.

Inversión en la segunda etapa:

Se demuestra en la sección anterior que el valor de la inversión en este caso debe cumplir la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{2} \sigma^2 P^2 F_2''(P) + (r - \delta) P F_2'(P) - r F_2(P) = 0 \quad (16.194)$$

Además, se tienen las siguientes condiciones de borde:

$$F_2(0) = 0 \quad (16.195)$$

$$F_2(P_2^*) = V(P_2^*) - I_2 \quad (16.196)$$

$$F_2'(P_2^*) = V'(P_2^*) \quad (16.197)$$

Como $P_2^* > C$ (o no tendría sentido hacer la inversión), se usa la solución de $V(P)$ en la región del proyecto operando ($P > C$). Con (16.196) y (16.197) se obtiene que:

$$F_2(P) = D_2 P^{\beta_1} \quad (16.198)$$

$$D_2 = \frac{\beta_2 B_2}{\beta_1} (P_2^*)^{(\beta_2 - \beta_1)} + \frac{(P_2^*)^{(1 - \beta_1)}}{\delta \beta_1} \quad (16.199)$$

Y P_2^* es la solución a la siguiente ecuación, la cual se puede resolver numéricamente,

$$(\beta_1 - \beta_2) B_2 (P_2^*)^{\beta_2} + (\beta_1 - 1) \frac{P_2^*}{\delta} - \beta_1 \left(\frac{c}{r + I_2} \right) = 0 \quad (16.200)$$

$$F_2(P) = \begin{cases} D_2 P^{\beta_1} & \text{si } P < P_2^* \\ V(P) - I_2 & \text{si } P \geq P_2^* \end{cases} \quad (16.201)$$

Inversión en la primera etapa

Para determinar $F_1(P)$ y P_1^* se tiene que $F_1(P)$ satisface la ecuación (16.183), pero con las siguientes condiciones de borde:

$$F_1(0) = 0 \quad (16.202)$$

$$F_1(P_1^*) = F_2(P_1^*) - I_1 \quad (16.203)$$

$$F_1'(P_1^*) = F_2'(P_1^*) \quad (16.204)$$

Con estas condiciones de borde se obtiene:

$$F_1(P) = D_1 P^{\beta_1} \quad (16.205)$$

Es necesario conocer si P_1^* es mayor o menor a P_2^* , para sustituir $F_2(P)$. De la ecuación (16.201):

$$F_2(P_1^*) = \begin{cases} D_2 (P_1^*)^{\beta_1} & \text{si } P_1^* < P_2^* \\ V(P_1^*) - I_2 & \text{si } P_1^* > P_2^* \end{cases} \quad (16.206)$$

Si $P_1^* < P_2^*$, entonces $F_2(P_1^*) = D_2 (P_1^*)^{\beta_1}$. De la ecuación (16.205) se tiene que $D_1 = D_2$, pero esto es contradictorio con (16.203). Por lo tanto, necesariamente se debe cumplir que $P_1^* > P_2^*$.

Como $P_1^* > P_2^*$, y como en este modelo la inversión puede ser completada de forma instantánea, una vez que P alcance P_1^* y la firma invierta, se habrá alcanzado P_2^* . Por lo tanto, estarán completas ambas etapas del proyecto.

Como la firma debe invertir en ambas etapas del proyecto, se puede reescribir (16.203) y (16.204) de la siguiente forma:

$$F_1(P_1^*) = V(P_1^*) - I_2 - I_1 \quad (16.207)$$

$$F_1'(P_1^*) = V'(P_1^*) \quad (16.208)$$

Si se reemplaza la solución de $V(P)$ en la región en que la firma se encuentra operando, las condiciones de borde anteriores muestran:

$$D_1 = \frac{\beta_2 B_2}{\beta_1} (P_1^*)^{(\beta_2 - \beta_1)} + \frac{(P_1^*)^{(1 - \beta_1)}}{\delta \beta_1} \quad (16.209)$$

Y P_1^* será solución a la siguiente ecuación:

$$(\beta_1 - \beta_2) B_2 (P_1^*)^{\beta_2} + (\beta_1 - 1) \frac{P_1^*}{\delta} - \beta_1 \left(\frac{c}{r} + I_1 + I_2 \right) = 0 \quad (16.210)$$

Las ecuaciones (16.209) y (16.210) son iguales a las ecuaciones (16.199) y (16.200) si se reemplaza P_1^* por P_2^* e $I_1 + I_2$ por I_2 . Además, también implican que $P_1^* > P_2^*$ y $D_1 < D_2$.

Cabe destacar que la opción de invertir en la segunda etapa (dado que la primera etapa ha sido completada) vale más que la opción de invertir en la primera etapa (en la que el pago es la opción de invertir en la segunda etapa).

16.5.2 Múltiples etapas de inversión

En esta sección se analiza en primer lugar el problema de inversión secuencial en dos etapas. Ahora, se muestra el mismo problema, pero con un número arbitrario de etapas.

El valor de la opción de invertir en una etapa j cualquiera de un proyecto con N etapas será de la forma:

$$F_j(P) = D_j P^{\beta_1} \quad (16.211)$$

, donde D_j y P_j^* se determinan resolviendo las ecuaciones (16.198) y (16.199), con P_j^* en lugar de P_2^* y $I_j + I_{j+1} + \dots + I_N$ en lugar de I_2

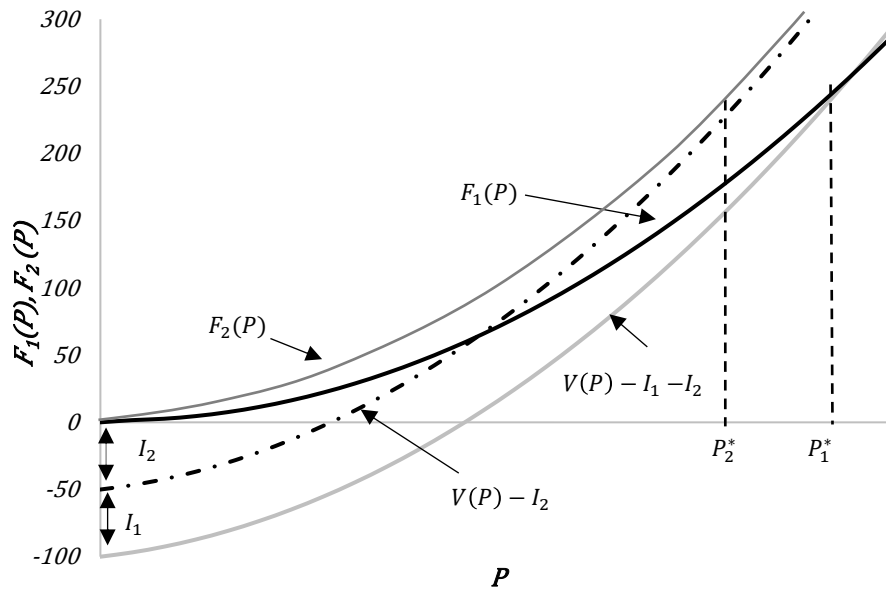


Figura 16.26. Precios críticos y opciones de valor para un proyecto de dos etapas.

Fuente: Dixit y Pindyck (1994)

Como ejemplo, en la Figura 16.26 se presentan $F_1(P)$, $F_2(P)$ y los precios críticos P_1^* , P_2^* para los siguientes valores:

$$I_1 = I_2 = 50; \quad C = 10; \quad \sigma = 0,2; \quad r = \delta = 0,04; \quad \sigma = 0,2$$

En el gráfico se comprueba que $P_1^* > P_2^*$, y que además el valor de la opción de invertir en la segunda etapa es mayor al valor de la opción de invertir en la primera etapa, como se mencionó en la sub-sección anterior.

Además, se puede observar que el precio de gatillo al que conviene realizar las inversiones se produce precisamente cuando el valor del proyecto es igual o mayor al valor de la opción. Por lo tanto, como el valor de la opción luego de ya haber realizado la primera inversión es mayor, se requerirá de un precio menor para tomar la decisión de invertir en la segunda etapa. Esto se produce porque, dado que ya se hizo la primera inversión, queda menos por invertir para terminar el proyecto, por lo que se necesita un precio menor para que el valor del proyecto sea positivo.

16.5.3 Inversión continua y tiempo de construcción

En esta sección se utiliza un modelo desarrollado por Majd y Pindyck (1987), en el cual una empresa invierte continuamente hasta que el proyecto se completa (cada dólar gastado

“compra” una opción para gastar el próximo dólar). Esta inversión se puede detener y reiniciar cuantas veces se desee sin costo alguno, además de existir un máximo ritmo posible de construcción, por lo que no se puede construir de manera instantánea el activo: es por esto que se dice que “toma tiempo construir”. Por lo tanto, la solución del modelo entrega una regla para la inversión óptima secuencial que contabiliza el tiempo que se requiere para realizar la inversión en sí.

Al igual que en los modelos anteriores, se asume que la empresa no recibe flujos positivos hasta que el proyecto esté completo, donde se recibirá V , que corresponde al valor del proyecto operativo. Se considera además que V se puede modelar a través de un proceso geométrico Browniano, tal que:

$$dV = \alpha V dt + \sigma V dz \quad (16.212)$$

Sea μ la tasa de retorno del mercado ajustada al riesgo se asume que $\alpha < \mu$ y se define $\delta = \mu - \alpha$.

Se asume una tasa máxima de inversión, k , y se denota a la tasa de inversión en cada instante de tiempo como $I(t)$, por lo que debido a sus restricciones se tiene que $0 \leq I(t) \leq k$. Esta relación es posible asemejarla a cómo las reservas remanentes disminuyen en el tiempo debido a la tasa de extracción que se emplea ($dS = -q dt$). De aquí, se define K como la inversión remanente necesaria para completar el proyecto y se llega a la siguiente relación:

$$dK = -I dt \quad (16.213)$$

De las ecuaciones anteriores se puede derivar que existen dos variables de estado que afectan la decisión óptima de inversión, V y K , por lo que se busca en el problema encontrar una regla de decisión óptima, la que se denotará como $I^*(V, K)$. Ya que no existen costos por modificar la tasa de inversión, esta tiene como solución en cada instante de tiempo un extremo de la función, es decir, 0 o k . Lo anterior se traduce en que existirá un valor de gatillo para el proyecto, V^* , el cual sirve para determinar si se invierte a máxima tasa o no se invierte nada. Por lo tanto:

$$I(t) = \begin{cases} k & \text{si } V \geq V^* \\ 0 & \text{si } V < V^* \end{cases} \quad (16.214)$$

Se denota el valor de la opción de invertir como $F(V, K)$. En esta sección se busca encontrar esta función óptima para posteriormente obtener $V^*(K)$. Aunque para su derivación se puede

utilizar el método de programación dinámica en este ejemplo se utilizará *análisis de activos contingentes*, el que consiste en derivar un portafolio libre de riesgo que replique el riesgo del proyecto subyacente.¹⁰⁵ Con esto se podrá derivar una ecuación diferencial parcial que sea satisfecha por $F(V, K)$, la que permitirá derivar $V^*(K)$.

Una ecuación para $F(V, K)$

Para ilustrar el uso del análisis de activos contingentes se considera un portafolio que contiene la opción de invertir y una posición corta de F_V unidades de V . El valor de este portafolio es entonces $\Phi = F(V, K) - F_V V$ y su cambio de valor instantáneo viene dado por:

$$d\Phi = dF - F_V dV \quad (16.215)$$

$$= F_V dV + \frac{1}{2} F_{VV} (dV)^2 + F_K dK - F_V dV = \frac{1}{2} \sigma^2 V^2 F_{VV} dt - I F_K dt \quad (16.216)$$

La posición corta requiere de un pago de $\delta F_V V dt$ y, mientras una inversión ocurra, se incurre en otro flujo de $I dt$, por lo que el retorno total del portafolio consiste de $d\Phi - I dt - \delta F_V V dt$ y, como el portafolio es libre de riesgo, lo anterior equivaldrá a $r\Phi dt$. Se reemplaza $d\Phi$, se divide por dt y se reordena la ecuación, con lo que se llega a la siguiente ecuación diferencial parcial para $F(V, K)$:

$$\frac{1}{2} \sigma^2 V^2 F_{VV} - (r - \delta) V F_V - rF - I F_K - I = 0 \quad (16.217)$$

La ecuación (16.217) es la ecuación de Bellman de programación dinámica cuando la tasa de descuento es libre de riesgo.

Por otra parte, mediante programación dinámica se sabe que:

$$rJ(S, p, t) = \max_q \left\{ \pi + \frac{E(dJ)}{dt} \right\} \quad (16.218)$$

En este caso:

$$r(F - F_V V) = \pi + \frac{E[d(F - F_V V)]}{dt} \quad (16.219)$$

Donde $J = F - F_V V$. Por lo tanto, los términos se desarrollan de la siguiente manera:

¹⁰⁵ Ver Dixit y Pindyck (1994) para más detalles.

$$E[d(F - F_V V)] = \frac{1}{2} F_{VV} (dV)^2 + F_V dV + F_K dK - F_V dV \quad (16.220)$$

$$= \frac{1}{2} \sigma^2 V^2 F_{VV} dt - I F_K dt \quad (16.221)$$

$$\pi = -I - \delta V F_V \quad (16.222)$$

Si se reordenan todos los términos en el lado derecho se llega a la ecuación previamente obtenida, pero con un signo cambiado en el segundo término:

$$\frac{1}{2} \sigma^2 V^2 F_{VV} + (r - \delta) V F_V - rF - I F_K - I = 0 \quad (16.223)$$

De hecho, si se revisa el procedimiento a través del cual se obtiene la ecuación a partir del método de *análisis de activos contingentes* se verifica que la ecuación queda de esta forma. Sin embargo, debido a las consecuencias que implica el modificar esta ecuación para las siguientes ecuaciones dependientes de ella, se considerará la ecuación obtenida inicialmente.

Cabe destacar que la ecuación es lineal en I , por lo que se verifica que la decisión óptima de inversión se encontrará en uno de los extremos de la función. Además de lo anterior, la ecuación debe satisfacer las siguientes condiciones de borde:

$$F(V, 0) = V \quad (16.224)$$

$$F(0, K) = 0 \quad (16.225)$$

$$\lim_{V \rightarrow \infty} F_V(V, K) = e^{-\delta K/k} \quad (16.226)$$

También se deben satisfacer las ecuaciones de continuidad y pegado suave cuando $V = V^*$. La ecuación (16.224) explica que cuando K es 0, el proyecto está completo y por ende la empresa recibe un pago de V , que como se sabe es el valor del proyecto operativo. Además, cuando V se vuelve mucho más grande que I se vuelve bastante improbable que la inversión se detenga en algún momento previo a que el proyecto esté completo. Sin embargo, de igual forma el proyecto se demoraría un tiempo $\frac{K}{k}$ en terminarse, tiempo durante el cual la tasa esperada de crecimiento en V sería de $\mu - \delta$. Por lo tanto, para un V muy grande un aumento de una unidad marginal en V genera un aumento en $F(V, K)$ igual a:

$$1 - \int_0^{K/k} \delta e^{(\mu - \delta)t} e^{-\mu t} dt = e^{-\frac{\delta K}{k}} \quad (16.227)$$

Lo anterior explica la ecuación (16.226).

Cuando $V < V^*$ y $I = 0$, la ecuación de optimalidad de Bellman tiene la siguiente forma algebraica:

$$F(V, K) = A V^{\beta_1} \quad (16.228)$$

Donde β_1 satisface la siguiente ecuación:

$$\beta_1 = \frac{1}{2} - \frac{(r-\delta)}{\sigma^2} + \sqrt{\left[\frac{(r-\delta)}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right]^2 + \frac{2r}{\sigma^2}} \quad (16.229)$$

De la ecuación anterior se desprende que β_1 no depende de K . Sin embargo, esto no implica que $F(V, K)$ no dependa de K , ya que aún falta encontrar el valor de A , el cual se obtiene de las condiciones de borde planteadas.

En cambio, cuando $V > V^*$ e $I = k$, la ecuación (16.217) es una ecuación diferencial parcial de tipo parabólico que debe ser resuelta de forma numérica. Para hacer esto, se debe eliminar primero A con la ecuación (16.217) en conjunto con las ecuaciones de continuidad y pegado suave:

$$F(V^*, K) = \left(\frac{V^*}{\beta_1}\right) F_V(V^*, K) \quad (16.230)$$

Luego se pueden resolver las ecuaciones (16.217) junto a la (16.230) y las condiciones de borde (16.224) hasta (16.226), para ellos se utiliza un método de diferencias finitas. Este método transforma las variables V y K en incrementos discretos, y la ecuación (16.218) en una ecuación diferencial finita. Las ecuaciones resultantes se pueden resolver algebraicamente si se comienza con la condición terminal de $K = 0$, se avanza en incrementos de ΔK , luego se encuentra el borde libre de $V^*(K)$ para cada valor de K además de $F(V, K)$ para cada valor de V .

Resolución numérica

La Tabla 16.6 ilustra como la solución depende de los parámetros σ y δ . Esta tabla muestra los valores críticos de gatillo, $V^*(K)$, para la decisión de inversión inicial (para este caso, cuando $K = \$6$ millones), para $\sigma = [0,1; 0,2; 0,4]$ y para $\delta = [0,02; 0,06; 0,12]$. En la Tabla 16.6, se observa que para cualquier valor de δ , V^* aumenta cuando σ aumenta, y puede aumentar de manera significativa cuando σ sobrepasa el valor de 0,20.

Tabla 16.6. Dependencia del valor crítico $V^*(K)$, con respecto a σ y δ . Fuente: Dixit y Pindyck (1994).

VOLATILIDAD (σ)	VALOR CRÍTICO	$\delta = 0,02$	$\delta = 0,06$	$\delta = 0,12$
0,1	V^*	11,02	9,03	12,43
	V^{**}	9,77	6,3	6,05
0,2	V^*	20,09	11,02	12,81
	V^{**}	17,82	7,69	7,03
0,4	V^*	121,51	24,53	20,09
	V^{**}	107,77	17,11	9,78

Sin embargo, la dependencia de V^* en δ no es tan fácil de identificar a primera vista. En la Tabla 16.6, V^* inicialmente decrece cuando δ pasa de 0,02 a 0,06, pero luego aumenta si δ se sigue aumentando hasta 0,12. La razón del comportamiento anterior es el tiempo que requiere el proyecto en construirse, el cual genera un efecto opuesto al incentivo en invertir. El pago V se recibe al terminar de construirse el proyecto, y se espera que este crezca a una tasa de $\mu - \delta$. Por lo tanto, el tiempo de construcción reduce el valor presente del pago y lo puede reducir de forma significativa si δ aumenta. Esto en consecuencia disminuye el incentivo en invertir, lo que implica que aumenta el valor crítico actual V^* . Como muestra la tabla, para valores altos de δ , este segundo efecto puede dominar, así V^* aumenta cuando δ aumenta.

A su vez, se puede aislar este segundo efecto si se calcula el valor presente de V^* y se asume que las inversiones son realizadas a su máxima tasa k , por lo que les toma un tiempo $T = K/k$ años en completar el proyecto. La tasa de descuento es r , pero V tiene una tasa de crecimiento esperada α , por lo que este valor presente V^{**} es:

$$V^{**} = V^* e^{-(\mu-\alpha)\frac{K}{k}} = V^* e^{-\delta\frac{K}{k}} \quad (16.231)$$

En la Tabla 16.6 se puede observar además que para cualquier valor de σ , V^{**} siempre decrece en la manera que δ aumenta.

También es importante analizar cuánto impacto tienen la irreversibilidad y la posibilidad de atrasar la inversión en el pago de esta y su costo. Una forma de responder lo anterior es comparar V^{**} con el valor presente de los gastos de inversión necesarios para terminar el

proyecto. Se asume que estos gastos se realizan continuamente a lo largo del periodo $T = \frac{K}{k}$, por lo que su valor presente es:

$$K^* = \int_0^{K/k} k e^{-rt} dt = (1 - e^{-\frac{rK}{k}}) \frac{k}{r} \quad (16.232)$$

Para el ejemplo, $K^* = \$5,65$ millones.

Se pueden examinar además las formas en que la incertidumbre y el tiempo de construcción afectan la decisión de inversión si se calcula V^* para diferentes valores de k . La Figura 16.27 muestra V^* como una función de k para $K = \$6$ millones, y $\delta = 0,03$ y $0,12$. De esta figura se puede observar que cuando δ es pequeño los cambios en k tienen pequeñas repercusiones en V^* . La razón de esto es que la tasa esperada de crecimiento de V es cercana a μ , por lo que su habilidad para agilizar la construcción tiene poco efecto en el valor de la opción de inversión o en la decisión de inversión. Sin embargo, si δ es grande, V^* puede ser bastante sensible a k .

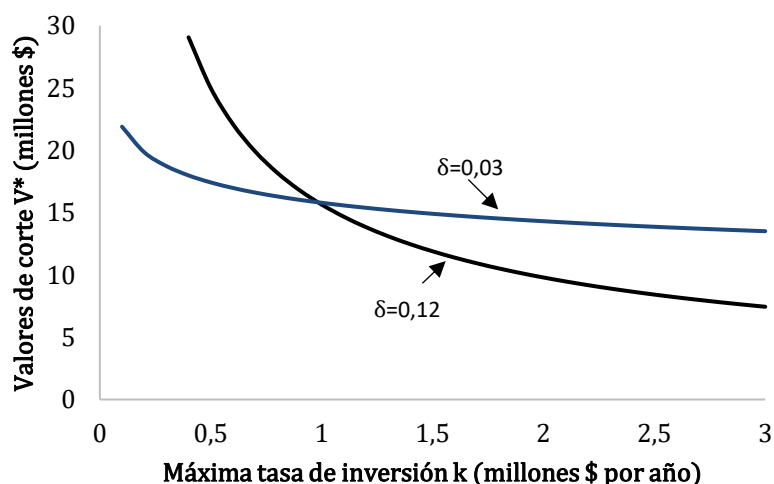


Figura 16.27. Valor crítico en función de k ($r = 0,02$; $\sigma = 0,2$; $K = 6$ millones \$).

Fuente: Dixit y Pindyck (1994)

Entonces, valores más bajos de k (lo que implica tiempos mínimos de construcción más largos) implican un menor valor presente del pago por completar el proyecto, por lo tanto, un mayor valor crítico actual V^* . Al igual que antes, este segundo efecto se podría anular si se considera V^{**} .

Se ha asumido que k es constante, lo cual puede ser poco realista para algunos proyectos, donde la máxima tasa de inversión depende de la etapa de construcción. Sin embargo, este modelo puede ser modificado fácilmente para permitir que la tasa máxima de inversión sea una función

conocida del total de inversión remanente, K . Esto solamente implica reemplazar una función de K en vez de una constante de I en la ecuación (16.217). El mismo resultado numérico puede ser utilizado para encontrar la solución. De igual forma, no es necesario mantener la suposición que $I \geq 0$. Podría existir un límite inferior positivo en la tasa de inversión (por ejemplo, para mantener un sitio de construcción), para que la restricción quede como $l \leq I \leq k$, con l o k posiblemente dependientes de K . Esta restricción puede ser interpretada de dos formas: la empresa está siendo forzada a continuar a esta tasa mínima de inversión una vez que inicia la construcción del proyecto, o cualquier gasto más pequeño es equivalente al abandono del proyecto, porque las etapas existentes se van a “oxidar” si no se mantienen de manera apropiada. Las reglas de decisión óptima van a ser diferentes en dos casos, el umbral de entrada inicial va a ser más estricto si es que no existe una salida más adelante.

El valor de la flexibilidad del tiempo de construcción:

¿Qué tan valiosa es la habilidad de agilizar la construcción de un proyecto? Muchos proyectos se pueden construir con tecnologías de construcción alternativas que difieren en términos de flexibilidad sobre la tasa de construcción.¹⁰⁶ Las tecnologías que ofrecen una mayor flexibilidad tienden a ser más costosas, por lo que este costo adicional se debe balancear contra el valor de la mayor flexibilidad de tiempo de construcción. Por lo tanto, se puede utilizar el modelo para valorizar esta mayor flexibilidad. Debido a que una mayor flexibilidad en el tiempo de construcción implica un mayor k , simplemente se debe calcular el valor de la oportunidad de inversión $F(V, K)$ para diferentes valores de k . El cambio en F correspondiente a un cambio de k mide el valor incremental del aumento en flexibilidad. Cabe señalar que esta valorización depende tanto de V como de K .

La Figura 16.28 muestra el cálculo para el caso base con valores de parámetros $r = 0,02$; $\sigma = 0,20$ y $\delta = 0,06$. Aquí se grafica $F(V, K; k)$ como una función de k manteniendo V constante (primero en \$10 millones y luego en \$15 millones) y con K constante (en \$6 millones). Para cada valor de V , su valor incremental de flexibilidad en tiempo de construcción está dado por $\Delta F/\Delta k$, que es la pendiente de la curva. Como se muestra en la Figura 16.28, el valor incremental de la flexibilidad es siempre positivo, pero decae cuando k aumenta. Además, las

¹⁰⁶ En la industria minera la agilización de proyectos se suele denominar *fast tracking*.

líneas horizontales muestran el valor de la oportunidad de inversión cuando existe máxima flexibilidad, esto es, $k = \infty$; cuando $V = 10$, este valor es 4,0, y cuando $V = 15$, es 9,0.

Si se consideran dos tecnologías distintas de construcción con el mismo $V = 10$, el mismo costo $K = 6$, pero distintas tasas máximas de inversión; $k = 0,5$ para el primer caso y 1,0 para el segundo. Como se puede analizar desde la figura, el valor incremental de la tecnología más flexible es $\frac{\Delta F}{\Delta k} = \frac{0,98}{0,5} \approx 2$. Por lo tanto, se debería estar dispuesto a pagar \$2 millones más para acceder a esta tecnología más flexible. El valor incremental es mayor si V es mayor; si $V = 15$, el valor incremental es aproximadamente 5,5. Por supuesto, en general una mayor flexibilidad puede estar acompañada por un capital de inversión mayor, K . En ese caso, se puede hacer un ranking de las tecnologías al comparar las funciones $F(V, K; k)$ para cada uno.

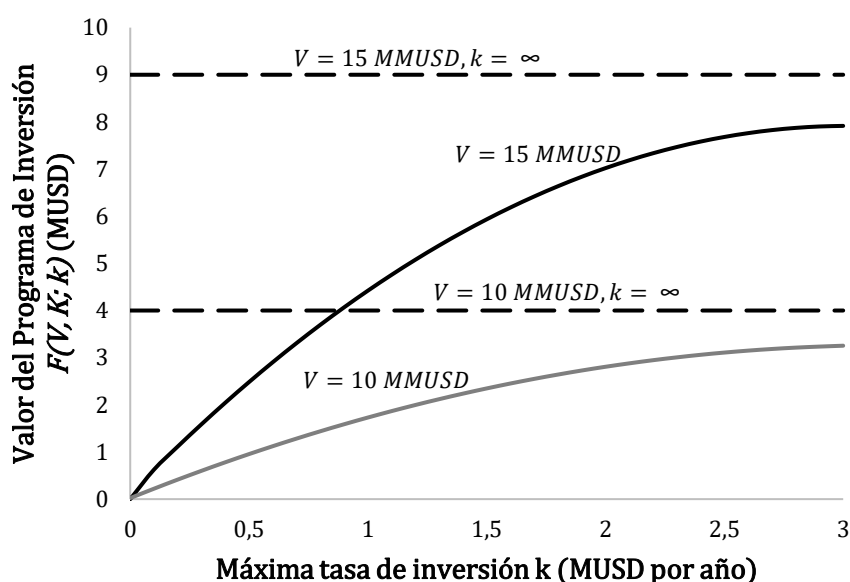


Figura 16.28. Valoración de la flexibilidad del tiempo de construcción. Fuente: Dixit y Pindyck (1994)

Una extensión simple:

Se puede creer que el precio unitario de la producción del proyecto siga un proceso estocástico exógeno, en vez del valor del proyecto. Además, una ventaja de empezar con el precio como la variable estocástica es que se puede determinar cómo el valor del proyecto depende del precio y, por ende, cómo se ve afectado por la incertidumbre del precio.

El mismo argumento se aplica al modelo de inversión continua con tiempo de construcción. Afortunadamente, este es fácil de modificar para que el precio sea la variable de estado estocástica exógena. Como antes, se asume que existe un costo operativo constante de C , y que

la operación del proyecto puede temporalmente, y sin costo asociado, suspenderse cuando P sea menor a C , y reiniciar las operaciones de la misma manera cuando P vuelva a superar a C . También, se asume que P sigue un movimiento geométrico Browniano (16.186) y el valor del proyecto $V(P)$ viene dado por la ecuación (16.189).

Una vez que se conoce $V(P)$, se procede de la misma forma que antes. Se escribe el valor de la opción de inversión como $F(P, K)$ y luego si se siguen los pasos utilizados en esta sección se llega a la siguiente ecuación diferencial parcial:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 P^2 F_{PP} - (r - \delta)P F_P - rF - I F_K - I = 0 \quad (16.233)$$

Esta ecuación es similar a la ecuación (16.217), con la diferencia de que se reemplaza V por P . Las condiciones de borde en este caso se convierten en:

$$F(P, 0) = V(P) \quad (16.234)$$

$$F(0, K) = 0 \quad (16.235)$$

$$\lim_{V \rightarrow \infty} F_P(P, K) = (1/\delta) e^{-\delta \frac{K}{k}} \quad (16.236)$$

Además, se aplican nuevamente las condiciones de continuidad y pegado suave, por lo que $F(P, K)$ y $F_P(P, K)$ deben ser continuos en el precio crítico $P = P^*(K)$.

Una solución para $F(P, K)$ junto al precio crítico $P^*(K)$ puede obtenerse de manera numérica de la misma forma anterior. La diferencia principal es la ecuación (16.234). Los valores numéricos para $V(P)$ debe ser calculados para el rango entero de valores de P usados en el procedimiento de la solución. Luego, en el límite ($K = 0$), $F(P, 0)$ es igual a $V(P)$ para cada valor de P . Si se retrocede en incrementos de ΔK , se obtienen de la misma forma que antes $F(P, K)$ y $P^*(K)$ para cada K .

RECUADRO 16.13

MODELOS ALTERNATIVOS DE TIEMPO DE CONSTRUCCIÓN E INVERSIÓN CONTINUA

El estudio de Bar-Ilan y Strange (1992), considera el estado de la mina (activa, inactiva o en construcción) y la incertidumbre asociada al precio del mineral. El principal resultado que entrega este

estudio se enfoca en el impacto que poseen los tiempos de construcción o rezagos (*lags*) en las inversiones, además de compararlos con casos reales.

En cambio, Kydland y Prescott (1982) demuestran la importancia que el tiempo de construcción posee al llevarlo a un plano macroeconómico. Esto se puede corroborar con el escenario vivido en la economía de Estados Unidos post segunda guerra mundial.

Finalmente, Cortázar *et al.* (2001) aplica el concepto de inversión continua y lo combina con otros conceptos que sirven para modelar el problema de una minera lo más cercano a la realidad. Para esto los autores utilizan dos fuentes de incertidumbre (el precio del mineral y una incertidumbre asociada a factores técnicos y geológicos), distintos niveles o fases de exploración (las cuales poseen diferentes niveles de incertidumbre geológica, decreciente a medida que avanzan las etapas) y probabilidades de ocurrencia para los escenarios. Además de esto, se toma en consideración la opción de cerrar (temporal o permanentemente) y reabrir la mina. Ambas opciones están asociadas a un costo, que depende de las diferentes etapas de la vida de una mina, desde su exploración hasta su fase de producción. Lo anterior, genera un modelo más complejo que los estudiados en esta sección, por lo que se sugiere revisar para una adecuada comprensión de los temas vistos.

16.5.4 La curva de aprendizaje y decisiones de producción óptima

Los ejercicios antes vistos de inversión secuencial son generales. Ahora se tratará un problema en el que las empresas presentan una curva de aprendizaje y, también incertidumbre con respecto a la demanda esperada. Por lo tanto, con una curva de aprendizaje, parte del costo de la producción actual de la empresa es en realidad una inversión, el *payoff* cuyo resultado es la reducción de los costos futuros. Se debe considerar además que la inversión es irreversible.

Grossman y Shapiro (1986) estudiaron inversiones para las cuales se desconoce el esfuerzo total requerido para alcanzar el *payoff* necesario. Ellos modelaron los pagos como un proceso de Poisson, con una tasa de llegada en función del esfuerzo acumulativo gastado, lo que permite que la tasa de progreso sea una función cóncava y se centre en la tasa de inversión, más que en si se debe proceder o no.

RECUADRO 16.14

CURVA DE APRENDIZAJE

La curva de aprendizaje corresponde a la habilidad de aprender mediante la realización de la misma actividad repetidas veces, por lo tanto, en proyectos de minería y sobre todo de desarrollos mineros es una variable clave a considerar. Por lo general esto se observa en gran medida durante los primeros meses de desarrollo, desde el primer día hasta una llegada a régimen de avance. Tener conocimiento de este tipo de eventualidad permite incorporar estos rendimientos en el plan de manera anticipada y ofertar valores más bajos para los rendimientos contractuales al inicio de desarrollos.

A modo de ejemplo, se determina que las actividades más afectadas por inexperiencia del personal, las primeras semanas de trabajo, son la perforación de avance y la fortificación. Esta restricción se aplica directamente a los tiempos de las actividades y sólo afecta al comienzo de la simulación, es decir, afecta el rendimiento de las primeras semanas de desarrollo. Con ello se llega a los siguientes factores de ajuste:

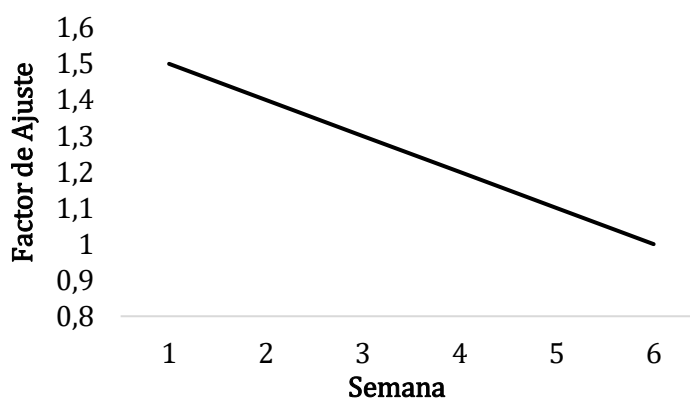


Figura 16.29. Curva de aprendizaje en perforación y tronadura (D&B).

Fuente: Contreras (2016)

Cuando las decisiones de producción de la empresa se pueden representar en una curva de aprendizaje con una evolución estocástica del precio de salida, esto se relaciona estrechamente con las decisiones de inversión continua que se examinaron anteriormente. En cada instante, la empresa debe observar el precio y con ello decidir si producir (y de este modo invertir en futuras reducciones de costos) o no, con el conocimiento de que los precios pueden caer y luego subir, lo que reanudaría la producción. De este modo se busca la producción óptima, la cual se puede obtener a través del modelo de Majd and Pindyck (1989).

En este modelo la empresa vende su producción a un precio P que sigue un proceso geométrico Browniano. El costo de producción marginal es constante con respecto a la razón de salida, x , con una capacidad límite fijada arbitrariamente. Sin embargo, existe una curva de aprendizaje

en el que el costo marginal decae con la producción acumulada, Q , hasta que alcanza un mínimo nivel, \bar{c} . El c denota el costo marginal inicial y Q_m el nivel de acumulación de producción al cual el aprendizaje cesa. Así, se puede escribir la función de costo marginal como:

$$C(Q) = \begin{cases} c * e^{-\gamma Q} & \text{si } Q < Q_m \\ c * e^{-\gamma Q_m} = \bar{c} & \text{si } Q \geq Q_m \end{cases} \quad (16.237)$$

Se asume que la mina puede cerrar si el precio llega a un valor muy bajo y luego retomar la producción si el precio aumenta lo suficiente. Ahora puede ser óptimo continuar la producción incluso si los flujos de beneficios actuales son negativos. La razón es que el valor de la producción actual depende tanto del flujo de caja actual como del monto por el cual se reducen los costos futuros.

La incertidumbre de P está dada por los activos existentes en la economía, en la que μ es la tasa de descuento ajustada por riesgo para futuros ingresos y se escribe como $\delta = \mu - \alpha$. Ahora, se debe determinar la estrategia óptima de operación. Para eso, el valor de la empresa va a depender de P y también de que tan lejos se haya movido a lo largo en la curva de aprendizaje (esto es, en la producción acumulada, Q). En este caso se tienen dos variables de estado, P y Q , y una variable de control, x , la que debe estar contenida en el intervalo $0 \leq x \leq 1$. El problema es encontrar el valor de la empresa, $V(P, Q)$, junto con la producción óptima, $x^*(P, Q)$.

A partir de lo planteado en secciones anteriores, $V(P, Q)$ satisface la siguiente ecuación diferencial parcial:

$$\frac{1}{2} \sigma^2 P^2 V_{PP} + (r - \delta) P V_P + x V_Q - rV + x[P - C(Q)] = 0 \quad (16.238)$$

Dado que es lineal en x , el óptimo es 1 o 0, así:

$$x^*(P, Q) = \begin{cases} 1 & \text{si } P + V_Q \geq C(Q) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (16.239)$$

Esto formaliza la intuición anterior. Una unidad de producción actual conlleva un beneficio inmediato P , y un beneficio futuro ya que se obtendrán menores costos en la producción futura, lo que es capturado en el incremento del valor de la empresa, V_Q . La producción es justificada si la suma de los beneficios excede el costo actual $C(Q)$.

Una vez que el problema está resuelto y se conoce la función $V(P, Q)$, se tiene una curva umbral o límite libre, $P^*(Q)$, tal que,

$$P > P^*(Q) \text{ si y solo si } P + V_Q(P, Q) > C(Q) \quad (16.240)$$

Entonces, la producción óptima se convierte en $x = 1$, si $P \geq P^*(Q)$ y $x = 0$, si $P < P^*(Q)$.

También, ya que el costo disminuye a medida que Q aumenta, se tiene que $\frac{dP^*}{dQ} < 0$.

La fórmula (16.235), debe satisfacer las siguientes condiciones de borde:

$$V(0, Q) = 0 \quad (16.241)$$

$$\lim_{P \rightarrow \infty} V_P(P, Q) = \frac{1}{\delta} \quad (16.242)$$

$$P^*(Q) - C(Q) + V_Q(P, Q) = 0 \quad (16.243)$$

$$V(P, Q_m) = V_P \quad (16.244)$$

Junto con la condición de que $V(P, Q)$ es continua en $P = P^*$.

La primera condición establece que si $P = 0$, entonces $V = 0$. La segunda señala que, si P alcanza un valor suficientemente alto, la empresa casi siempre producirá. Luego, el valor incremental de un aumento de una unidad de producto en el precio genera un valor presente unitario descontado a la tasa $\delta = \mu - \alpha$. La condición (16.243) se obtiene de la maximización del valor respecto a la producción x , que es sólo la definición intuitiva del P anterior, y reemplaza la condición de pegado suave. La última condición dice que una vez que Q alcanza Q_m y el costo de producción se vuelve constante, la producción acumulada ya no puede afectar el valor de la empresa, así que V es solo función de P . V en este caso:

$$V(P) = \begin{cases} A_1 P^{\beta_1} & \text{si } P < \bar{c} \\ A_2 P^{\beta_2} + \frac{P}{\delta} - \frac{\bar{c}}{r} & \text{si } P > \bar{c} \end{cases} \quad (16.245)$$

En esta ecuación β_1 y β_2 son las raíces de la ecuación cuadrática fundamental, y A_1 y A_2 las constantes dadas con anterioridad. Cuando $P < P^*$ y $x = 0$, se tiene la solución:

$$V(P, Q) = aP^{\beta_1} \quad (16.246)$$

Por otra parte, cuando $P < P^*$ y $x = 1$, la ecuación diferencial parcial se transforma en una ecuación distinta que puede ser resuelta algebraicamente.

16.5.5 Incertidumbre de costos en la inversión

Cuando la incertidumbre se produce en el costo de la inversión existen dos tipos de factores que la explican, según Pindyck (1993):

- Incertidumbre técnica: dificultad física, tiempo y esfuerzo, de completar el proyecto.
- Incertidumbre de costos de insumos: relacionada a la fluctuación de precios sin predicción, externo a la firma.

Las incertidumbres anteriores aumentan el valor de la oportunidad de inversión. Cada incertidumbre afecta de manera distinta la decisión de invertir. En el caso de la incertidumbre técnica, esta en general hace que la inversión sea más atractiva, puesto que revela información relacionada a los costos. En el caso de la de costos de insumos, la incertidumbre hace menos atractiva la inversión hoy dado que se genera valor solo por el hecho de esperar por nueva información. Lo anterior, se ve afectado aún más si existe una correlación positiva con la economía (lo que generalmente es el caso).

Las reglas de decisión para invertir, sujeto a ambas incertidumbres vienen dadas por:

$$dK = -I dt + v(IK)^{\frac{1}{2}} dz + \gamma K dw \quad (16.247)$$

En este caso se asume que \tilde{K} es el costo de terminación actual, cuyo valor esperado se asume conocido.

En el caso que solo existe incertidumbre técnica, se asume que $\gamma = 0$, por lo que se relaciona al segundo término de la ecuación (16.247). Se observa que K cambia solo cuando hay inversión y $\frac{dK}{K}$ aumenta linealmente con $\frac{I}{K}$. Cuando existe inversión, el cambio esperado en K en un intervalo Δt es $-I \Delta t$. De aquí, la inversión total en el proyecto viene dada por:

$$\int_0^{\tilde{T}} I dt \quad (16.248)$$

, donde \tilde{T} es el tiempo estocástico de terminación del proyecto.

Por efecto de la estocasticidad, el costo total actual del proyecto solo se conoce cuando se completa este.

En el otro caso, cuando solo existe incertidumbre en costos de insumos, se considera $v = 0$. Por lo anterior, $\frac{dK}{K}$ es constante e independiente de I , por ende K fluctúa, aunque no exista

inversión. Además, los costos de labor y materiales cambiarán el valor de K , independiente de lo que la firma haga.

El problema es encontrar una política de inversión que maximice el valor de la opción:

$$F(K) = \max_{I(t)} E \left[V e^{-\mu \tilde{T}} - \int_0^{\tilde{T}} I(t) e^{-\mu t} dt \right] \quad (16.249)$$

$$\begin{aligned} & \text{s. a.} \\ & 0 \leq I(t) \leq k \end{aligned} \quad (16.250)$$

$$K(\tilde{T}) = 0 \quad (16.251)$$

Para resolver este problema, en primer lugar se utiliza la siguiente ecuación, para el precio x de un activo o portafolio de activos correlacionados con w :

$$dx = \alpha_x x dt + \sigma_x x dw \quad (16.252)$$

Utilizando programación dinámica es posible demostrar que $F(K)$ debe satisfacer:

$$\frac{1}{2} \nu^2 I K F''(K) + \frac{1}{2} \gamma^2 K^2 F''(K) - I F'(K) - \phi_x \gamma K F'(K) - I = rF(k) \quad (16.253)$$

$$\phi_x = \frac{r_x - r}{\sigma_x} = \phi \rho_{xm} \quad (16.254)$$

$$r_x = r + \phi \rho_{xm} \sigma_x \quad (16.255)$$

Donde: ϕ es el precio de mercado del riesgo y ρ_{xm} corresponde al coeficiente de correlación entre x y el portafolio de mercado.

Por la linealidad de la ecuación (16.253) en I , la tasa de inversión que maximiza $F(K)$ es 0 o k . En el caso en que la tasa de inversión es k , se tienen las siguientes condiciones:

$$F(0) = V \quad (16.256)$$

$$\lim_{K \rightarrow \infty} F(K) = 0 \quad (16.257)$$

$$\frac{1}{2} \nu^2 K^* F''(K^*) - F'(K^*) - 1 = 0 \quad (16.258)$$

En cambio, si la tasa de inversión es 0, se cumple que:

$$F(K) = A K^{\beta_2} \quad (16.259)$$

La primera solución es la relacionada únicamente con la incertidumbre técnica, donde $F(K)$ debe satisfacer:

$$\frac{1}{2}v^2 I K F''(K) - I F'(K) - I = r F(K) \quad (16.260)$$

Como fue explicado anteriormente, K no cambia si no existe inversión. De aquí, $F(K) = 0$ cuando $K > K^*$. Además, si se considera que $r = 0$, el valor de la opción resulta:

$$F(K) = V - K + v^2 \left(\frac{V}{2}\right)^{-\frac{2}{v^2}} \left(\frac{K}{v^2+2}\right)^{\frac{(v^2+2)}{v^2}} \quad (16.261)$$

Cuando no hay posibilidad de abandono del proyecto minero, $V - K$ representa el valor de la oportunidad de inversión. Se debe notar que a mayor incertidumbre mayor también será el valor de la oportunidad inversión y el costo máximo para el cual la inversión es económica.

A partir de la ecuación (16.261) es posible derivar el K de gatillo:

$$K^* = \left(1 + \frac{1}{2}v^2\right)V \quad (16.262)$$

La segunda solución al problema tiene relación exclusivamente con la incertidumbre de costos. En este caso, como K cambia independiente a la inversión se debe cumplir que $F(K) > 0$ para todo K finito y que $F'(K^*) = -1$. Además, se debe considerar que si $\gamma > 0$ y $r = 0$ no existe solución para $F(K)$. Por otro lado, si $I = 0$, \tilde{K} distribuye de forma logarítmica y solo se requiere un valor de γ para obtener K^* .

Finalmente, cuando existen ambas incertidumbres, $F(K)$ y K^* se pueden obtener numéricamente a partir de cualquier combinación de v , γ y ϕ_x , además de las condiciones de borde (16.256) a la (16.258).

16.5.6 Producción *post* primera inversión

A continuación, se analiza un problema en el que la empresa puede comenzar a producir luego de realizada la primera inversión. Las ecuaciones que se modifican del caso base son las de la primera etapa, debido a que la segunda etapa tiene el mismo comportamiento que en los casos anteriormente analizados. De aquí:

$$F_1(P_1^*) = V(P_1^*) - I_1 \quad (16.263)$$

$$F_1'(P_1^*) = V'(P_1^*) \quad (16.264)$$

$$F_1(P) = \begin{cases} D_1 P^{\beta_1}, & P < P_1^* \\ V(P_1^*) - I_1, & P \geq P_1^* \end{cases} \quad (16.265)$$

, donde P_1^* es solución a la ecuación:

$$(\beta_1 - \beta_2)B_2(P_1^*)^{\beta_2} + (\beta_1 - 1)\frac{P_1^*}{\delta} - \beta_1\left(\frac{C}{r} + I_1\right) = 0 \quad (16.266)$$

Se debe notar que $I_1 > I_2$, ya que se considera que una ampliación es más económica que un nuevo proyecto con la misma capacidad, donde la inversión de la segunda etapa representa una expansión de la primera.

Además, con un análisis teórico se desprende que la inversión de la segunda etapa se debiese realizar en el mínimo precio esperado P_2^* , que corresponde al precio donde la tendencia esperada tiene que ser creciente. En otras palabras, la segunda inversión se relaciona con las expectativas de crecimiento a futuro del precio.

Es importante destacar que se deben implementar restricciones de capacidad de inversión, para que estas no sean realizadas como una única inversión en un tiempo t .

Al utilizar programación dinámica y el modelo de inversión continua, se obtiene:

$$r(F(V, K) - F_V V) = \pi + \frac{E[d(F - F_V V)]}{dt} \quad (16.267)$$

Donde $J = F - F_V V$. Desarrollando los términos se obtiene:

$$E[d(F - F_V V)] = \frac{1}{2}F_{VV}(dV)^2 + F_V dV + F_K dK - F_V dV \quad (16.268)$$

$$= \frac{1}{2}\sigma^2 V^2 F_{VV} dt - I F_K dt \quad (16.269)$$

$$\pi = -I - \delta V F_V + P - C \quad (16.270)$$

De aquí, la ecuación que se obtiene resulta ser:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 V^2 F_{VV} + (r - \delta)V F_V - rF - I F_K - I + P - C = 0 \quad (16.271)$$

De esta forma, se consideran los ingresos que se perciben desde la primera inversión realizada, asumiendo que algunos proyectos pueden generar beneficios a partir de un punto de inversión y de ahí en adelante las inversiones son más bien de sustentabilidad o expansión. Para resolver

la ecuación (16.271), se deben utilizar métodos numéricos, tales como diferencias finitas. De esta forma es posible derivar V^* y $F(V^*)$.

16.6 Opciones de interés para futuras investigaciones

16.6.1 Una proyección a las opciones reales

Actualmente las evaluaciones de proyectos mineros tienden a ignorar la naturaleza incierta de los mismos, y por ende el uso de opciones reales.

El incorporar estocasticidad matemática en la resolución de las decisiones de inversión en minería no solo aporta una mayor realidad al problema, sino que más importantemente mejora los retornos económicos esperados de las compañías mineras (Savolainen, 2016). Se reconoce así que la incorporación de opciones reales a la evaluación de proyectos es una de las tareas pendientes más importantes en la minería contemporánea.

En esta sección se plantean diversos ejemplos inéditos, propuestos por alumnos del curso Fundamentos de la Economía de Minerales de la Pontificia Universidad Católica de Chile. Estos ejemplos consideran la incorporación de las siguientes opciones reales:

- Invertir en una nueva tecnología con el objetivo de disminuir la incertidumbre de la recuperación del mineral.
- Abrir o cerrar una mina dependiendo de la incertidumbre del precio y el impacto que este tiene sobre el cálculo de las leyes y tonelajes correspondientes. Esto, a diferencia de lo visto antes en este capítulo, sobre la base de tener un recurso heterogéneo.
- Operar o detener la faena minera tomando en cuenta un nivel de nieve, la que cae según un comportamiento estocástico.
- Abrir o cerrar una mina considerando recursos finitos, y, por tanto, los costos de oportunidad a pagar por cerrarla temporal o definitivamente. Lo anterior, sujeto a la naturaleza de su depósito y envejecimiento producto de su explotación.
- Abrir o cerrar una mina bajo un precio estocástico, con la particularidad de trabajar con una tasa de impuestos flexibles por parte del Estado en escenarios de precios bajos a modo de desincentivar a las empresas a que cierren sus operaciones.

Esta sección pretende por un lado aportar en el conocimiento teórico de las opciones reales en un ambiente de explotación de recursos minerales, mientras que por otro lado busca incentivar

a los lectores a que continúen la investigación en este sentido. Savolainen (2016) entrega una guía con respecto a ciertas áreas de investigación que no han sido exploradas o su nivel de conocimiento es limitado en la actualidad. A continuación, se resumen algunos de los factores que a juicio de Savolainen (2016) todavía deben ser investigados con mayor profundidad:

Chen (2010), Guzmán y Silva (2017) y Labys *et al.* (1999) proponen que los precios de los metales no siguen un proceso completamente aleatorio, sino que pueden estar correlacionados a factores macroeconómicos.

Por su parte, se sugiere que la característica clave de la incertidumbre técnica (endógena) es que no está sujeta a la volatilidad y puede ser reducida por el aprendizaje activo, es decir, a través de investigación y desarrollo. Además, la incertidumbre del mercado (exógena) está sujeta a la volatilidad variando de forma impredecible y que su valor futuro no puede ser resuelto, si no es de forma empírica.

Además, una forma de direccionar las opciones reales para aplicaciones futuras es incluir la teoría de juegos para la evaluación en la exploración de bienes, discutidos por ejemplo en Laughton (2007) y Krzak (2013).

RECUADRO 16.15

BHP DECIDE RETRASAR LA EXPANSIÓN DE OLYMPIC DAM

“BHP Billiton Ltd., retrasó, por un periodo de dos años, una inversión de expansión de \$33 billones de dólares en Australia debido a la caída de precio del *commodity*” (Financial Post, 2012).

BHP después de reportar una caída de un 35% de sus ganancias de la segunda mitad del año fiscal 2012, señal clara de la desaceleración del crecimiento de la economía China, implementó la opción de retrasar la expansión de la mina australiana Olympic Dam debido a los altos costos y la caída del precio de los *commodities* a explotar (cobre y uranio).

BHP ha evaluado desde 2011 sus proyectos principales con opciones reales, con especial énfasis en determinar el momento de inversión óptimo. Esto le permite a la compañía ser flexible ante cambios en el mercado. La postergación de Olympic Dam es el más claro ejemplo de la forma en la que se materializan las opciones reales en la práctica, aunque en ningún caso es la única.

Este caso de estudio sirve para recalcar la importancia de las opciones reales en la actualidad, en donde, junto a BHP, se suman algunas otras empresas mineras. Sin embargo, aún queda un largo camino para considerar las múltiples incertidumbres asociadas a la minería, por lo que este capítulo puede ser la base para incluirlas en las diversas decisiones que se ve sometida una empresa de este rubro, tales como monto y tiempo de inversión, cierre temporal de la mina e impuesto óptimo, entre otros.

16.6.2 Incertidumbre en la recuperación metalúrgica

Uno de los principales riesgos críticos que afecta a todo proyecto minero es el relacionado con la capacidad de recuperar los metales contenidos en los yacimientos. De aquí, es pertinente analizar la opción de realizar una inversión que permita aumentar la recuperación metalúrgica. Esta se hace en base a un número reducido de pequeñas pruebas de laboratorio e industriales, lo que dificulta el conocimiento total del cálculo hecho y del prospecto en cuestión. De este modo, sería viable mejorar la recuperación metalúrgica en base a realizar una mayor cantidad de pruebas y testeos (Carrasco *et al.*, 2008).

Hasta este punto se ha tomado en cuenta la opción de mejorar la recuperación asociada a un determinado precio del *commodity* (Sabour, 2002), pero no se ha analizado la recuperación con un riesgo asociado.

Para la resolución de este ejercicio se considera una incertidumbre existente a la posibilidad de mejorar los procesos a futuro mediante avances tecnológicos desarrollados en el rubro. Estos se consideran al incluir la función $\gamma(t)$ que relaciona las mejoras de la recuperación metalúrgica en base a los avances tecnológicos, por lo que la recuperación puede ser modelada como un proceso geométrico Browniano:

$$dR = \gamma(t)dt + \sigma_R dz \quad (16.272)$$

En primer lugar, se analizará el impacto de la variabilidad de la recuperación, para posteriormente incluir la opción de invertir y así aumentar la capacidad de recuperar mineral. Con la ecuación (16.272) y considerando la condición de agotabilidad de las reservas, el problema puede ser modelado como sigue:

$$\max_{q(t), T} E \left(\int_0^T (P(t)q(t)R(t) - C(q(t), S(t)))e^{-rt} dt \right) \quad (16.273)$$

s. a.

$$dS = -qdt \quad (16.274)$$

$$dR = \gamma(t)dt + \sigma_R dz \quad (16.275)$$

$$S(0) = S_o \quad (16.276)$$

$$q, T, S \geq 0 \quad (16.277)$$

La variable $R(t)$ corresponde a la recuperación del metal en cada instante de tiempo. Además, se considera la función de costos que a su vez depende de la tasa de extracción, las reservas y la capacidad. Para la resolución de este problema, la función de costos se toma como:

$$C(q, S, K) = \frac{c e^{-kq^2}}{2 - S+1} \quad (16.278)$$

Este problema puede ser resuelto mediante programación dinámica estocástica, por lo que su solución debe cumplir con:

$$0 = \max_q \left\{ \pi_d + \frac{1}{dt} E(dJ) \right\} \quad (16.279)$$

Utilizando expansión de Taylor y considerando la variabilidad, dJ puede ser escrito como:

$$E(dJ) = -qJ_s dt + \gamma(t)J_R dt + J_t dt + \frac{1}{2} \sigma_R^2 J_{RR} dt \quad (16.280)$$

Reemplazando la ecuación (16.280) en (16.279):

$$0 = \max_q \left\{ \pi_d - qJ_s + J_t + \gamma(t)J_R + \frac{1}{2} \sigma_R^2 J_{RR} \right\} \quad (16.281)$$

Al derivar (16.281) con respecto a q , se obtiene:

$$\frac{\partial \pi_d}{\partial q} = J_s \quad (16.282)$$

Ahora si se deriva (16.281) respecto a S :

$$0 = \frac{\partial \pi_d}{\partial S} - qJ_{ss} + J_{ts} + \gamma(t)J_R + \frac{1}{2} \sigma_R^2 J_{RRS} \quad (16.283)$$

Si se aplica $\frac{1}{dt}$ a la ecuación (16.280), se tiene:

$$\frac{1}{dt} E(dJ_s) = -qJ_{ss} + J_{ts} + \gamma(t)J_R + \frac{1}{2} \sigma_R^2 J_{RRS} \quad (16.284)$$

Remplazando la ecuación (16.284) en (16.283):

$$0 = \frac{\partial \pi_d}{\partial S} + \frac{1}{dt} E(dJ_S) \quad (16.285)$$

$$\frac{\partial \pi_d}{\partial S} = -\frac{1}{dt} E(dJ_S) \quad (16.286)$$

$$\frac{\partial \pi_d}{\partial S} = -\frac{1}{dt} E\left(d\left[\frac{\partial \pi_d}{\partial q}\right]\right) \quad (16.287)$$

Se sabe además que π_d corresponde a la utilidad descontada, donde:

$$\pi_d = (P(t)q(t)R(t) - C(q(t), S(t)))e^{-rt} \quad (16.288)$$

Por lo que al resolver las ecuaciones (16.282), (16.283) y (16.287), se obtiene:

$$\frac{\partial \pi_d}{\partial S} = -e^{-rt} C_S \quad (16.289)$$

$$\frac{\partial \pi_d}{\partial q} = e^{-rt}(P(t)R(t) - C_q) \quad (16.290)$$

$$-\frac{1}{dt} E\left(d\left[\frac{\partial \pi_d}{\partial q}\right]\right) = re^{-rt}(P(t)R(t) - C_q) + e^{-rt}\left(-P(t)\gamma(t) + \frac{1}{dt} E(dC_q)\right) \quad (16.291)$$

De la ecuación (16.291) se puede notar que es necesario el cálculo de $E(dC_q)$. Por este motivo, al aplicar el Lema de Itô resulta:

$$E(dC_q) = C_{qq}E(dq) - C_{qs}qdt \quad (16.292)$$

Reemplazando (16.280), (16.281), y (16.278) en (16.276):

$$-C_S = r(P(t)R(t) - C_q) - P(t)\gamma(t) + C_{qq}\frac{1}{dt}E(dq) - C_{qs}q \quad (16.293)$$

Al reordenar los términos de la ecuación (16.282):

$$\frac{1}{dt}E(dq) = \frac{1}{C_{qq}}(C_{qs}q + P(t)\gamma(t) - r(P(t)R(t) - C_q) - C_S) \quad (16.294)$$

Al analizar la ecuación (16.294) se puede observar que, si se considera una recuperación metalúrgica que mejora en el tiempo, debida a avances tecnológicos, la tasa de extracción de mineral tenderá a aumentar en el transcurso del proyecto. Esto adquiere sentido dado que se intentará producir más para, así, obtener una mayor cantidad de mineral a vender. Una posible consecuencia será que el tamaño de la mina aumentará para poder ser abastecida y dado que se

empieza a tratar con economías de escala, los costos disminuirán (Crowson, 2003). Además, el término $P(t)\gamma(t)$ corresponde al aporte positivo que ejercen las mejoras tecnológicas en los procesos metalúrgicos. Otro aspecto importante es que el término σ_R desaparece de la solución, por ende, la variabilidad existente en la función de recuperación es insignificante con respecto al resultado. De esta forma, se plantea el problema determinístico considerando una inversión que depende de la recuperación y de la capacidad de la planta.

A continuación, se considera la opción de inversión, donde se asume que será mayor en caso de instalar una planta con mayor recuperación y que esta última crece a una tasa $\gamma(t)$ (avances tecnológicos). La forma de modelar el problema en este caso es:

$$\max_{q(t), T, K} -\phi(K, R) + \int_{\tau}^T (P(t)q(t)R(t) - C(q(t), S(t)))e^{-rt} dt \quad (16.295)$$

s. a.

$$\dot{S} = -q \quad (16.296)$$

$$\dot{R} = \gamma(t) \quad (16.297)$$

$$0 \leq q(t) \leq K \quad (16.298)$$

$$S(0) = S_o \quad (16.299)$$

$$q, T, S \geq 0 \quad (16.300)$$

En primer lugar, este problema puede ser resuelto por control óptimo en dos etapas. Para la segunda etapa, queda:

$$\max_{q(t), T} \int_{\tau}^T (p(t) * q(t) * R(t) - C(q(t), S(t)))e^{-rt} dt \quad (16.301)$$

s. a.

$$\dot{S} = -q \quad (16.302)$$

$$\dot{R} = \gamma(t) \quad (16.303)$$

$$0 \leq q(t) \leq K \quad (16.304)$$

$$S(0) = S_o \quad (16.305)$$

$$q, T, S \geq 0 \quad (16.306)$$

Al construir el Hamiltoniano en valor corriente:

$$\hat{H} = (P(t)qR(t) - C(q, S)) + v(-q) + w(K - q) + \lambda(\gamma(t)) \quad (16.307)$$

Luego, las condiciones que deben cumplirse para lograr resolverlo por control óptimo son:

i. Condición del máximo:

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial q} = 0 \rightarrow P(t)R(t) - C_q - v - w = 0 \quad (16.308)$$

ii. Ecuaciones de estado:

$$\dot{S} = -q \quad (16.309)$$

$$\dot{R} = \gamma(t) \quad (16.310)$$

iii. Ecuaciones adjuntas:

$$\dot{v} = rv + C_S \quad (16.311)$$

$$\dot{\lambda} = r\lambda - pq \quad (16.312)$$

iv. Ecuación de transversalidad:

$$\hat{H}|_{t=T} = 0 \quad (16.313)$$

v. Condición de Karush-Kuhn-Tucker (KKT):

$$w \geq 0 \wedge w(K - q) = 0 \quad (16.314)$$

vi. Condición de agotabilidad:

$$K(T_1 - \tau) + \int_{T_1}^T q(t)dt \quad (16.315)$$

Es importante notar que, aunque en la ecuación (16.294) determina que los cambios tecnológicos tienden a aumentar la producción, no es factible expandir la capacidad de la planta en cada periodo. Es por esto que la ecuación de agotabilidad se plantea considerando un segmento con producción $q(t)$ decreciente y otro con producción K constante. Teniendo esto en consideración se define:

$$q(t) = \begin{cases} K, & \text{si } t \leq T_1 \\ q(t), & \text{si } T_1 \leq t \leq T \end{cases} \quad (16.316)$$

$$w(t) = \begin{cases} w(t), & \text{si } t \leq T_1 \\ 0, & \text{si } T_1 \leq t \leq T \end{cases} \quad (16.317)$$

Entonces, con t que se encuentra en $[T_1, T]$:

$$v(t) = P(t)R(t) - C_q \quad (16.318)$$

Al utilizar la función de costos establecida:

$$C_q = c \frac{e^{-kq}}{s+1} \quad (16.319)$$

Con las ecuaciones (16.319) y (16.318), se tiene:

$$v(t) = P(t)R(t) - c \frac{e^{-kq}}{s+1} \quad (16.320)$$

Al derivar con respecto al tiempo:

$$C_s = -\frac{c}{2} e^{-k} \left(\frac{q}{s+1} \right)^2 \quad (16.321)$$

$$\dot{v}(t) = \dot{P}R + P\dot{R} - ce^{-k} \left(\frac{\dot{q}}{s+1} - \frac{q}{(s+1)^2} \right) \quad (16.322)$$

Ahora, al utilizar la ecuación (16.311), se igualan las ecuaciones (16.321) y (16.322):

$$\dot{P}R + P\dot{R} - ce^{-k} \left(\frac{\dot{q}}{s+1} - \frac{q}{(s+1)^2} \right) = r \left(PR(t) - c \frac{e^{-kq}}{s+1} \right) - \frac{c}{2} e^{-k} \left(\frac{q}{s+1} \right)^2 \quad (16.323)$$

Se sabe que $\dot{R} = \gamma(t)$, por lo que la ecuación (16.323) queda:

$$\dot{P}R + P\gamma(t) - ce^{-k} \left(\frac{\dot{q}}{s+1} - \frac{q}{(s+1)^2} \right) = r \left(PR(t) - c \frac{e^{-kq}}{s+1} \right) - \frac{c}{2} e^{-k} \left(\frac{q}{s+1} \right)^2 \quad (16.324)$$

Al despejar \dot{q} y con la ecuación de estado se genera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\dot{q} = \frac{(-2e^k(s+1)^2 r (P(t)R(t) - c \frac{e^{-kq}}{s+1}) + cq(q+2) + 2e^k(s+1)^2 (P(t)\gamma(t) + P'(t)R))}{2c(s+1)} \quad (16.325)$$

$$\dot{S} = -q \quad (16.326)$$

Dada la alta complejidad de este sistema de ecuaciones, es necesario estudiar el comportamiento de las soluciones, considerando las dos siguientes ecuaciones de equilibrio:

$$\dot{S} = S \quad (16.327)$$

$$\dot{q} = 0 \quad (16.328)$$

Finalmente, se crea la matriz Jacobiana y se analizan las soluciones, tomando en consideración (16.325) y (16.326):

$$J = \begin{bmatrix} e^{2kr} + \frac{1}{s+1} & \frac{e^k}{c} \left((P(t)\gamma(t) + P(t)R) + P(t)rR \right) \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (16.329)$$

$$\text{Det}(J) = \frac{e^k}{c} \left((P(t)\gamma(t) + P(t)R) + P(t)rR \right) \quad (16.330)$$

$$\text{Traza}(J) = e^{2kr} + \frac{1}{s+1} \quad (16.331)$$

Se puede observar, según las ecuaciones (16.330) y (16.331), que siempre son positivas, por este motivo las soluciones pueden ser del tipo nodo inestable o punto espiral inestable.

Por otro lado, si la función de avances tecnológicos aumenta, la solución tenderá a transformarse únicamente en un punto espiral inestable. Estos resultados indican que a medida que mayor es la tasa de crecimiento de la recuperación más inestable será la solución. Esto se puede explicar, ya que, al existir una mayor recuperación, se tiene un mayor beneficio por unidad procesada, lo que permite que baje la ley de corte y se procese una mayor cantidad de mineral. Sin embargo, al tener una limitación por la planta, a medida que aumenta la recuperación y no puedo aumentar esta capacidad, la solución será cada vez menos óptima en el tiempo.

RECUADRO 16.17

CASO REAL DE INVERSIÓN EN LA RECUPERACIÓN METALÚRGICA

En el año 2013 se realizó una evaluación para aumentar la recuperación metalúrgica de molibdeno en la Planta I, Las Tórtolas, División Los Bronces, lo que generaría un aumento de 159 toneladas métricas de fino. El aumento de recuperación de molibdeno se estimó a 7,31% a partir de una inversión de USD 368.000 en costos de equipo, USD 85.428 en honorarios y USD 50.380 en contingencias. Respecto a las utilidades de este proyecto, se consideraron distintos escenarios de precios que podría conducir a una Tasa Interna de Retorno (TIR) de hasta 714%, sin embargo, debido al superávit de oferta de molibdeno ocurrido hasta agosto del 2012, el proyecto no fue rentable (Méndez, 2013).

Este es una interesante demostración que permite cuantificar la inversión en una planta para aumentar la recuperación metalúrgica, y sumado con la aplicación de opciones reales, es posible determinar el momento óptimo en que será factible invertir, dada una incertidumbre en el precio del *commodity*.

16.6.3 Apertura y cierre de una mina con recursos heterogéneos

La distribución de las leyes de un mineral está asociada típicamente a una incertidumbre significativa, dado que no se poseen los recursos y tiempo para conocer en cada momento las leyes que se están extrayendo. El incluir incertidumbre a nivel geológico, se ha demostrado puede generar un aumento considerable en el valor del proyecto (Leite y Dimitrakopoulos, 2009).

Para este problema se tiene la capacidad de cerrar una operación minera de forma de mitigar los efectos que se generar a partir del bajo precio; sin embargo, se abordará este problema ahora para el caso de un yacimiento heterogéneos, considerando como factor de incertidumbre el precio del *commodity* explotado y el impacto que tiene sobre el cálculo de las leyes y tonelajes correspondientes, que afectará a la opción de cierre.

La importancia radica en conocer la ley de corte al momento de cerrar la mina, junto con una estimación óptima de la producción en cada instante de tiempo, la cual dependerá de la heterogeneidad del recurso.

En primer lugar, se debe definir la función de tonelaje de mineral por sobre una ley recuperable de corte, dada por $\tau(g_c)$, en donde:

$$g_{min} \leq g \leq g_{max} \quad (16.332)$$

Se asume que la incertidumbre del precio puede ser modelada por medio de la ecuación:

$$dP = \alpha P dt + \sigma P dz \quad (16.333)$$

Con estas consideraciones y sumado a la condición de agotabilidad y de un recurso inicial que corresponde a $S_0 = \tau(g_{min})$, el problema puede ser escrito como sigue:

$$\max_{q(t)} E \left\{ \int_0^T e^{-rt} [P(t)q(t)\tau^{-1}(S_0 - S(t)) - cq(t)] dt \right\} \quad (16.334)$$

s. a.

$$dP = \alpha P dt + \sigma P dz \quad (16.335)$$

$$ds = -q dt \quad (16.336)$$

$$\tau(g_{min}) = S_0 \quad (16.337)$$

$$q(t), s(t) \geq 0; \forall t \in [0, t] \quad (16.338)$$

Este problema puede ser resuelto mediante programación dinámica estocástica cuya solución se deriva de la siguiente ecuación:

$$rV = \max_{q(t)} \left\{ \pi(q) + \frac{E(dV)}{dt} \right\} \quad (16.339)$$

Ahora, el problema puede separarse para dos casos, el primero cuando la mina está en producción y el segundo cuando la mina se encuentra cerrada. Cada uno de estos casos puede ser escrito como sigue:

$$rV = \begin{cases} P(t)\tau^{-1}(S_0 - S(t))q^*(t) - cq^*(t) + \frac{E(dV)}{dt}, & \text{si } P(t)\tau^{-1}(S_0 - S(t)) \geq c \\ \frac{E(dV)}{dt}, & \text{si } P(t)\tau^{-1}(S_0 - S(t)) < c \end{cases} \quad (16.340)$$

Hay que destacar la similitud que tiene con el modelo formulado por Brennan y Schwartz (1985), diferenciándose por la utilidad instantánea para el caso en que se está en producción al considerar las leyes del recurso.

Utilizando expansión de Taylor para el cálculo de dV :

$$dV = V_t dt + V_P dp + \frac{1}{2} V_{PP} (dP)^2 \quad (16.341)$$

Aplicando el operador de Itô $\frac{E(\cdot)}{dt}$:

$$dV = V_P(\alpha P dt + \sigma P dz) + \frac{1}{2} V_{PP} (\sigma P)^2 dt \quad / \frac{E(\cdot)}{dt} \quad (16.342)$$

$$\frac{E(dV)}{dt} = V_P \alpha P + \frac{1}{2} V_{PP} \sigma^2 P^2 \quad (16.343)$$

Reescribiendo la ecuación (16.340):

$$rV = V_P \alpha P + \frac{1}{2} V_{PP} \sigma^2 P^2 + P(t) \tau^{-1} (S_0 - S(t)) q^*(t) - cq^*(t) \quad (16.344)$$

$$rV = V_P \alpha P + \frac{1}{2} V_{PP} \sigma^2 P^2 \quad (16.345)$$

Se utiliza como supuesto que V depende únicamente del precio, por lo que se tiene:

$$V_P = V'(P) ; V_{PP} = V''(P) \quad (16.346)$$

Ahora las ecuaciones (16.344) y (16.345), pueden escribirse como:

$$rV = V'(P) P + \frac{1}{2} V''(P) \sigma^2 P^2 + P(t) \tau^{-1} (S_0 - S(t)) q^*(t) - cq^*(t) \quad (16.347)$$

$$rV = V'(P) \alpha P + \frac{1}{2} V''(P) \sigma^2 P^2 \quad (16.348)$$

Para resolver esta ecuación diferencial de segundo grado se debe considerar la solución de la forma $V(P) = AP^B$. Esto implica que:

$$V' = ABP^{B-1} ; V'' = AB(B-1)P^{B-2} \quad (16.349)$$

Para el caso de la mina cerrada, se tiene:

$$rAP^B = ABP^{B-1} \alpha P + \frac{1}{2} AB(B-1)P^{B-2} \sigma^2 P^2 \quad (16.350)$$

$$r = \alpha B + \frac{1}{2} \sigma^2 B(B - 1) \quad (16.351)$$

$$0 = \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2} \right) B + \frac{\sigma^2}{2} B^2 - r \quad (16.352)$$

Además:

$$B_{1,2} = \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{\sigma^2} \right) \pm \left(\frac{2r}{\sigma^2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{\sigma^2} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (16.353)$$

En donde: $B_1 > 1$; $B_2 < 0$

$$V_2(P) = A_1 P^{B_1} + A_2 P^{B_2} \quad (16.354)$$

Sin embargo, si $P = 0$ entonces $V_2(P) = 0$, por lo que $A_2 = 0$ (dado que $B_2 < 0$ y que se prefiere no producir). Entonces, la solución de la mina cerrada es:

$$V_2(P) = A_1 P^{B_1} \quad (16.355)$$

Como era de esperarse, la solución de la mina cerrada es exactamente igual para el caso sin considerar homogeneidad. Por otro lado, para el caso de la mina abierta, se conserva la solución homogénea, pero además se suma la solución particular, por lo que se tiene lo siguiente:

$$V(P) = D_1 P^{B_1} + D_2 P^{B_2} + \frac{P(t)\tau^{-1}(S_0 - S(t))q^*(t) - cq^*(t)}{r} \quad (16.356)$$

Se debe cumplir que si $P \rightarrow \infty$ entonces $V(P) \neq \infty$. Así $D_1 = 0$, dado que $B_1 > 1$. De A aquí, la solución resulta:

$$V_1(P) = D_2 P^{B_2} + \frac{P(t)\tau^{-1}(S_0 - S(t))q^*(t) - cq^*(t)}{r} \quad (16.357)$$

Para determinar si es factible la opción de cerrar la mina se debe considerar la condición de continuidad, donde se considera E como el costo de cierre. La condición viene dada por:

$$V_2(P) - E = V_1(P) \quad (16.358)$$

$$A_1 P_0^{B_1} = D_2 P_0^{B_2} + \frac{P(t)\tau^{-1}(S_0 - S(t))q^*(t) - cq^*(t)}{r} - E \quad (16.359)$$

Esta condición se explica dado que se debe ser indiferente si cerrar e incurrir en un gasto E o seguir produciendo para un determinado precio, por lo que si llega a disminuir de este valor,

se prefiere el cierre de la mina. Además, se cumple la condición de pegado suave, ya que, en caso de no ser así, la mina prefiere extender la decisión de cerrar:

$$A_1 B_1 P_0^{B_1-1} = D_2 B_2 P_0^{B_2-1} + \frac{\tau^{-1}(S_0 - S(t))q^*(t)}{r} \quad (16.360)$$

Con las ecuaciones (16.359) y (16.360) es posible encontrar el valor de los coeficientes A_1 y D_2 y tomar la decisión de cerrar o no en cada momento para un precio de gatillo calculado, como se vio en secciones anteriores.

Como se puede observar en el resultado, el considerar un recurso con leyes variables, influye directamente en el precio que incentive la opción de cierre de la mina. Sin embargo, sería interesante considerar una incertidumbre propia del recurso, que sumado a la del precio, afectarían en la solución del problema.

16.6.4 Operación flexible bajo condiciones meteorológicas inciertas

En muchos países existe un gran número de faenas mineras desarrolladas en zonas de alta montaña, que se encuentran sometidas a severas condiciones meteorológicas y nivometeorológicas.¹⁰⁷ Los sistemas frontales invernales – como lo son la acumulación de nieve, avalanchas y aluviones – además de provocar daños a la infraestructura, pueden tener fuertes repercusiones en la operación y en el proceso productivo de una faena minera.

Una forma de mitigar el riesgo de aludes en minas subterráneas es por medio de una red de monitoreo en la superficie. Esta innovación, por medio de sensores, busca controlar el nivel de nieve existente en la superficie de la faena minera para determinar cuándo se debe operar y cuándo no es conveniente hacerlo. Mediante el análisis de opciones reales, la incorporación de este sistema de sensores a la operación de la mina tendrá como objetivo minimizar los daños provocados por aludes de nieve e infiltraciones al nivel de producción.

Con el enfoque de evaluar cómo las consecuencias y los riesgos afectan económicamente a la planificación minera en estos casos, es preciso determinar cómo evitar su efecto, buscando maximizar el beneficio de evaluar la posible generación de derrumbes considerando la decisión

107 Actividad de diagnóstico y predicción del estado del manto nivoso (se aplica al tiempo o lugar que es abundante en nieve). Se analizan variables tanto del manto nivoso, como de las condiciones meteorológicas. (Sanz *et al.*, 2013).

de operar los sensores en un cierto rango de nivel de nieve, es decir, determinar en qué rango es conveniente mantener a los sensores operativos.

En la literatura se desarrolla cómo se aborda el tema del riesgo causado por el efecto del nivel de nieve en la superficie de los yacimientos de altura. Uno de estos es el estudio de Asfura y Mery (2008), quienes indagan sobre la magnitud de riesgo monetario asociado a fenómenos meteorológicos, hidrológicos y nivo-meteorológicos. En este caso, el riesgo es asociado a una probabilidad de falla y a las pérdidas o consecuencias de esas fallas, de manera de generar una jerarquización de los distintos riesgos que se encuentran en la mina. Su metodología incluye alcances sobre la identificación, cuantificación y jerarquización de las vulnerabilidades y pérdidas derivadas de dichos riesgos como también la importancia de las recomendaciones para mitigar el riesgo y las consecuencias económicas.

Asfura y Mery (2008) tratan de manera determinística la magnitud del riesgo de accidentes producidos por efectos del clima. En cambio, desde el punto de vista de las opciones reales el caso que se desarrolla en esta sub-sección evalúa un nivel de nieve que varía estocásticamente. Además, el problema planteado busca determinar cuándo es más importante evaluar el riesgo, es decir, en qué rangos de nivel de nieve es relevante activar el monitor, para prevenir fallas en la operación de la mina.

Por otra parte, Janeras *et al.* (2013) determina el riesgo de aludes de nieve, en base a la evaluación del historial de fallas ocurridas por altos niveles de nieve. En este artículo se presentan el número de accidentes debido a avalanchas en El Teniente y el nivel de nieve que causó avalanchas en el pueblo minero de Sewell. Pero no se determina ninguna metodología matemática para mitigar, evitar u optimizar el monitoreo de nivel de nieve.

Por su parte, Sunkpho y Ootamakorn (2011) muestra que es posible aplicar un sistema de monitoreo remoto para conocer las condiciones de los niveles y flujo en cuencas al sur de Tailandia en tiempo real. El sistema incluye una unidad de transmisión y procesamiento, lo que permite establecer un canal de información entre los expertos y las autoridades de la región. Lo anterior, valida la aplicabilidad de la presente propuesta, al igual que Aziz *et al.* (1997), quienes, basados en un modelo hidrodinámico acoplado a un sistema de información geográfica, genera un sistema efectivo de alertas.

Finalmente, Rodríguez (2014) genera un sistema de soporte de decisiones para gestión de riesgo ante aluviones en mina El Teniente, integrando un pronóstico meteorológico, un modelo

hidrológico y un modelo de estabilidad de taludes de la cuenca que considera la incertidumbre de las variables. Como resultado, el modelo entrega un factor de seguridad, variable que indica el grado de estabilidad del terreno donde, valores menores a uno indican alerta de aluvión. Rodríguez (2014), se apoya en tres fuentes de incertidumbre, como sigue:

- Incertidumbre asociada al pronóstico meteorológico, donde se asume que tanto precipitaciones como otras variables atmosféricas no están espacialmente distribuidas, debido a errores en el modelo de pronóstico meteorológico. Este se basa en Simmons y Hollingsworth, (2002).
- Incertidumbre en el modelo hidrológico del suelo, basado en Schaake *et al.* (2007), debido a errores en el modelo, en las condiciones iniciales y en los parámetros hidrológicos.
- Incertidumbre en el modelo de estabilidad de taludes, destacando que los taludes no fallan según lo predicho (Schmidt *et al.*, 2008).

A la dificultad de incorporación de incertidumbre a los modelos, se le suma la baja cantidad de mediciones en terreno, por lo que aplicar el sistema de monitoreo de nieve en faenas de altura permite, además, respaldar o corregir modelos de pronósticos.

A continuación, se presenta el problema de riesgo meteorológicos producto de eventos nivometeorológicos en faenas de minería subterránea considerando análisis de opciones reales.

Las variables del problema en este caso quedan definidas por:

- P : precio fijo del *commodity*.
- τ : probabilidad de falla. Relacionada con la inoperatividad del punto de producción debido al infiltración de agua-lodo.
- C_{op} : costo de operación por sistema de monitoreo.

Mientras que la variable estado es:

- N : nivel de hielo en la superficie de la mina.

Por su parte, las variables de control del problema son:

- q : tasa de producción del mineral.

- m : cantidad de monitores a instalar.

Con todo lo anterior, el planteamiento es el siguiente:

$$\max_{q,m} E \left\{ \int_0^t [(Pq - cq)(1 - \tau) - C_{op}m] dt \right\} \quad (16.361)$$

s. a.

$$dN = \alpha N dt + \sigma dz \quad (16.362)$$

$$\dot{S} = -q dt \quad (16.363)$$

$$0 \leq q \leq K \quad (16.364)$$

$$m \geq 0 \quad (16.365)$$

$$P \text{ contante y positivo} \quad (16.366)$$

El problema anterior busca incorporar el riesgo en la incertidumbre geológica de un problema meteorológico: la entrada de agua-barro. Así, el planteamiento incluye esta incertidumbre, costos, variables de control y probabilidades de falla que permiten determinar la cantidad de monitores a habilitar, en cada período.

Para simplificar el álgebra se realizan una serie de supuestos:

- Por simplicidad, y de acuerdo a las evaluaciones de proyectos que típicamente se realizan en minería, se asumirá un precio fijo equivalente al que usan las minas en la evaluación de largo plazo.
- La probabilidad de falla puede considerarse como $f = \frac{1}{m}$, de forma de ejemplificar la relación con el número de monitores. Es decir, a mayor número de monitores se puede establecer mejores medidas de mitigación y de control, por ende, las probabilidades de falla deberían disminuir.
- De acuerdo al nivel de hielo en superficie operarán o no los monitores.
- $V_t = 0$ y las reservas se pueden asumir infinitas (este supuesto puede ser válido en una evaluación de corto plazo).

Se considera que las reservas son lo suficientemente grandes como para considerarse infinitas, esto es:

$$V_s = 0 \quad (16.367)$$

Luego:

$$\begin{cases} rV = \pi(K) + \frac{1}{dt}E(dV) & \text{si esta produciendo } (q_t = K) \\ rV = 0 + \frac{1}{dt}E(dV) & \text{si no esta produciendo } (q_t = 0) \end{cases} \quad (16.368)$$

Los beneficios cuando se produce son:

$$\pi(K) = (pK - cK)(1 - f) - C_o m \quad (16.369)$$

Desarrollando $\frac{1}{dt}E(dV)$ por Lema de Itô:

$$dV = \left[V_t + \alpha NV_N + \frac{1}{2}\sigma^2 V_{NN} \right] dt + \sigma V_N dz \quad (16.370)$$

$$E(dV) = \left[V_t + \alpha NV_N + \frac{1}{2}\sigma^2 V_{NN} \right] dt \quad (16.371)$$

Como V es independiente de t , al derivar con respecto a t se obtiene:

$$\frac{1}{dt}E(dV) = \alpha NV_N + \frac{1}{2}\sigma^2 V_{NN} \quad (16.372)$$

Por lo tanto, V solo depende del nivel de nieve.

$$V_N = V'(N) \quad (16.373)$$

$$V_{NN} = V''(N) \quad (16.374)$$

De esta manera, se tiene las siguientes opciones:

- Cuando no están operando los monitores y al considerar las ecuaciones (16.373) y (16.374):

$$\frac{1}{2}\sigma^2 V''(N) + \alpha NV'(N) - rV(N) = 0 \quad (16.375)$$

Donde se puede obtener la solución a la ecuación diferencial de segundo orden, que viene dada por:

$$V(N) = A_1 N^{\beta_1} + A_2 N^{\beta_2} \quad (16.376)$$

- Cuando el nivel de nieve es $N(0) = 0$. El valor de V evaluado en este caso es $(PK - cK)(1 - f)$, pero se considera que el costo de no implementar los monitores es

tan alto que V es igual a cero. Por lo que es necesario que $A_2 = 0$. Por lo tanto, se obtiene que:

$$V(N) = A_1 N^{\beta_1} \quad (16.377)$$

Con:

$$\beta_1^* = \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{r^2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{r^2}\right)^2 + \frac{2r}{\sigma^2}} \quad (16.378)$$

- Cuando están operando los monitores y considerando la ecuación (16.359), se obtiene:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 V''(N) + \alpha N V'(N) - rV(N) + (PK - cK)(1 - f) - C_o m = 0 \quad (16.379)$$

Luego, se tiene que resolver esta ecuación diferencial de segundo orden donde la solución de la parte homogénea es la misma que la solución del caso anterior. Además, la solución de la parte no homogénea viene dada por:

$$\frac{(PK - cK)(1 - f) - C_o m}{r} \quad (16.380)$$

De esta manera:

$$V(N) = C_1 N^{\beta_1} + C_2 N^{\beta_2} + \frac{(PK - cK)(1 - f) - C_o m}{r} \quad (16.381)$$

Si el nivel de nieve tiende a infinito entonces $C_1 = 0$, de donde:

$$V(N) = C_2 N^{\beta_2} + \frac{(PK - cK)(1 - f) - C_o m}{r} \quad (16.382)$$

Por otro lado, se considera que el precio es mayor a los costos (costos de operación más los de funcionamiento del sensor). Por lo tanto, la mina se encuentra siempre en operación.

Lo que queda por determinar es cuándo opera el monitor de nivel de nieve. Para esto se tienen dos casos. Primero, si la mina no tiene el sensor instalado entonces existirá un nivel de nieve \bar{N} tal que sea suficiente de pagar los costos de instalación I a fin de evitar los riesgos. En segundo lugar, si la mina continúa operando los monitores entonces existirá un nivel de nieve inferior \underline{N} que tenga un riesgo suficientemente bajo para que el monitor deje de operar (no se consideran costos de desinstalación, porque solo se inactiva el monitor).

Para el nivel de nieve en el que se opera el monitor, se obtiene la ecuación de continuidad:

$$A_1 \bar{N}^{\beta_1} - I = C_2 \bar{N}^{\beta_2} + \frac{(PK - cK)(1-f) - C_0 m}{r} \quad (16.383)$$

Se deriva respecto a \bar{N} y utilizando la condición de pegado suave:

$$A_1 \beta_1 \bar{N}^{\beta_1 - 1} = C_2 \beta_2 \bar{N}^{\beta_2 - 1} \quad (16.384)$$

Para el nivel de nieve en el que no se opera el monitor, se calcula la ecuación de continuidad:

$$C_2 \underline{N}^{\beta_2} + \frac{(PK - cK)(1-f) - C_0 m}{r} = A_1 \bar{N}^{\beta_1} \quad (16.385)$$

Se deriva respecto a \underline{N} y considerando la condición de pegado suave:

$$C_2 \beta_2 \underline{N}^{\beta_2 - 1} = A_1 \beta_1 \bar{N}^{\beta_1} \quad (16.386)$$

Con las ecuaciones de continuidad y pegado suave se tendrán 4 ecuaciones y 4 incógnitas. De esta manera se determinan las constantes A_1 , C_2 y los niveles de monitoreo \bar{N} y \underline{N} .

16.6.5 Apertura y cierre con recursos finitos

Moel y Tufano (2002) señalan que el modelo de Brennan y Schwartz (1985) es muy limitado para tomar en cuenta las características intrínsecas de una compañía, que aportan más información a la hora de decidir abrir o cerrar una mina. Estos factores incluyen estructura de capital, perfil de riesgo de la compañía y el número de operaciones mineras que tenga en su portafolio, etc.

Con el fin de solventar las falencias previas, diversos autores han sumado elementos de mayor realismo en el problema original de Brennan y Schwartz (1985). Así por ejemplo, Frimpong y Whiting (1997) crean un modelo de apertura/cierre similar, pero incluyendo flexibilidad en la gestión para decidir el alcance de los esfuerzos de exploración antes de decidir la inversión en la mina. Además, estos autores desarrollaron métodos para incorporar cierres temporales de la mina y la opción de abandonar el proyecto en una etapa inicial de evaluación económica. Este último método también fue trabajado por Cortázar (2001), basado en la misma teoría de Brennan y Schwartz (1985).

Bajo otra línea de investigación, Sabour (2001) muestra que el precio de gatillo de clausura temporal en la mina aumenta a medida que disminuye la vida remanente de la mina (LOM remanente). Este mismo autor también estableció la relación entre el LOM remanente y el máximo período de suspensión (medido en tiempo) de una operación.

Humpreys (1996) argumenta, por otro lado, que en la práctica la flexibilidad en el cierre temporal de la mina puede tener algunas limitaciones debido al capital intensivo que se invierte en los proyectos mineros. Además, los valores para la opción de cierre temporal en minas de bajo costo pueden ser insignificantes. Tal como además discuten Cortázar *et. al* (2008) y Slade (2001).

Finalmente, a modo de buscar una solución más acorde a la realidad, Lemelin *et al.* (2006) simulan el valor de una fuente satelital de varios minerales, cuya gestión posee como opciones reales el cierre temporal y abandono del yacimiento.

Sin embargo, pese a todos estos avances no se ha abordado aún, de forma analítica, resolver el problema de apertura y cierre considerando el mineral como recurso finito y por ende con costos de oportunidad que se incurren al decidir cerrar o abandonar una operación. Para resolver la falencia previa, inicialmente se estudiará y resolverá analíticamente el problema de opciones reales de apertura o cierre de una faena minera para un *commodity* determinado. Esto dada una cantidad finita de recursos, costos de apertura y cierre dependientes de las reservas remanentes.

Luego, se realizará una comparación con las investigaciones realizadas por Brennan y Schwartz (1985), donde se concluirá que la mayor diferencia respecto al análisis de recursos infinitos radica en la incorporación del costo de oportunidad, lo que genera un crecimiento menor de la curva del valor del activo minero considerando la faena en operación, aumento del precio gatillante de apertura y del correspondiente al cierre.

En base a las fuentes de incertidumbres mencionadas, el problema de optimización dinámica a resolver consiste en determinar la política de operación de la mina (apertura y cierre) que maximice su valor $V(P, S)$, considerando un cierto precio P que sigue un proceso geométrico Browniano y reservas finitas S , iguales a S_0 al inicio de la operación. Las que, además, varían en el tiempo según la ecuación de agotabilidad para recursos naturales no renovables (Pearce y Turner, 1995).

Sumando a lo recién descrito la función objetivo, restricciones, variables y sus significados. A continuación, se muestra el problema de optimización dinámica a resolver:

$$\max_{\varphi} E\{V(P, S, t)\} \quad (16.387)$$

s. a.

$$dP = \alpha P dt + \sigma P dz \quad (16.388)$$

$$dS = -q dt \quad (16.389)$$

$$S(0) = S_0 \quad (16.390)$$

En este caso:

- $\varphi(q, P_A, P_C)$ es la política de operación (apertura o cierre), que depende de la tasa de extracción q y los precios gatillantes de apertura P_a como cierre P_c .
- $V(P, S, t)$: valor de la mina en el tiempo, sujeto al precio del *commodity* explotado (P) y las reservas remanentes (S).
- P : precio del *commodity*.
- α : tendencia de crecimiento del precio del *commodity*.
- σ : desviación estándar del precio del *commodity*.
- S : reservas remanentes de la mina.
- S_0 : reservas iniciales de la mina.
- q : tasa de extracción de mineral.

La opción real a analizar corresponde a la apertura o cierre de mina dependiente tanto del costo de oportunidad de que la mina esté abierta como que no lo esté. Además de los precios gatillo de apertura y cierre como se muestra a continuación:

$$\begin{cases} rV = \pi(q(t), P, A, M, T) + \frac{1}{dt} E(dV) & \text{si hay producción: } q(t) > 0 \\ rV = -M + \frac{1}{dt} E(dV) & \text{si no hay producción: } q(t) = 0 \end{cases} \quad (16.391)$$

Donde:

- $A(q, S, t)$: costo total de producir q en el instante de tiempo t cuando las reservas remanentes son S .
- $M(t)$: costo de mantención en el tiempo t cuando la mina está cerrada.
- λ : variable binaria que indica si la mina se encuentra abierta (1) o cerrada (0).
- $T(q, S, P, t)$: es la función de impuestos. Cuyo valor es igual a:

$$t_1 q(t) P + \max_{q(t)} \{t_2 q(t) [P(1 - t_1) - A], 0\} \quad (16.392)$$

Con:

- t_1 : royalty.
- t_2 : impuesto a la renta.
- $\pi(q(t), P, A, M, T)$: flujo de caja de la mina, sujeta a producción, precio y costos de explotación, costos de mantención e impuestos.

En este caso se busca determinar el vector de política de operación:

$$\varphi = \{q(t), P_A, P_C\} \quad (16.393)$$

Aplicando el Lema de Itô al valor del activo total, para el caso de la mina cerrada (sin producción) se obtiene:

$$dV = V_P dP + V_S dS + V_t dt + \frac{1}{2} V_{PP} (dP)^2 \quad (16.394)$$

Luego, aplicando valor esperado a dV y por linealidad del operador $E(\cdot)$ se tiene que:

$$E(dV) = E(V_P dP) + E(V_S dS) + E(V_t dt) + E\left(\frac{1}{2} V_{PP} (dP)^2\right) \quad (16.395)$$

Por su parte:

$$\bullet \quad E(V_P dP) = E(V_P \alpha P dt) + E(V_P \sigma P dz) = V_P \alpha P dt \quad (16.396)$$

$$\bullet \quad E(V_S dS) = -V_S q dt \quad (16.397)$$

$$\bullet \quad E(V_t dt) = V_t dt \quad (16.398)$$

$$\bullet \quad E\left(\frac{1}{2} V_{PP} (dP)^2\right) = \frac{1}{2} V_{PP} E((dP)^2) = \frac{1}{2} V_{PP} E((\alpha P dt)^2 + 2\alpha\sigma P^2 dt dz + \sigma^2 P^2 dz^2) = \frac{1}{2} V_{PP} \sigma^2 P^2 dt \quad (16.399)$$

De aquí:

$$\frac{1}{dt} E(dV) = \frac{1}{dt} (V_P \alpha P - q V_S + V_t + \frac{1}{2} V_{PP} \sigma^2 P^2) dt \quad (16.400)$$

Por lo tanto, empleando el principio de optimalidad estocástica de Bellman para el caso de la mina cerrada se llega a la siguiente ecuación diferencial parcial de segundo orden:

$$rV = -M + \frac{1}{dt} E(dV) \Leftrightarrow \alpha P V_P - q V_S + V_t + \frac{1}{2} V_{PP} \sigma^2 P^2 - rV - M = 0 \quad (16.401)$$

Dada su alta complejidad, y como su resolución escapa a los contenidos del curso, no se resolverá y su solución se denotará como $V_0(P, S, t)$.

Ahora bien, el flujo de caja cuando la mina opera corresponde (después de impuestos) a:

$$q(P - A) - M(1 - \lambda) - \lambda V - T \quad (16.402)$$

Como la mina se encuentra operando, entonces $\lambda = 1$. Por otro lado, uniendo las ecuaciones (16.379), (16.380) y las restricciones del problema, se obtiene por principio de optimalidad estocástica de Bellman en el caso de la mina abierta:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 P^2 V_{PP} + (rP - C)V_P - qV_S + V_t + q(P - A) - T - (r + 1)V = 0 \quad (16.403)$$

De forma análoga al caso anterior, se define la solución de (16.394) como $V_1(P, S, t)$. Luego, se definen los estados de apertura y cierre $V_1(P, S, t)$ y $V_0(P, S, t)$, respectivamente. Además, por la condición de pegado suave se cumple que:

$$V_1(P_C, S) = \max\{V_0(P_C, S) - k_C(S), 0\} \quad (16.404)$$

$$V_0(P_A, S) = V_1(P_A, S) - k_A(S) \quad (16.405)$$

$$V_{1P}(P_C, S) = \begin{cases} V_{0P}(P_C, S) & \text{si } V_0(P_C, S) - k_C(S) \geq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (16.406)$$

$$V_{0P}(P_A, S) = V_{1P}(P_A, S) \quad (16.407)$$

Donde k_C y k_A representan los costos de cierre y apertura para un nivel determinado de reservas remanentes, respectivamente.

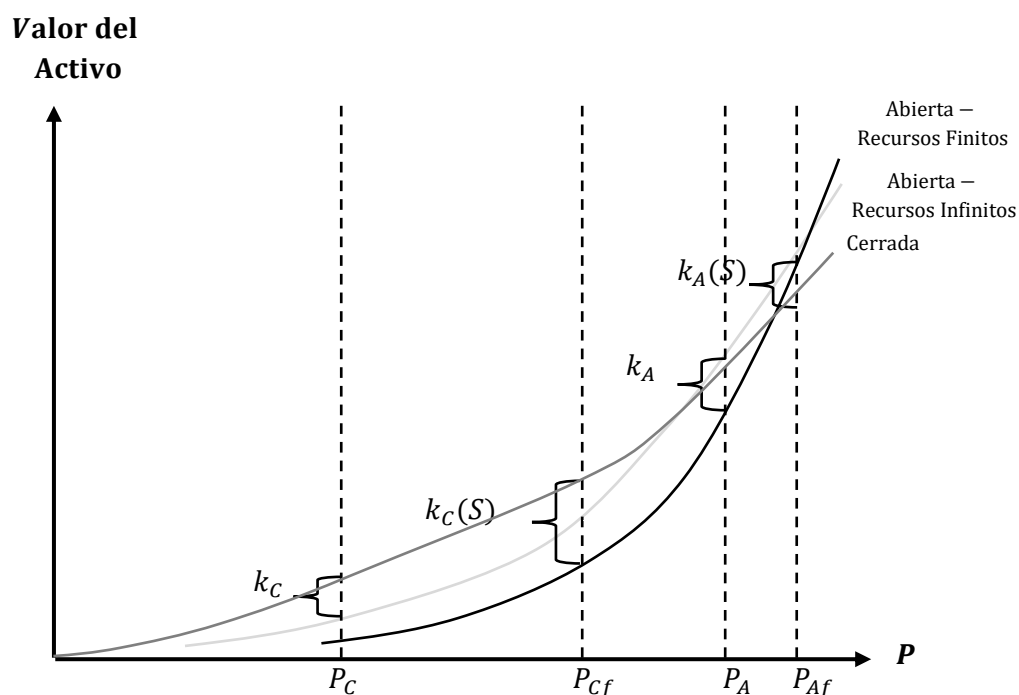


Figura 16.30. Gráfico de valor de la mina (según estado) vs precio

En la Figura 16.30 se compara la situación con recursos infinitos y finitos. Se observa que la curva de valor del activo con la mina cerrada permanece sin alteración, mientras que aquella que representa el valor del activo con la mina abierta presenta un crecimiento en menor en que en el caso de recurso infinito, lo que produce que tanto el precio de apertura como el de cierre se desplacen a la derecha, es decir, aumentan. Esto se puede relacionar con el costo de oportunidad que presenta el recurso finito.

Al analizar las ecuaciones (16.403), (16.404), (16.405) y (16.406) es posible concluir que el costo de oportunidad está intrínsecamente relacionado con los precios de apertura y cierre. Esto se relaciona tanto con el valor del activo evaluado en cada situación como con los costos de apertura y cierre pues estos son mayores para menores valores de S producto, por ejemplo, de la profundización y envejecimiento del yacimiento y requerimiento de mayores medidas de mitigación producto de la explotación minera, entre otros.

16.6.6 Impuestos adversos

El Estado debiese ser capaz de determinar una tasa óptima de impuesto frente a distintos precios de los metales explotados. Una posibilidad es implementar un impuesto flexible que permita, por ejemplo, que si el precio del *commodity* es bajo, sea todavía posible seguir operando

mediante la reducción del impuesto a la renta que deben pagar las mineras. Esta medida iría en ayuda, especialmente, de las pequeñas y medianas mineras para que sigan operando con menos paralizaciones en sus faenas.

En este sentido, Samis *et al.* (2007) utilizan simulación de Monte Carlo para analizar el impacto que tienen los impuestos extraordinarios fijados por el Estado frente a las altas utilidades de las empresas mineras cuando existen precios altos y tiempos de bonanzas. Aquí destacan la utilización de la simulación, que permite entregar un riesgo de exposición por parte de las compañías y del gobierno que regula los impuestos, hecho que no se da por el método del flujo de caja descontado sin incertidumbre.

A continuación, para la formulación matemática del problema se considera el siguiente caso. En la Figura 16.31 se muestra representado una línea el precio P_t de gatillo sobre el cual el Estado cobra un impuesto a la renta τ , pero si el Estado disminuyera el impuesto a la renta a τ' se puede apreciar que el nuevo precio de gatillo $P_{\tau'}$, al cual debería cerrar la faena es inferior, por lo tanto, se le ha dado una mayor continuidad a la operación minera.

Luego, se busca modificar el impuesto τ por un nuevo impuesto inferior τ' que le permita a la mina seguir operando cuando el precio sea pequeño y encontrando el nuevo precio gatillo. Así se llegará a un nuevo impuesto dado el precio en el tiempo.

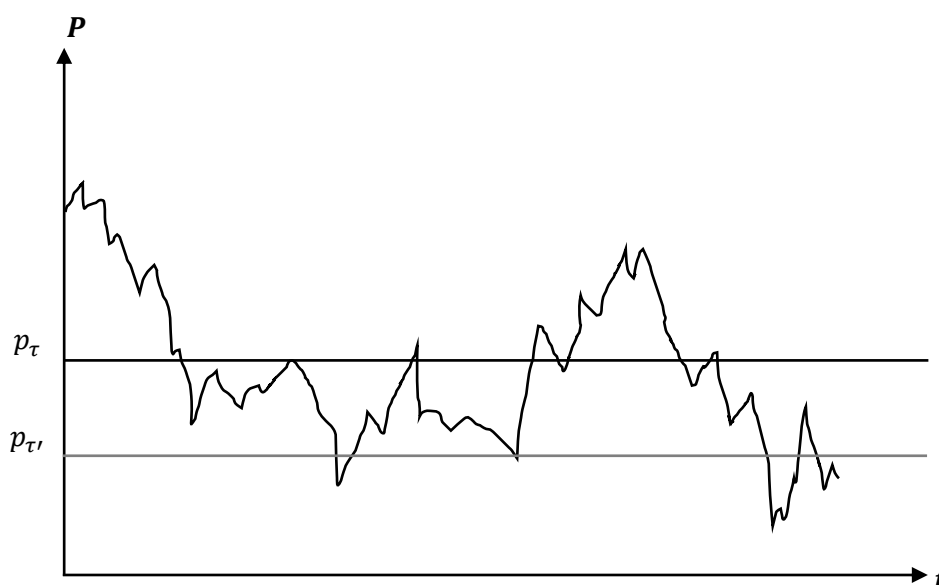


Figura 16.31. Comportamiento del precio en el tiempo

En adición a lo anterior, se considera un yacimiento homogéneo. cuyo precio varía en el tiempo de forma estocástica siguiendo un movimiento geométrico Browniano del tipo $dP = \alpha P dt + \sigma P dz$, donde α es un constante positiva que representa la tasa de rendimiento esperada en el tiempo y σ constante que representa la variabilidad. Se asume las empresas poseen una tasa de descuento r y las reservas del metal son infinitas (es decir, el VAN no depende de S).

Por otro lado, se asume un costo unitario fijo C . La máxima capacidad está dada por K y se obtiene de manera instantánea, produciendo $q = K$ siempre que los flujos de caja sean positivos. Existe un impuesto a la renta τ por parte del Estado que varía en función del precio del metal. Dependiendo de cuál sea el precio, la empresa tendrá la opción de cierre temporal, teniendo asociado un costo igual a E . Se considera un LOM igual a T , variable exógena del problema. El VAN no varía en función del tiempo.

$$\max_{q(t)} E \left\{ \int_0^T (1 - \tau(P(t))) [P(t)q - cq] e^{-rt} dt \right\} \quad (16.408)$$

s. a.

$$ds = -qdt \quad (16.409)$$

$$dP = \alpha P dt + \sigma P dz \quad (16.410)$$

$$0 \leq q \leq K \quad (16.411)$$

$$S, T, K, \tau > 0 \quad (16.412)$$

$$q^* = \begin{cases} K, & \text{si } Pq - cq > 0 \\ 0, & \text{si } Pq - cq < 0 \end{cases} \quad (16.413)$$

$$\tau^*(P) = \begin{cases} \tau & \text{si } P > P_\tau \\ \tau' & \text{si } P_\tau > P > P_{\tau'} \end{cases} \quad (16.414)$$

En este problema se puede ver que la variable de control es $q(t)$ y la variable de estado es S .

Junto a lo anterior, se define la opción real de cierre temporal que dependerá del precio gatillo (entrada o salida). Este, a su vez, dependerá del nivel de impuestos que puede ser modificado por el Estado. A partir del principio de optimalidad estocástico de Bellman:

$$rV = \max_q \left\{ \pi(q) + \frac{1}{dt} E(dV) \right\} \quad (16.415)$$

Se tiene para cada una de las opciones las siguientes ecuaciones vía programación dinámica estocástica:

$$\begin{cases} rV = 0 + \frac{1}{dt}E(dV) & \text{si no hay producción: } q = 0 \\ rV = \pi(K) + \frac{1}{dt}E(dV) & \text{si hay producción: } q = K \end{cases} \quad (16.416)$$

Además, el beneficio viene dado por:

$$\pi(K) = (1 - \tau)(P - c)K \quad (16.417)$$

A continuación, se desarrollará $\frac{1}{dt}E(dV)$ utilizando el Lema de Itô. $V = V(P, S, t)$, pero, como el VAN en este problema es independiente de las reservas y del tiempo, entonces V solo depende del precio P :

$$V = V(P) \quad (16.418)$$

Por enunciado $V_s = V_t = 0$. Es decir:

$$dV = \left[\alpha p V_P + \frac{1}{2} \sigma^2 P^2 V_{PP} \right] dt + \sigma P V_P dz \quad (16.419)$$

Luego, al aplicar el operador $E(\cdot)$ sobre la expresión dV , se tiene que:

$$E(dV) = \left[\alpha p V_P + \frac{1}{2} \sigma^2 P^2 V_{PP} \right] dt \quad (16.420)$$

$$\frac{1}{dt}E(dV) = \alpha p V_P + \frac{1}{2} \sigma^2 P^2 V_{PP} \quad (16.421)$$

Donde se tiene que:

$$V_P = V'(P) \quad (16.422)$$

$$V_{PP} = V''(P) \quad (16.423)$$

Ahora se analizarán tres casos, el primero será cuando no se produce, el segundo es cuando se produce y el precio está sobre P_τ y el tercer caso es cuando se produce y el precio está entre P_τ y $P_{\tau'}$.

Caso 1: $P \leq P_{\tau'}$.

Se reemplaza (16.409) en (16.403):

$$rV = \alpha P V'(P) + \frac{1}{2} \sigma^2 P^2 V''(P) \quad (16.424)$$

$$0 = \alpha PV'(P) + \frac{1}{2}\sigma^2 P^2 V''(P) - rV(P) \quad (16.425)$$

Esta última expresión es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden y su solución es:

$$V(P) = AP^\beta \quad (16.426)$$

$$V'(P) = A\beta P^{\beta-1} \quad (16.427)$$

$$V''(P) = A\beta(\beta - 1) P^{\beta-2} \quad (16.428)$$

Reemplazando en (16.428):

$$\alpha A\beta P^\beta + \frac{1}{2}\sigma^2 A\beta(\beta - 1)P^\beta - rAP^\beta = 0 \quad (16.429)$$

$$AP^\beta \left(\alpha\beta + \frac{1}{2}\sigma^2\beta(\beta - 1) - r \right) = 0 \quad (16.430)$$

Se tiene $p \neq 0$ y $V \neq 0 \rightarrow A \neq 0$, entonces se debe cumplir que:

$$\alpha\beta + \frac{1}{2}\sigma^2\beta(\beta - 1) - r = 0 \quad (16.431)$$

Resolviendo:

$$\beta = \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{\sigma^2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{\sigma^2}\right)^2 + \frac{2r}{\sigma^2}} \quad (16.432)$$

Se tendrán:

$$\beta_1 > 1 \quad (16.433)$$

$$\beta_2 < 0 \quad (16.434)$$

Así se llega a:

$$V_1(P) = A_1 P^{\beta_1} + A_2 P^{\beta_2} \quad (16.435)$$

Si el precio cae a cero se tendrá que $\forall t \geq 0$:

$$V(0) = 0 \quad (16.436)$$

$$V_1(P) = A_1 P^{\beta_1} + A_2 P^{\beta_2} \quad (16.437)$$

$$A_2 = 0 \text{ (ya que } P^{\beta_2} \text{ se hace muy pequeño)} \quad (16.438)$$

Finalmente se llega a:

$$V_1(P) = A_1 P^{\beta_1} \quad (16.439)$$

$$\text{Donde, } \beta_1 = \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{\sigma^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{\sigma^2}\right)^2 + \frac{2r}{\sigma^2}} \quad (16.440)$$

Caso 2: $P_{\tau'} \leq P \leq P_{\tau}$.

Se reemplaza (16.416) en (16.411):

$$rV = \pi(K) + \alpha PV'(P) + \frac{1}{2} \sigma^2 P^2 V''(P) \quad (16.441)$$

$$rV = (1 - \tau')(P - c)K + \alpha PV'(p) + \frac{1}{2} \sigma^2 P^2 V''(P) \quad (16.442)$$

Se llega a:

$$V_2(P) = B_1 P^{\beta_1} + B_2 P^{\beta_2} + (1 - \tau') \frac{(PK - cK)}{r} \quad (16.443)$$

La solución homogénea es idéntica con la diferencia que las constantes B_1 y B_2 pueden diferir a A_1 y A_2 . Si $P \rightarrow +\infty$ entonces $V(P) \rightarrow (1 - \tau') \frac{(PK - cK)}{r}$, que corresponde al valor más alto que se puede alcanzar asumiendo que P es constante (suficientemente grande), pues:

$$\int_0^{\infty} (1 - \tau'(P)) [Pq - cq] e^{-rt} dt = (1 - \tau') \frac{(pK - cK)}{r} \quad (16.444)$$

Luego, como se cumple esto también debe cumplirse que $B_1 = 0$ y $B_2 \neq 0$ ya que si $B_1 \neq 0 \rightarrow V(P) = 0$. De esta manera:

$$V_2(P) = B_2 P^{\beta_2} + (1 - \tau') \frac{(PK - cK)}{r} \quad (16.445)$$

$$\text{Donde, } \beta_2 = \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{\sigma^2} - \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{\sigma^2}\right)^2 + \frac{2r}{\sigma^2}} \quad (16.446)$$

Caso 3: $P_{\tau} \leq P$.

Repetiendo los mismos pasos del caso anterior se llega a:

$$V_3(P) = C_2 P^{\beta_2} + (1 - \tau) \frac{(PK - cK)}{r} \quad (16.447)$$

$$\text{Donde, } \beta_2 = \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{\sigma^2} - \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{\sigma^2}\right)^2 + \frac{2r}{\sigma^2}} \quad (16.448)$$

De aquí:

$$\begin{aligned} & (1 - \tau(P(t))) = \\ & \left\{ \begin{array}{l} (1 - \tau') \rightarrow V_2(P) = B_2 P P^{\beta_2} + (1 - \tau') \frac{(PK - cK)}{r} \quad y \quad P_{\tau'} \leq P \leq P_{\tau} \\ (1 - \tau) \rightarrow V_3(P) = C_2 P^{\beta_2} + (1 - \tau) \frac{(PK - cK)}{r} \quad y \quad P_{\tau} \leq P \end{array} \right. \end{aligned} \quad (16.449)$$

Hasta el momento se tienen cinco incógnitas ($P_{\tau'}$, P_{τ} , A_1 , B_2 , C_2) y tres ecuaciones. Se pueden obtener más ecuaciones usando la condición de continuidad y condición pegado suave.

Por continuidad:

$$V_3(P_{\tau}) = V_2(P_{\tau}) \quad (16.450)$$

$$V_3(P_{\tau}) = V_1(P_{\tau}) - E \quad (16.451)$$

$$V_2(P_{\tau'}) = V_1(P_{\tau'}) - E \quad (16.452)$$

Condición de pegado suave:

$$V_3'(P_{\tau}) = V_2'(P_{\tau}) \quad (16.453)$$

$$V_3'(P_{\tau}) = V_1'(P_{\tau}) \quad (16.454)$$

$$V_2'(P_{\tau'}) = V_1'(P_{\tau'}) \quad (16.455)$$

Considerando que:

$$V_1(P) = A_1 P^{\beta_1} \quad (16.456)$$

$$V_2(P) = B_2 P^{\beta_2} + (1 - \tau') \frac{(PK - cK)}{r} \quad (16.457)$$

$$V_3(P) = C_2 P^{\beta_2} + (1 - \tau) \frac{(PK - cK)}{r} \quad (16.458)$$

$$V_1'(P) = A_1 \beta_1 P^{\beta_1 - 1} \quad (16.459)$$

$$V_2'(P) = B_2 \beta_2 P^{\beta_2 - 1} + \frac{(K - \tau'K)}{r} \quad (16.460)$$

$$V_3'(P) = C_2 \beta_2 P^{\beta_2 - 1} + \frac{(K - \tau K)}{r} \quad (16.461)$$

Entonces ahora se reemplazan estos valores en las condiciones de (16.450) a (16.455):

$$C_2 P_\tau^{\beta_2} + (1 - \tau) \frac{(P_\tau K - cK)}{r} = B_2 P_\tau^{\beta_2} + (1 - \tau') \frac{(P_\tau K - cK)}{r} \quad (16.462)$$

$$C_2 P_\tau^{\beta_2} + (1 - \tau) \frac{(P_\tau K - cK)}{r} = A_1 P_\tau^{\beta_1} - E \quad (16.463)$$

$$B_2 P_{\tau'}^{\beta_2} + (1 - \tau') \frac{(P_{\tau'} K - cK)}{r} = A_1 P_{\tau'}^{\beta_1} - E \quad (16.464)$$

$$C_2 \beta_2 p_\tau^{\beta_2-1} + \frac{(K - \tau K)}{r} = B_2 \beta_2 p_\tau^{\beta_2-1} + \frac{(K - \tau' K)}{r} \quad (16.465)$$

$$C_2 \beta_2 p_\tau^{\beta_2-1} + \frac{(K - \tau K)}{r} = A_1 \beta_1 p_\tau^{\beta_1-1} \quad (16.466)$$

$$B_2 \beta_2 p_{\tau'}^{\beta_2-1} + \frac{(K - \tau' K)}{r} = A_1 \beta_1 p_{\tau'}^{\beta_1-1} \quad (16.467)$$

Finalmente, resolviendo el sistema anterior se obtiene:

$$A_1 = \beta_1 (\tau - \tau') (1 - P_\tau^{\beta_2-1} c) \frac{K}{r} + \beta_1 \frac{K}{r} (1 - P_\tau^{-1} c) + \frac{\beta_1 P_{\tau'}^{\beta_1-1} P_\tau^{2\beta_2-1} (\tau - \tau') (P_\tau^{1-\beta_2} - c) K}{r(1 - P_{\tau'}^{\beta_1-1} P_\tau^{\beta_2-1})} + \frac{\beta_1 P_{\tau'}^{\beta_1-1} P_\tau^{\beta_2-1} (P_\tau^{\beta_2-1} - P_{\tau'}^{\beta_2-1} c) K}{r(1 - P_{\tau'}^{\beta_1-1} P_\tau^{\beta_2-1})} + \frac{\beta_1 E P_\tau^{\beta_2-1} P_{\tau'}^{\beta_1-1} P_\tau^{\beta_1-1}}{(1 - P_{\tau'}^{\beta_1-1} P_\tau^{\beta_2-1})} - \frac{\beta_1 E P_\tau^{\beta_2-1} P_{\tau'}^{-\beta_2}}{(1 - P_{\tau'}^{\beta_1-1} P_\tau^{\beta_2-1})} - \frac{\beta_1 P_\tau^{\beta_2-1} (1 - \tau') (P_{\tau'} - c) K}{r(1 - P_{\tau'}^{\beta_1-1} P_\tau^{\beta_2-1})} P_{\tau'}^{-\beta_2} \quad (16.468)$$

$$B_2 = \frac{P_{\tau'}^{\beta_1-1} P_\tau^{\beta_2-1} (\tau - \tau') (P_\tau^{1-\beta_2} - c) K}{r(1 - P_{\tau'}^{\beta_1-1} P_\tau^{\beta_2-1})} + \frac{P_{\tau'}^{\beta_1-1} P_\tau^{\beta_2-1} (P_\tau^{1-\beta_1} - P_{\tau'}^{-\beta_1} c) K}{r(1 - P_{\tau'}^{\beta_1-1} P_\tau^{\beta_2-1})} + \frac{E P_\tau^{-\beta_1} P_{\tau'}^{\beta_1-1} P_\tau^{\beta_2-1}}{(1 - P_{\tau'}^{\beta_1-1} P_\tau^{\beta_2-1})} - \frac{E P_{\tau'}^{-\beta_2}}{(1 - P_{\tau'}^{\beta_1-1} P_\tau^{\beta_2-1})} - \frac{(1 - \tau') (P_{\tau'} - c) K}{r(1 - P_{\tau'}^{\beta_1-1} P_\tau^{\beta_2-1})} P_{\tau'}^{-\beta_2} \quad (16.469)$$

$$C_2 = \frac{P_{\tau'}^{\beta_1-1} P_\tau^{\beta_2-1} (16.458) (\tau - \tau') (P_\tau^{1-\beta_2} - c) K}{r(1 - P_{\tau'}^{\beta_1-1} P_\tau^{\beta_2-1})} + \frac{P_{\tau'}^{\beta_1-1} P_\tau^{\beta_2-1} (P_\tau^{1-\beta_1} - P_{\tau'}^{-\beta_1} c) K}{r(1 - P_{\tau'}^{\beta_1-1} P_\tau^{\beta_2-1})} + \frac{E P_\tau^{-\beta_1} P_{\tau'}^{\beta_1-1} P_\tau^{\beta_2-1}}{(1 - P_{\tau'}^{\beta_1-1} P_\tau^{\beta_2-1})} - \frac{E P_{\tau'}^{-\beta_2}}{(1 - P_{\tau'}^{\beta_1-1} P_\tau^{\beta_2-1})} - \frac{(1 - \tau') (P_{\tau'} - c) K}{r(1 - P_{\tau'}^{\beta_1-1} P_\tau^{\beta_2-1})} P_{\tau'}^{-\beta_2} + \frac{(\tau - \tau') (P_\tau^{1-\beta_2} - P_{\tau'}^{-\beta_2} c) K}{r} \quad (16.470)$$

Sin embargo, no es posible determinar algebraicamente las variables P_τ , $P_{\tau'}$ y τ' . Para la obtención de sus expresiones, se recomienda aplicar métodos numéricos.¹⁰⁸

Una vez calculado lo anterior, se definieron parámetros a partir de diversas fuentes para hallar los valores de β_1 y β_2 . Para ejemplificar esto en una operación de oro, se obtuvieron datos de

¹⁰⁸ Para más información, consultar Hoffman (2001).

Pascua-Lama,¹⁰⁹ la empresa GEM,¹¹⁰ más los periódicos nacionales La Tercera¹¹¹ y El Mercurio¹¹² que permitieron generar los siguientes parámetros:

- Tasa descuento: $r = 5\%$.
- Precio: $p = 800 \frac{USD}{oz}$.
- Costos: $c = 13,9 \frac{USD}{oz}$.
- Impuesto a la renta: $\tau = 27\%$.
- Capacidad: $K = 850.000 \frac{oz}{año} \left(2.361 \frac{oz}{día} \right)$.
- Tasa de crecimiento: $\alpha = 5\%$.
- Desviación estándar del precio: $\sigma = 14\%$.
- Costo de cierre: $E = 200 \frac{MUSD}{año} \left(200.000.000 \frac{USD}{año} \right)$.

Por lo tanto, con estos datos ya se puede calcular el valor de:

$$\beta_{1,2} = \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{\sigma^2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{\sigma^2}\right)^2 + \frac{2r}{\sigma^2}} \quad (16.471)$$

$$\beta_1 = 1 \quad (16.472)$$

$$\beta_2 = -5,102 \quad (16.473)$$

Se utilizan β_1 y β_2 para A_1 , C_2 , B_2 y, luego, el resto de los parámetros K , E , c , r , τ y P con lo que se llega al impuesto τ' .

Finalmente, τ' queda en función de los parámetros anteriores y se ve que debe disminuir en un porcentaje respecto de τ para poder seguir operando cuando el precio con el nuevo precio gatillo $P_{\tau'}$. De este modo, el resultado muestra que en el caso de tener un impuesto a la renta del 27% cuando el precio baja se debe reducir el impuesto en un porcentaje del impuesto inicial encontrando así el precio gatillo.

Lo importante del resultado anterior es que el Estado tenga la flexibilidad de políticas de impuestos frente a precio bajos y poder mantener y proyectar la recaudación fiscal. En

¹⁰⁹ Datos obtenidos del documento NI-43-101 Pascua Lama.

¹¹⁰ Base de datos históricos 1960-2013, Gestión y Economía Minera (2015).

¹¹¹ Tasa de producción Pascua Lama. Fuente: <http://www.latercera.com/noticia/revisa-el-perfil-del-proyecto-minero-pascua-lama/>.

¹¹² Costo de cierre Pascua Lama. Fuente: <http://www.economiaynegocios.cl/noticias/noticias.asp?id=170476>.

conclusión, se abre una línea de investigación respecto a una metodología para lograr categorizar en distintos niveles el impuesto a la renta en empresas mineras según el tipo de mineral y su precio en el tiempo atrayendo nuevas inversiones.

16.7 Problemas Resueltos

Problema 16.1

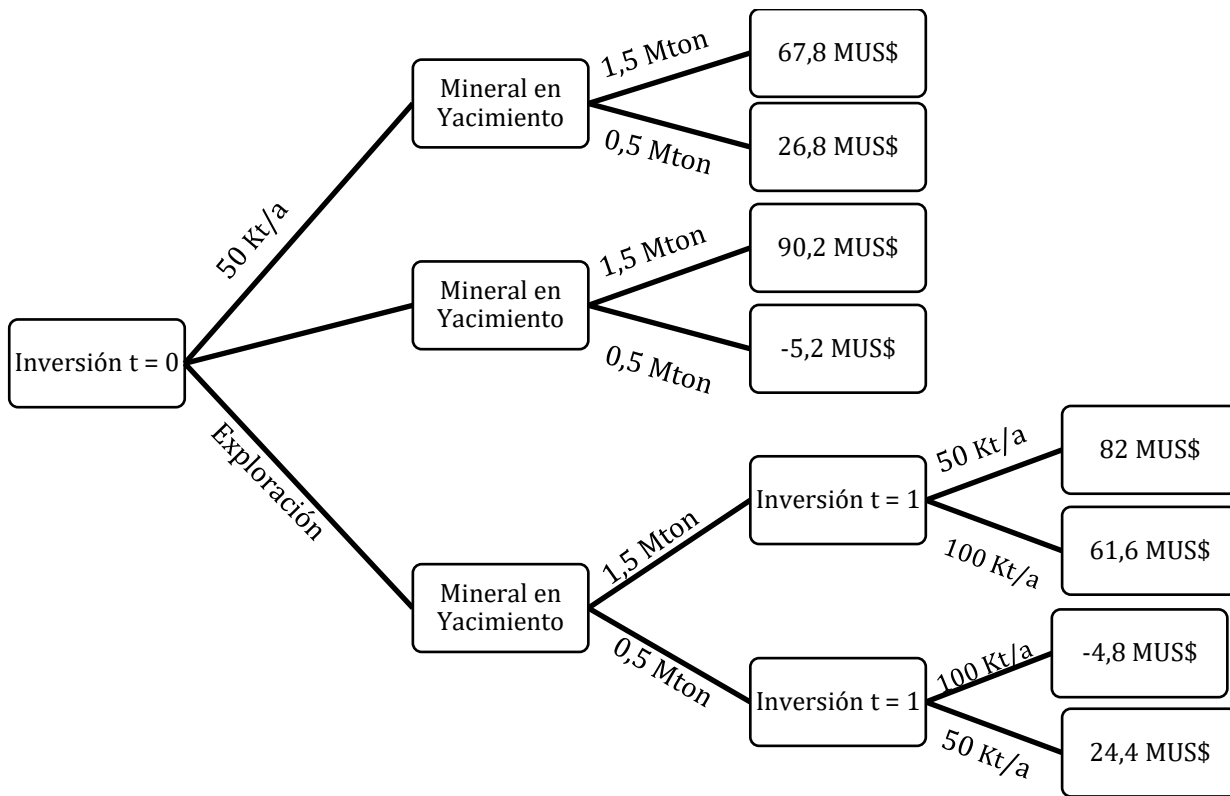
El siguiente ejercicio fue obtenido de Guzmán (2011).

Considere el caso de una empresa que tiene la posibilidad de realizar un proyecto minero. A partir de los escasos sondeos realizados, se estima que el yacimiento contiene 1 millón de toneladas de mineral de valor esperado. Para poder extraer este mineral, se pueden invertir US\$ 100 millones en una operación capaz de extraer y procesar el mineral a una tasa de $100 \frac{kt}{año}$, o bien US\$ 50 millones para extraer mineral a una tasa de $50 \frac{kt}{año}$. Si la decisión de inversión se toma hoy ($t = 0$), la producción comenzará en $t = 1$.

Por otro lado, es sabido que el precio del mineral es igual a $400 \frac{US\$}{ton}$, mientras que el costo promedio de producción es de $150 \frac{US\$}{ton}$. La tasa de descuento de la empresa es de 10% anual y para efectos de valoración, considere que tanto el precio como el costo se mantendrán constantes durante todo el horizonte de tiempo.

La empresa posee también la posibilidad de retrasar la decisión de inversión en un año, para realizar un estudio de exploración en $t = 0$ y, de esta forma, saber con mayor exactitud la cantidad de mineral que tiene el yacimiento al final de ese período. Los geólogos de la empresa estiman que luego de esta nueva campaña de sondeos, con igual probabilidad pueden encontrarse 0,5 millones de toneladas de mineral o 1,5 millones de toneladas de mineral.

Luego del estudio de exploración (a realizar en $t = 0$), al despejarse la incertidumbre sobre la cantidad de mineral en el yacimiento, la empresa puede tomar la decisión de invertir en $t = 1$, y así empezar a producir mineral en $t = 2$. Se asume que cualquiera sea el tamaño de la operación, el período de puesta en marcha es exactamente un año. Utilizando el árbol binomial que se encuentra a continuación, encuentre el VAN esperado del proyecto, el valor de la opción y cuánto estaría dispuesto a invertir en exploración.

**Solución:**

Para la empresa, delinear de mejor forma la cantidad de recursos del depósito le permitirá ajustar el tamaño de su operación a los reales recursos del yacimiento. Así, la flexibilidad u opción real que posee la empresa al primero explorar y luego, resuelta la incertidumbre geológica, tomar una decisión de capacidad de producción permite modificar la exposición del proyecto al cono de incertidumbre.

Caso 1: Decidir capacidad de extracción en $t = 0$

Si se construye la operación con una capacidad de $50 \frac{kt}{año}$, dependiendo de si los recursos son 0,5 Mton o 1,5 Mton, el VAN de la operación será de US\$ 67,8 millones o US\$ 26,8 millones respectivamente. Dado que una vez construida la operación la capacidad es inflexible, el VAN del proyecto podrá tomar uno u otro valor, y puesto que ambos eventos son equiprobables, el VAN en $t = 0$ será entonces de US\$ 47,3 millones. De forma análoga, el VAN esperado de invertir en una operación con capacidad de $100 \frac{kt}{año}$, será de US\$ 42,4 millones. De esta forma, si no existiera la opción de explorar antes de comprometer la inversión, la mejor alternativa de

inversión sería invertir en una operación con capacidad de $50 \frac{kt}{año}$ obteniéndose un VAN tradicional (sin opciones) de US\$ 47,3 millones.

La decisión anterior, sin embargo, no es óptima en presencia de la incertidumbre geológica y la opción real de explorar antes de comprometer la inversión.

Caso 2: Opción de explorar en $t = 0$

Cuando se decide primero explorar, cualquiera sea el resultado respecto de la cantidad de recursos, la empresa puede tomar una decisión óptima para cada resultado posible. Así, si la exploración muestra la existencia de 1,5 millones de toneladas de mineral en el depósito, entonces la decisión óptima será la de invertir en una operación con capacidad para $100 \frac{kt}{año}$, obteniéndose un VAN (determinístico) de $MUS\$ 82$. Si, por el contrario, los estudios geológicos muestran la existencia de 0,5 millones de toneladas de mineral, entonces el VAN máximo al que puede optar la empresa es de US\$ 24,4 millones, el que se consigue invirtiendo en una operación con capacidad para $50 \frac{kt}{año}$. Dado que en $t = 0$ los resultados de la campaña de exploración no son conocidos, pero se estima que los resultados posibles son equiprobables, entonces el VAN esperado en $t = 0$ de invertir en una campaña de exploración será de $MUS\$ 53,2$. Este valor equivale exactamente al VAN expandido del proyecto.

El valor de la opción se calcula como la diferencia entre el $VAN_{Expandido}$ y el $VAN_{tradicional}$

$$VAN_{opción} = VAN_{con\ opción} - VAN_{sin\ opción} = (53,2 - 47,3)MUS\$ = 5,9\ MUS\$$$

Así, el hecho de incorporar una opción incrementa el valor del proyecto en un 12,4% del VAN tradicional. El valor de la opción permite justificar el gasto en exploración, ya que si este es menor a $MUS\$ 5,9$, convendrá despejar la incertidumbre geológica antes de seleccionar la capacidad de producción.

Problema 16.2.

Considerando una mina cerrada la que tiene la opción de reabrir en el año 2014 ($t = 0$) teniendo que invertir una cantidad de $MUS\$ 1.400$. Si este escenario ocurriera, la capacidad de extracción y procesamiento sería de 100.000 toneladas de mineral por año. Dado el escenario de precios del *commodity* actual, se tiene que en $t = 0$ el precio del mercado es de $2.000 \frac{US\$}{ton}$,

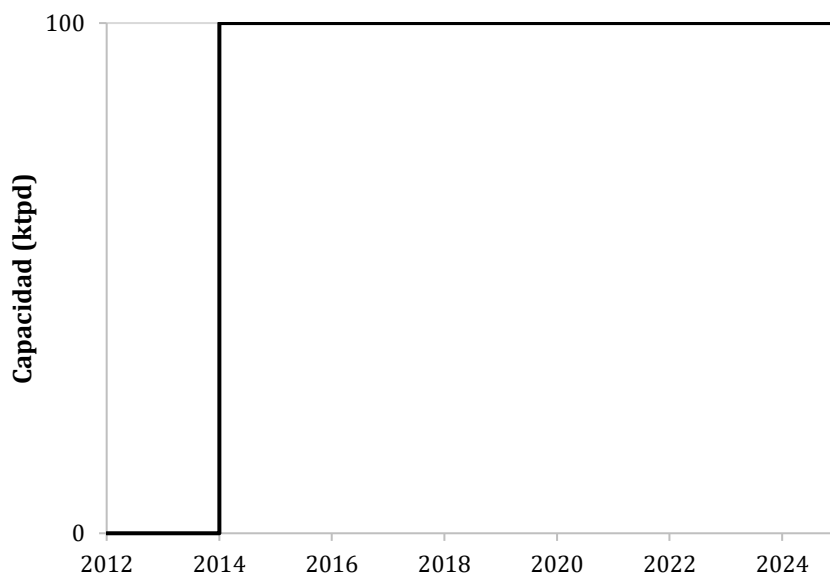
pero la empresa tiene estimaciones de que en los siguientes periodos el precio puede ser desde $3.000 \frac{US\$}{ton}$ hasta el infinito o de $1.000 \frac{US\$}{ton}$ al infinito, con igual probabilidad. Asuma que la tasa de descuento es de 10% anual y que el LOM es infinito. Calcule el *VAN* del proyecto y el valor de la flexibilidad. Grafique cómo se comporta la capacidad en el tiempo y comente. Asuma que el tiempo de reapertura es instantáneo.

Solución:

En el caso del cálculo del *VAN* sin opciones, se considera un precio esperado de $2.000 \frac{US\$}{ton}$ dado por $(3.000 \frac{US\$}{ton} * 0,5 + 1.000 \frac{US\$}{ton} * 0,5)$ que, al considerar una tasa de descuento de 10% y trayendo los flujos hacia $t = 0$, se obtiene un *VAN* de 600 *MUS*\$, mayor a cero. Con esto, conviene reabrir la mina.

$$VAN_{sin\ opción} = -1.400\ MUS\$ + \sum_{t=0}^{\infty} \frac{200MUS\$}{(1,1)^t}$$

$$VAN_{sin\ opción} = -1.400\ MUS\$ + \frac{200MUS\$}{0,1} = 600\ MUS\$$$



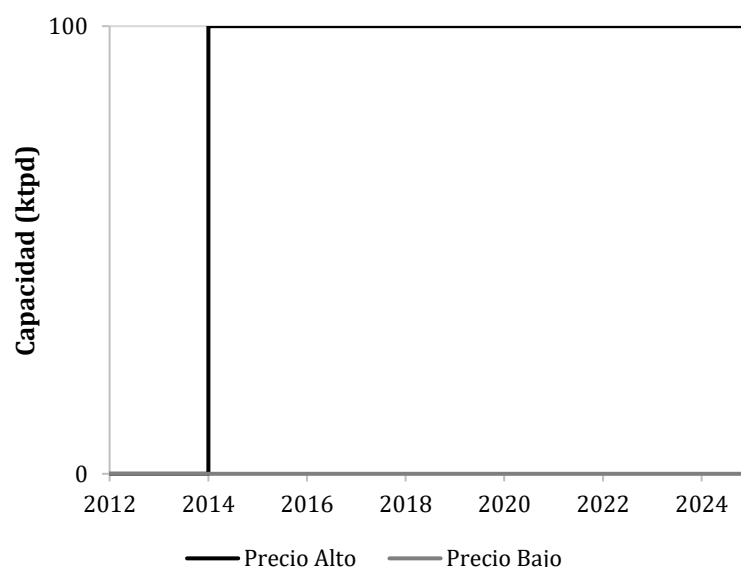
De acuerdo a lo anterior, la inversión se realiza para cualquiera de los dos escenarios de precio, pero en esta situación, existe un riesgo por parte de la empresa debido a que en el escenario de precio bajo el VAN de la mina es:

$$VAN_{precio\ bajo} = -1.400\ MUS\$ + \sum_{t=0}^{\infty} \frac{100}{(1,1)^t} = -400\ MUS\$$$

En el caso de cálculo de VAN utilizando opciones reales, se puede tener la opción de reabrir en el periodo $t = 0$ en donde se conozca el escenario real de precios siendo estos $3.000 \frac{US\$}{ton}$ o en el caso de que el precio sea $1.000 \frac{US\$}{ton}$, no se incurre en la inversión, debido a que el VAN del proyecto es negativo. Al igual que en el caso anterior, calculando el VAN para cada escenario de precio, se tiene el mejor caso en donde el VAN es igual a $MUS\$ 1.600$, y el peor caso en donde este es igual a $-400\ MUS\$$.

$$VAN_{precio\ alto} = -1.400\ MUS\$ + \sum_{t=0}^{\infty} \frac{300}{(1,1)^t} = 1.600\ MUS\$$$

$$VAN_{precio\ bajo} = -1.400\ MUS\$ + \sum_{t=0}^{\infty} \frac{100}{(1,1)^t} = -400\ MUS\$$$



En este caso, la inversión se realiza en función del escenario de precio. Con esto, en el caso pesimista (precio bajo) la inversión no se realiza, debido a que el VAN que se genera es negativo, al contrario que para el caso optimista (precio alto).

Por lo cual, el VAN del proyecto finalmente será de:

$$VAN_{con\ opción} = 0,5 \left[\frac{-1.400}{1} + \sum_{t=0}^{\infty} \frac{300}{(1,1)^t} \right] = 800\ MUS\$$$

Siendo este el VAN de la opción al no incurrir en la inversión en el caso de que el precio sea bajo. Por lo tanto, el VAN de la opción de flexibilizar la inversión viene dado por la siguiente expresión:

$$VAN_{opción} = VAN_{con\ opción} - VAN_{sin\ opción} = (800 - 600)MUS\$ = 200\ MUS\$$$

Que corresponde a lo que se está dispuesto a pagar por tener derecho a esa opción de inversión.

Problema 16.3

Una pequeña minera lo ha contratado a usted para determinar el tiempo óptimo en el que debe invertir para llevar a cabo un proyecto, cuyo valor viene dado por $V(t) = V_0 e^{\alpha t}$, donde α corresponde a la tasa de crecimiento del proyecto y V_0 el valor inicial del proyecto. Usted ha determinado que la inversión crecerá a través del tiempo, por lo que su valor viene dado por $I(t) = I_0 e^{g t}$, con g la tasa de crecimiento de la inversión e I_0 la inversión inicial del proyecto.

- Determine la expresión para el tiempo óptimo de inversión de la empresa. ¿Qué condiciones deben cumplir las tasas de crecimiento de la inversión y del valor del proyecto (g y α)?
- Sea $V_0 = 300\ MUSD$, $I_0 = 500\ MUSD$, $r = 10\%$, $g = 3\%$ y $\alpha = 7\%$. Determine numéricamente el *timing* óptimo, donde t está medido en años).

Solución:

- Dados $V(t)$ e $I(t)$, se debe plantear el valor de la oportunidad de inversión, que viene dado por:

$$F(V) = (V(t) - I(t))e^{-rt}$$

$$F(V) = (V_0 e^{\alpha t} - I_0 e^{g t})e^{-rt}$$

Para encontrar el *timing* óptimo se debe derivar la ecuación anterior respecto al tiempo P e igualamos a 0, de este modo se encuentra la expresión para t . Derivando e igualando por 0 se obtiene:

$$\frac{\partial F(V)}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P} (V_0 e^{\alpha P} - I_0 e^{gP}) e^{-rP} = 0$$

$$e^{-rP} (\alpha e^{\alpha P} V_0 - e^{\alpha P} r V_0 - e^{gP} I_0 (g - r)) = 0$$

Separando la expresión anterior en dos ecuaciones:

$$e^{-rP} = 0$$

$$(\alpha e^{\alpha P} V_0 - e^{\alpha P} r V_0 - e^{gP} I_0 (g - r)) = 0$$

Como la función exponencial (e^z) nunca es 0 para cualquier $z \in R$, no existe solución para $e^{-rP} = 0$. De este modo tomando la segunda expresión se tiene:

$$\alpha e^{\alpha P} V_0 - e^{\alpha P} r V_0 - e^{gP} I_0 g + e^{gP} I_0 r = 0$$

Dividiendo ambos lados por e^{gP} :

$$e^{P(\alpha-g)} V_0 - e^{P(\alpha-g)} r V_0 - I_0 g + I_0 r = 0$$

Sustituyendo por la variable $x = e^{P(\alpha-g)}$ y simplificando la expresión se obtiene:

$$x(\alpha V_0 - r V_0) - g I_0 + r I_0 = 0$$

$$x(\alpha V_0 - r V_0) = I_0 (g - r)$$

$$x = \frac{I_0 (g - r)}{(\alpha V_0 - r V_0)}$$

Sustituyendo nuevamente la variable $x = e^{P(\alpha-g)}$ y aplicando logaritmo natural a ambos lados de la expresión, se tiene:

$$e^{P(\alpha-g)} = \frac{I_0 (g - r)}{(\alpha V_0 - r V_0)}$$

$$P(\alpha - g) = \ln\left(\frac{I_0 (g - r)}{(\alpha V_0 - r V_0)}\right)$$

$$P = \max\left\{\frac{\ln\left(\frac{I_0(g-r)}{(\alpha V_0 - rV_0)}\right)}{\alpha - g}, 0\right\}$$

Las condiciones que deben cumplir las tasas de crecimiento es que $\alpha \neq g$, de este modo no queda una división por 0. En el caso en que $\alpha < g$, la expresión $\frac{\ln\left(\frac{I_0(g-r)}{(\alpha V_0 - rV_0)}\right)}{\alpha - g}$ es negativa por lo que me conviene invertir hoy ($t = 0$).

b) Reemplazando por los datos entregados en el enunciado se obtiene el siguiente *timing* óptimo:

$$P = \frac{\ln\left(\frac{500(0.03 - 0.1)}{300(0.07 - 0.1)}\right)}{0.07 - 0.03}$$

$$P = 33.9531$$

El *timing* óptimo inversión es de 34 años.

Problema 16.4

Considere una empresa minera que posee la oportunidad de invertir en un proyecto minero, el cual genera un valor $V(t)$ que sigue un proceso estocástico del tipo geométrico $dV(t) = \alpha dt + \sigma dz$, donde α es la tasa del crecimiento de $V(t)$ a lo largo del tiempo y σ es una constante que representa la variabilidad de $V(t)$. Por otro lado, la inversión necesaria es fija y conocida con un valor I . Además, se plantea el funcional del valor de la oportunidad de inversión $F(V)$. A partir de esto se busca encontrar el *timing* óptimo de inversión que maximice el valor de oportunidad de inversión.

- Plantee el problema de optimización que permita encontrar el *timing* óptimo P .
- Resuelva el problema planteado en a) utilizando programación dinámica estocástica, dejando claramente expresada el valor de V^* .

Solución:

- Se plantea primero el problema a resolver:

$$F(V) = \max_p E[e^{-rp}(V(p) - I)]$$

s. a.

$$dV = \alpha dt + \sigma dz$$

$$p \geq 0$$

b) Para resolver este problema se requiere el uso de la programación dinámica estocástica. Entonces, se inicia el desarrollo con la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman estocástica en su forma general.

$$rJ = \max_q \left\{ E(\pi) + E\left(\frac{dJ}{dt}\right) \right\}$$

Luego, se debe adaptar esta ecuación al presente problema. Se cambia J por F , el cual es un funcional dependiente de $V(t)$. Además, el término $E(\pi)$ se anula, dado que no existe tal para este caso. De aquí:

$$rFdt = E(dF)$$

Se desarrolla el término dF según el Lema de Itô, dado que el valor de la oportunidad de inversión depende del VAN, entendiendo el funcional como $F(V)$. Luego:

$$dF = F'(V)dV + \frac{1}{2}F''(V)dV^2$$

$$dF = \left(\alpha F'(V) + \frac{1}{2}\sigma^2 F''(V) \right) dt + \sigma F'(V) dz$$

Desarrollando:

$$rF(V)dt = E\left(\left(\alpha F'(V) + \frac{1}{2}\sigma^2 F''(V) \right) dt + \sigma F'(V) dz \right)$$

Como $E(dz) = 0$, se tiene que:

$$rF(V)dt = \left(\alpha F'(V) + \frac{1}{2}\sigma^2 F''(V) \right) dt$$

Simplificando y reordenando se obtiene la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 F''(V) + \alpha F'(V) - rF(V) = 0$$

Resolviendo la ecuación anterior, se logra que $F(V)$ siga la siguiente estructura:

$$F(V) = C_1 e^{-\beta_1 V} + C_2 e^{\beta_2 V}$$

Ahora, considerando las siguientes tres condiciones de borde es posible encontrar las constantes del problema y V^*

- $F(0) = 0$.
- $F(V^*) = V^* - I$.
- $F'(V^*) = 1$.

En primer lugar, considerando la primera condición de borde y reemplazando en $F(V)$ se obtiene que:

$$F(0) = C_1 e^{-\beta_1 0} + C_2 e^{\beta_2 0}$$

$$C_1 = -C_2$$

Por otro lado, derivando $F(V)$, considerando la tercera condición de borde y la igualdad obtenida anteriormente se obtiene que:

$$F'(V) = C_1 \beta_1^2 V e^{-\beta_1 V} + C_2 \beta_2^2 V e^{\beta_2 V}$$

$$F'(V^*) = 1 = C_1 V^* (\beta_1^2 e^{-\beta_1 V^*} - \beta_2^2 e^{\beta_2 V^*})$$

Despejando C_1 se obtiene la siguiente expresión:

$$C_1 = -C_2 = \frac{1}{V^* (\beta_1^2 e^{-\beta_1 V^*} - \beta_2^2 e^{\beta_2 V^*})}$$

Ahora, utilizando la expresión anterior para C_1 y considerando la segunda condición de borde se obtiene que:

$$F(V^*) = V^* - I$$

$$F(V^*) = V^* - I = C_1 (e^{-\beta_1 V^*} - e^{\beta_2 V^*})$$

$$V^* - I = \frac{1}{V^* (\beta_1^2 e^{-\beta_1 V^*} - \beta_2^2 e^{\beta_2 V^*})} (e^{-\beta_1 V^*} - e^{\beta_2 V^*})$$

$$V^*(V^* - I) = \frac{(e^{-\beta_1 V^*} - e^{\beta_2 V^*})}{(\beta_1^2 e^{-\beta_1 V^*} - \beta_2^2 e^{\beta_2 V^*})}$$

$$V^*(V^* - I) = \frac{(e^{-\beta_1} - e^{\beta_2})}{(\beta_1^2 e^{-\beta_1} - \beta_2^2 e^{\beta_2})}$$

Se puede observar que la parte derecha de la ecuación anterior es una constante que depende de las condiciones del mercado y del crecimiento del valor económico del proyecto. Ahora, se define γ de la siguiente manera:

$$\gamma = \frac{(e^{-\beta_1} - e^{\beta_2})}{(\beta_1^2 e^{-\beta_1} - \beta_2^2 e^{\beta_2})}$$

A continuación, se resuelve la ecuación cuadrática que permite encontrar V^* .

$$V^* = \frac{1}{2}(\sqrt{4\gamma - 1} + I)$$

Problema 16.5

Una empresa minera actualmente posee la oportunidad de invertir en un proyecto. Para poner en marcha esta iniciativa debe invertir un monto I conocido que permitirá generar un valor $V(t)$, expresado como valor presente neto, para la empresa en cuestión. En este caso particular, el VAN del proyecto se comporta estocásticamente en el tiempo según:

$$dV = \eta(\bar{V} - V)Vdt + \sigma Vdz$$

El problema de la empresa inversionista consiste en encontrar el *timing* óptimo de inversión, o, en su defecto, encontrar una regla óptima de inversión.

- Plantee el problema de optimización pertinente a las necesidades de la empresa.
- Resuelva el problema planteado en a) para encontrar la forma funcional de la oportunidad de inversión.

Hint 1: Probar $F(V) = AV^\beta h(V)$.

Hint 2: Utilizar sustituciones: $x = \frac{2\eta V}{\sigma^2}$ y $h(V) = g(x)$.

Solución:

a)

$$F(V) = \max_{\mathfrak{p}} E [(V(\mathfrak{p}) - I) * e^{-r\mathfrak{p}}]$$

s. a.

$$dV = \eta * (\bar{V} - V)Vdt + \sigma Vdz$$

$$\mathfrak{p} \geq 0$$

b) Se resuelve utilizando programación dinámica estocástica. Entonces, primero se plantea la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman estocástica pertinente:

$$rF = \frac{E(dF)}{dt}$$

Como F depende solamente del VAN, se utiliza el Lema de Itô para expresar dF en función de V .

$$dF = F'(V)dV + \frac{1}{2}F''(V)dV^2$$

$$dF = F'(V)\eta(\bar{V} - V)Vdt + F'(V)\sigma Vdz + \frac{1}{2}F''(V)\sigma^2V^2dt$$

Reemplazando:

$$rFdt = E(F'(V)\eta(\bar{V} - V)Vdt + F'(V)\sigma Vdz + \frac{1}{2}F''(V)\sigma^2V^2dt)$$

$$rF(V)dt = \left(F'(V)\eta(\bar{V} - V)Vdt + \frac{1}{2}F''(V)\sigma^2V^2dt \right)$$

$$\frac{1}{2}F''(V)\sigma^2V^2 + F'(V)\eta(\bar{V} - V)V - rF(V) = 0$$

Para resolver esta ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, es necesario plantear las siguientes condiciones:

$$F(0) = 0$$

$$F(V^*) = V^* - I$$

$$F'(V^*) = \frac{d(V^* - I)}{dV^*} = 1$$

El siguiente paso consiste en encontrar solución a la ecuación diferencial. Para ello se define una solución del tipo: $F(V) = AV^\beta h(V)$, con A y β constantes a determinar, como así lo indica el *hint*. Reemplazando en la ecuación se obtiene:

$$V^\beta h(V) \left[\frac{1}{2} \sigma^2 \beta (\beta - 1) + \eta \bar{V} \beta - r \right] \\ + V^{\beta+1} \left[\frac{1}{2} \sigma^2 V h''(V) + (\sigma^2 \beta + \eta \bar{V} - \eta V) h'(V) - \eta \beta h(V) \right] = 0$$

La ecuación anterior se debe cumplir para cualquier valor de V , por ende, los términos entre corchetes deben ser igual a 0. Se hace esto para el primer término:

$$\frac{1}{2} \sigma^2 \beta (\beta - 1) + \eta \bar{V} \beta - r = 0$$

Se desarrolla la ecuación cuadrática anterior para β con lo que se tiene:

$$\beta_1 = \frac{1}{2} - \frac{\eta \bar{V}}{\sigma^2} + \sqrt{\left(\frac{\eta \bar{V}}{\sigma^2} - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{2r}{\sigma^2}} \\ \beta_2 = \frac{1}{2} - \frac{\eta \bar{V}}{\sigma^2} - \sqrt{\left(\frac{\eta \bar{V}}{\sigma^2} - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{2r}{\sigma^2}}$$

De forma homóloga al caso ya demostrado en la sección 16.3.2, $\beta_1 > 0$ y $\beta_2 < 0$. Luego, solo se utiliza la solución positiva, ya que es la única forma en que $F(0)$ converja a 0.

A continuación, se desarrolla el segundo término de la ecuación (6):

$$\frac{1}{2} \sigma^2 V h''(V) + (\sigma^2 \beta + \eta \bar{V} - \eta V) h'(V) - \eta \beta h(V) = 0$$

Se usan las sustituciones restantes planteadas en el *hint 2*:

$$x = \frac{2\eta V}{\sigma^2}$$

$$h(V) = g(x)$$

Con lo cual:

$$h'(V) = \frac{2\eta V}{\sigma^2} g'(x)$$

$$h''(V) = \left(\frac{2\eta V}{\sigma^2}\right)^2 g''(x)$$

Luego:

$$xg''(x) + \left(2\beta + \frac{2\eta\bar{V}}{\sigma^2} - x\right)g'(x) - \beta g(x) = 0$$

La ecuación anterior corresponde a una ecuación diferencial de Kummer. Si se hace una sustitución, tal que $g(\beta) = 2\beta + \frac{2\eta\bar{V}}{\sigma^2}$, la solución de la ecuación consiste en la función de confluencia hipergeométrica dada por $H(x; \beta, g(\beta))$. La forma de esta función está dada por la siguiente serie:

$$H(x; \beta, g) = 1 + \frac{\beta}{g}x + \frac{\beta(\beta + 1)x^2}{g(g + 1)2!} + \frac{\beta(\beta + 1)(\beta + 2)x^3}{g(g + 1)(g + 2)3!} + \dots$$

Posterior a todo este estudio analítico, es posible verificar que la solución de la ecuación es:

$$F(V) = AV^{\beta_1} H\left(\frac{2\eta}{\sigma^2}V; \beta, g\right)$$

Queda por utilizar las condiciones de borde e iniciales para determinar los valores de la constante A y del valor crítico V^* . Sin embargo, como la función $H(x; \beta, g)$ corresponde a una serie infinita el problema indicado no tiene solución analítica. Por este motivo, la única manera de determinar A y V^* es mediante métodos numéricos. Queda propuesto al lector hacer el desarrollo numérico de la solución desarrollada en este capítulo.

Problema 16.6

Una empresa minera está evaluando la posibilidad de comprar una planta de tratamiento de óxidos de cobre. Esta planta, a través de un proceso hidrometalúrgico, genera cátodos de cobre de alta pureza. La planta trabaja básicamente con dos insumos:

- Ácido: Cuyo precio que sigue un movimiento geométrico Browniano del tipo:

$$dP_F = \mu_F + \sigma_F dz_F$$

- Electricidad: cuyo precio que siguen un movimiento Browniano del tipo:

$$dP_E = \mu_E + \rho\sigma_E dz_F + \sigma_E\sqrt{1-\rho^2} dz_F$$

Donde dz_1 y dz_2 son dos incrementos Brownianos que no están relacionados entre sí, el factor ρ representa la correlación entre los precios de electricidad y combustible. Los costos asociados a insumos en la planta quedan definidos como:

$$C(P_F(t), P_E(t)) = \omega_1 P_F + \omega_2 P_E$$

Siendo ω_1 y ω_2 factores que representan la cantidad necesaria tanto de ácido como de electricidad para producir los cátodos necesarios. Para simplificar el problema se asume que la empresa debe cumplir un contrato fijo de producción, un cliente compra la producción de la mina a un precio fijo por lo que se asume que el ingreso en cada periodo es constante e igual a Π . Sea r la tasa de descuento asociada al proyecto.

Encuentre el sistema de ecuaciones que se debe resolver para encontrar el tiempo óptimo de inversión cuando el precio del ácido es constante, el precio de la electricidad varía sólo estocásticamente y no hay correlación entre los precios de ambos insumos. La planta tiene un precio I que debe desembolsarse al momento de hacer la compra.

Solución:

La función de utilidad de la planta de tratamiento en cada periodo queda como

$$\pi(P_F, P_E) = \Pi - C(P_F(t), P_E(t))$$

Una vez que el yacimiento ha sido comprado este comienza a recibir beneficios, el valor presente de dichos beneficios se define por $J(t)$ tal que:

$$J(t) = E \left[\int_t^{\infty} \pi \cdot e^{-r\tau} d\tau \right] = \frac{\Pi}{r} - \frac{\omega_E P_E}{r - \mu_E} - \frac{\omega_F P_F}{r - \mu_F}$$

Donde P_E y P_F son los precios reales y conocidos de los insumos. Se asume que una vez que se compra la planta, esta produce a perpetuidad.

Se tiene que el valor de la oportunidad de invertir $V(P_F, P_E)$ satisface la siguiente igualdad:

$$rV(P_F, P_E) = \frac{E[dV]}{dt}$$

Aplicando el Lema de Itô:

$$\frac{1}{2}\sigma_F^2 P_F^2 V_{P_F P_F} + \rho\sigma_F\sigma_E P_F P_E V_{P_F P_E} + \frac{1}{2}\sigma_E^2 P_E^2 V_{P_E P_E} + \alpha_F P_F V_{P_F} + \alpha_E P_E V_{P_E} - rV = 0$$

Con esto, el inversionista debe decidir si ejerce la opción de compra o la mantiene aún como una opción válida. Ejercer la opción de compra implica pagar un monto de I a cambio de un flujo de caja estocástico a perpetuidad. La función de pago de dicha opción en algún instante de tiempo queda definida por:

$$PO(P_E, P_F) = \max\left[\frac{\Pi}{r} - \frac{\omega_E P_E}{r - \mu_E} - \frac{\omega_F P_F}{r - \mu_F} - I, 0\right]$$

Donde I actúa como costo hundido de inversión. Dado que la opción puede ser ejercida en cualquier momento el valor de la oportunidad de inversión $V(P_E, P_F)$ debe siempre dominar la función de pago encima descrita. Existe sin embargo un límite definido por $\overline{P_E}$ y $\overline{P_F}$ en el que ejercer la opción de compra se vuelve óptimo.

Por enunciado se tiene que $\sigma_F = 0$, $\mu_F = 0$ ya que el precio del ácido es constante para el caso a resolver. Así mismo $\mu_E = 0$ puesto que el precio de la electricidad varía solo por su componente estocástica y, además, ρ es igual a cero debido a que no hay correlación entre precios. Reemplazando en la ecuación anterior se obtiene que:

$$\frac{1}{2}\sigma_E^2 P_E^2 V_{P_E P_E} - rV = 0$$

Es esta la ecuación diferencial ordinaria de segundo grado que debe cumplirse. Como ya se ha visto en ejercicios anteriores esta ecuación diferencial tiene una solución de tipo:

$$V(P_E) = B_{E1} P_E^{\alpha_E} + B_{E2} P_E^{\beta_E}$$

Donde:

$$\alpha_E = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2r}{\sigma_E^2}} < 0$$

$$\beta_E = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2r}{\sigma_E^2}} > 1$$

Utilizando la condición de continuidad y de pegado suave se obtiene respectivamente que:

$$V_E = H_E - I$$

$$V_{EP_E} = H_{EP_E}$$

Con:

$$H_E = \frac{\Pi}{r} - \frac{\omega_E P_E}{r - \mu_E}$$

$$H_{EP_E} = \frac{\delta(H_E)}{\delta P_E}$$

Reemplazando se llega al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} B_{E1} \bar{P}_E^{\alpha_E} + B_{E2} \bar{P}_E^{\beta_E} = \frac{\Pi - \omega_E \bar{P}_E}{r} - I \\ \alpha_E B_{E1} \bar{P}_E^{\alpha_E - 1} + \beta_E B_{E2} \bar{P}_E^{\beta_E - 1} = -\frac{\omega_E}{r} \end{cases}$$

Resolviendo este sistema, con ayuda de un *software* matemático, es posible encontrar \bar{P}_E como precio gatillo de electricidad en el cual se realiza la inversión.

Problema 16.7

Considere una empresa minera que desea explotar un yacimiento homogéneo de un metal, y para el cual existe un costo marginal constante de producción dado por $c > 0$. La empresa estima que el precio del metal evolucionará en el futuro según la ecuación diferencial estocástica $dP = \alpha P dt + \sigma P dz$, donde α y σ son dos constantes positivas. Asuma que la tasa

de descuento de la empresa es r y que las reservas del metal son infinitas. La empresa posee la opción de abrir la mina a operación invirtiendo para ello un monto de $I > 0$, de tal forma de producir a máxima capacidad K de forma instantánea (nótese que la mina producirá a máxima capacidad siempre que esté operando). Una vez estando en producción la empresa tiene además disponible la opción de cierre, de tal forma de que, pagando un costo $E > 0$, la empresa puede cerrar si lo estima conveniente de forma instantánea. Considere ambas opciones, de apertura y cierre, disponibles en todo tiempo futuro.

- Plantee las ecuaciones de equilibrio que debe satisfacer el valor del yacimiento $V(p, t)$. Resuelva dichas ecuaciones para el caso en que V es independiente de t .
- Discuta, para el caso en que V es independiente de t , como las opciones que posee la empresa generan una estrategia de inversión siempre que el precio de mercado supere un precio de gatillo P_H mientras que una vez el precio disminuya bajo otro precio de gatillo P_L la decisión óptima de la empresa es cerrar. ¿Por qué es razonable esperar en el óptimo que $P_H > P_L$? Realice un gráfico que esquematice esta estrategia de apertura y cierre dependiendo del precio del metal.
- Derive las ecuaciones que deben resolverse para encontrar los precios de gatillo P_H y P_L asociados a la estrategia de apertura y cierre.

Solución:

- Cuando las reservas son infinitas se tiene que:

$$V_s = 0$$

Luego:

$$\begin{cases} rV = \pi(K) + \frac{1}{dt}E(dV) & \text{Si está produciendo } (q_t = K) \\ rV = 0 + \frac{1}{dt}E(dV) & \text{Si no está produciendo } (q_t = 0) \end{cases}$$

Los beneficios, cuando se produce, son:

$$\pi(K) = PK - cK$$

Desarrollando $\frac{1}{dt}E(dV)$ por Lema de Itô, dado que $V = V(P, t)$, se tiene:

$$dV = \left[V_t + \alpha PV_p + \frac{1}{2} \sigma^2 P^2 V_{pp} \right] dt + \sigma PV_p dz$$

$$E(dV) = \left[V_t + \alpha PV_p + \frac{1}{2} \sigma^2 P^2 V_{pp} \right] dt$$

$$\frac{1}{dt} E(dV) = V_t + \alpha PV_p + \frac{1}{2} \sigma^2 P^2 V_{pp}$$

Asimismo, se tiene que V es independiente de t , por lo tanto $V_t = 0$. Por lo tanto, V solo depende del precio:

$$V_p = V'(P)$$

$$V_{pp} = V''(P)$$

De esta manera, si no se produce:

$$\frac{1}{2} \sigma^2 P^2 V''(P) + \alpha PV'(P) - rV(P) = 0$$

La solución de esta ecuación diferencial de segundo orden viene dada por:

$$V(P) = A_1 P^{\beta_1} + A_2 P^{\beta_2}$$

Ya que cuando $P(0) = 0$ entonces $V(p = 0) = 0$, por lo que es necesario que $A_2 = 0$.

Por ende:

$$V(p) = A_1 P^{\beta_1}$$

Con:

$$\beta_1^* = \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{r^2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{r^2}\right)^2 + \frac{2r}{\sigma^2}}$$

Por otro lado, en caso de estar produciendo la mina:

$$\frac{1}{2} \sigma^2 P^2 V''(P) - \alpha PV'(P) - rV(P) + PK - CK = 0$$

Luego, se tiene que resolver esta ecuación diferencial de segundo orden donde la solución de la parte homogénea es la misma que la solución del caso anterior.

Además, la solución de la parte no homogénea viene dada por:

$$\frac{PK - CK}{r}$$

De esta manera:

$$V(P) = C_1P^{\beta_1} + C_2P^{\beta_2} + \frac{PK - CK}{r}$$

Ahora, tomando el límite del precio al infinito, se puede deducir que $C_1 = 0$. Así:

$$V(P) = C_2P^{\beta_2} + \frac{PK - CK}{r}$$

- b. Se puede apreciar que dada la incertidumbre del mercado causado principalmente por la variación estocástica del precio (que afecta directamente al VAN del proyecto), la empresa no querrá invertir en el proyecto hasta que el precio de mercado llegue a su precio de gatillo P_H . En donde se estima que el VAN será lo suficientemente grande para poder contrarrestar los efectos de la incertidumbre y generar dividendos. Esto es, una inversión robusta.

Luego, existe un precio de gatillo P_L el cual determina un valor del VAN del proyecto que no garantiza flujos positivos por lo que la mejor decisión es el cierre del proyecto y pagar el costo E .

En el óptimo se tendrá que $P_H > P_L$ ya que el precio para querer invertir debe ser lo suficientemente grande para pagar la inversión inicial y tener un futuro tranquilo. En cambio, si la mina se encuentra produciendo (con flujos positivos) el precio de gatillo para cerrar la operación será más bajo para querer incurrir en un gasto E de cierre.

- c. Para el precio de gatillo de la inversión:

$$A_1P_H^{\beta_1} - I = C_2P_H^{\beta_2} + \frac{P_HK - CK}{r} \quad \text{Ecuación de continuidad}$$

$$A_1\beta_1P_H^{\beta_1-1} = C_2\beta_2P_H^{\beta_2-1} + \frac{K}{r} \quad \text{Pegado suave}$$

Para el precio de gatillo de cierre:

$$C_2P_L^{\beta_2} + \frac{P_LK - CK}{r} - E = A_1P_L^{\beta_1} \quad \text{Ecuación de continuidad}$$

$$C_2\beta_2P_L^{\beta_2-1} + \frac{K}{r} = A_1\beta_1P_L^{\beta_1-1} \quad \text{Pegado suave}$$

Se deben resolver ambos sistemas de ecuaciones para llegar a los valores de P_L y P_H .

Problema 16.8

Considere una empresa minera que explota un yacimiento homogéneo, para el cual existe un costo marginal constante de producción dado por $c > 0$. La empresa estima que el precio del mineral evolucionará en el futuro según la ecuación diferencial estocástica $dP = \eta(\bar{P} - P)Pdt + \sigma Pdz$, donde dz es un diferencial de Wiener, y η , \bar{P} y σ son constantes positivas. Asuma que la tasa de descuento de la empresa es r y que las reservas del metal son infinitas. La capacidad de producción es K . La empresa posee la opción de cierre, de tal forma de que, pagando un costo $E > 0$, puede cerrar la operación de forma instantánea (sin opción de reabrir en el futuro). Considere que esta opción se encuentra disponible en todo tiempo futuro.

- Plantee la ecuación que debe satisfacer el VAN del yacimiento $V(P, t)$. Resuelva dicha ecuación para el caso en que V es independiente de t .
- Derive las ecuaciones que deben resolverse para encontrar el precio de gatillo P^* .

Solución:

- Planteadando el problema a resolver:

$$VAN = \max_q E \left[\int_0^T e^{-rt} (Pq - cq(t)) dt \right]$$

s. a.

$$dP = \eta(\bar{P} - P)Pdt + \sigma Pdz$$

$$dS = -qdt$$

$$q, T \geq 0$$

Como:

$$V_S \approx 0$$

Luego:

$$dV = \left[V_t + \eta(\bar{P} - P)PV_P + \frac{1}{2}\sigma^2 P^2 V_{PP} \right] dt + \sigma PV_P dz$$

Debe cumplirse que:

$$\begin{cases} rV = \pi(K) + \frac{1}{dt}E(dV) & , \text{si } (q_t = K) \\ rV = 0 + \frac{1}{dt}E(dV) & , \text{si } (q_t = 0) \end{cases}$$

Los beneficios, cuando se produce, vienen dados por:

$$\pi(K) = PK - cK$$

Desarrollando $\frac{1}{dt}E(dV)$:

$$E(dV) = \left[V_t + \eta(\bar{P} - P)PV_P + \frac{1}{2}\sigma^2 P^2 V_{PP} \right] dt$$

$$\frac{1}{dt}E(dV) = V_t + \eta(\bar{P} - P)PV_P + \frac{1}{2}\sigma^2 P^2 V_{PP}$$

Asimismo, se tiene que V es independiente de t por lo que $V_t = 0$. Por lo tanto, V solo depende del precio. Utilizando la notación:

$$V_P = V'(P)$$

$$V_{PP} = V''(P)$$

Es posible escribir las ecuaciones de equilibrio como:

$$rV(P) = \begin{cases} (PK - cK) + \frac{1}{2}\sigma^2 P^2 V''(P) + \eta(\bar{P} - P)PV' & \text{si se produce} \\ \frac{1}{2}\sigma^2 P^2 V''(P) + \eta(\bar{P} - P)PV'(P) & \text{si no se produce} \end{cases}$$

Si no se produce:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 P^2 V''(P) + \eta(\bar{P} - P)PV'(P) - rV(P) = 0$$

Donde se obtiene la solución de la ecuación diferencial de segundo orden, que viene dada por:

$$V(P) = A_1 P^{\beta_1} + A_2 P^{\beta_2}$$

Con:

$$\beta_1^* = \frac{1}{2} - \frac{\eta(\bar{P} - P)}{\sigma^2} + \sqrt{\left(\frac{2\eta(\bar{P} - P) - \sigma^2}{2\sigma^2}\right)^2 + \frac{2r}{\sigma^2}} > 1$$

$$\beta_2^* = \frac{1}{2} - \frac{\eta(\bar{P} - P)}{\sigma^2} - \sqrt{\left(\frac{2\eta(\bar{P} - P) - \sigma^2}{2\sigma^2}\right)^2 + \frac{2r}{\sigma^2}} < 0$$

Cuando $P(0) = 0 \rightarrow V(P = 0) = 0$, por ende, es necesario que $A_2 = 0$. Así, la solución para el caso de que la mina esté cerrada es:

$$V_0(P) = A_1 P^{\beta_1}$$

Si se produce:

$$\frac{1}{2} \sigma^2 P^2 V''(P) + \eta(\bar{P} - P) P V'(P) - r V(P) + (PK - cK) = 0$$

Luego, se tiene que resolver esta ecuación diferencial de segundo orden donde la solución de la parte homogénea es la misma que la solución del caso anterior. Además, la solución de la parte no homogénea viene dada por:

$$\frac{(PK - cK)}{r}$$

De esta manera,

$$V_1(P) = B_1 P^{\beta_1} + B_2 P^{\beta_2} + \frac{(PK - cK)}{r}$$

Ahora, tomando el límite del precio al infinito, se deduce que $B_1 = 0$. Así:

$$V_1(P) = C_2 P^{\beta_2} + \frac{(PK - cK)}{r}$$

- b. Para el precio gatillo de cierre se debe cumplir la ecuación de continuidad y ecuación de pegado suave:

$$V_1(P^*) - E = V_0(P^*)$$

$$V_1'(P^*) = V_0'(P^*)$$

Esto es:

$$B_2 P^{*\beta_2} + \frac{(P^*K - cK)}{r} - E = A_1 P^{*\beta_1}$$

$$B_2 \beta_2 P^{*\beta_2-1} + \frac{K}{r} = A_1 \beta_1 P^{*\beta_1-1}$$

Se debe resolver el sistema de ecuaciones para llegar al valor de P^* .

Problema 16.9

Usted es el jefe de planificación en una importante operación minera a nivel mundial, con una vasta trayectoria en la compañía y es un hombre de confianza de la alta administración. Por ello, el gerente general le encarga una importante misión: determinar la política de operación $\varphi(q, P_A, P_C)$ tal que permita determinar la opción de abrir o cerrar una mina incluyendo el costo de oportunidad. Esto considerando que se busca maximizar el valor $V(P, S, t)$ de la mina en cuestión.

Para ello, considere un yacimiento mineral de cobre, que trabaja a una tasa de producción q con una ley media τ de 1% del metal. Se tienen permisos que aseguran una LOM máximo de 12 años. El costo mina es de $1 \frac{USD}{ton}$ y el costo planta es de $8 \frac{USD}{ton}$. El costo de mantenimiento anual es de 5 MUSD mientras que los costos de apertura y cierre son de 2 MUSD cada uno.

Junto a ello, considere que el precio de este commodity distribuye estocásticamente bajo reversión a la media. De modo tal que $dP = \alpha(\bar{P} - P)dt + \sigma dz$. Su nivel de tendencia a largo plazo es $\alpha = 1\%$, el precio de largo plazo \bar{P} es $2,61 \frac{USD}{lb}$ y la volatilidad σ asociada al precio es de 3,35% anual (según desviación del precio del cobre en el último año).

A los datos anteriores, se suman una tasa de descuento del 8%, un impuesto a la renta (de primera categoría) de 20% y un royalty promedio de 2,5%. Esto último considerando una operación de mediana minería. La totalidad de los recursos de la empresa son medidos por lo que tienen un alto grado de certeza geológica. Los recursos disponibles al inicio de la explotación son 200 Mton y estos son finitos en el tiempo.

- Plantee matemáticamente el problema, muestre claramente la función objetivo, las variables de control, las variables de estado y las restricciones a las que está sujeto el problema.
- Describa matemáticamente la opción real asociada al problema. Junto con ello, y ocupando los parámetros del enunciado, derive mediante programación dinámica estocástica las ecuaciones diferenciales parciales (EDP) que rigen la apertura y cierre de mina. Además de las condiciones que permitan obtener las constantes de las soluciones a las EDP.
- Compare y explique de forma teórica cómo cambia la curva de valor del activo (mina), a distintos valores precios de gatillo. Tanto para apertura como cierre de esta.

Solución:

- El problema de optimización dinámica queda planteado de la siguiente forma:

$$\max_{\varphi} E[V(P, S, t)] = E\left[\int_0^{12} e^{-rt}(q\tau \cdot (P - A) - M(1 - \lambda) - \lambda V - T) dt\right]$$

s. a.

$$dP = \alpha(\bar{P} - P)dt + \sigma dz$$

$$dS = -qdt$$

$$S(0) = S_0 = 200 \text{ Mton}$$

- $\varphi(q, P_A, P_c)$ es la política de operación (apertura o cierre), que depende de la tasa de extracción q y los precios gatillantes de apertura P_a como cierre P_c .
- $V(P, S, t)$: valor de la mina en el tiempo, sujeto al precio del *commodity* explotado (P) y las reservas remanentes (S).
- P : precio del *commodity*.
- α : tendencia de crecimiento del precio del *commodity*.
- σ : desviación estándar del precio del *commodity*.
- S : reservas remanentes de la mina.
- S_0 : reservas iniciales de la mina.
- q : tasa de extracción de mineral.
- τ : ley media de mineral.

b) Como se busca plantear la opción real de apertura o cierre de mina, sujeta a reservas finitas (y, por tanto, a un costo de oportunidad), las dos ecuaciones derivadas por principio de optimalidad estocástica de Bellman vienen dadas por:

$$\begin{cases} rV = \pi(q, P, A, M, T) + \frac{1}{dt} E(dV) & \text{si hay producción: } q > 0 \\ rV = -M + \frac{1}{dt} E(dV) & \text{si no hay producción: } q = 0 \end{cases}$$

Donde:

- $A(q, S, t)$: costo total de producir q en el instante de tiempo t cuando las reservas remantes son S .
- $M(t)$: costo de mantención en el tiempo t cuando la mina está cerrada.
- λ : variable binaria que indica si la mina se encuentra abierta (1) o cerrada (0).
- $T(q, S, P, t)$: es la función de impuestos. Cuyo valor es igual a:

$$t_1 q P + \max\{t_2 q [P(1 - t_1) - A], 0\}$$

○ Con:

- t_1 : royalty.
- t_2 : impuesto a la renta.
- $\pi(q, P, A, M, T)$: flujo de caja de la mina, sujeta a producción, precio y costos de explotación, costos de mantención e impuestos.

Primero, se obtendrán las EDP asociadas al caso de mina abierta y cerrada, para luego reemplazar en estas los parámetros de interés. Como $V = V(P, S, t)$, usando el Lema de Itô al valor del activo total, para el caso de la mina cerrada (sin producción) y se obtiene:

$$dV = V_P dP + V_S dS + V_t dt + \frac{1}{2} V_{PP} (dP)^2$$

Luego, aplicando valor esperado a dV y por linealidad del operador $E(\cdot)$ se tiene que:

$$E(dV) = E(V_P dP) + E(V_S dS) + E(V_t dt) + E\left(\frac{1}{2} V_{PP} (dP)^2\right)$$

Por lo tanto:

- $E(V_P dP) = E(V_P \alpha (\bar{P} - P) dt) + E(V_P \sigma dz) = V_P \alpha (\bar{P} - P) dt.$
- $E(V_S dS) = -V_S q dt.$
- $E(V_t dt) = V_t dt.$

$$\bullet \quad E\left(\frac{1}{2}V_{PP}(dP)^2\right) = \frac{1}{2}V_{PP}E((dP)^2) = \frac{1}{2}V_{PP}E((\alpha(\bar{P} - P)dt)^2 + 2\alpha\sigma(\bar{P} - P)dtdz + \sigma^2 dz^2) = \frac{1}{2}V_{PP}\sigma^2 dt.$$

Por lo tanto:

$$\frac{1}{dt}E(dV) = \frac{1}{dt}(V_P\alpha(\bar{P} - P) - qV_S + V_t + \frac{1}{2}V_{PP}\sigma^2)dt$$

Por lo tanto, empleando el principio de optimalidad estocástica de Bellman, para el caso de la mina cerrada, se llega a la siguiente EDP de segundo orden:

$$rV = -M + \frac{1}{dt}E(dV) \leftrightarrow \alpha(\bar{P} - P)V_P - qV_S + V_t + \frac{1}{2}V_{PP}\sigma^2 - rV - M = 0$$

Además, por enunciado se tiene que:

- $r = 8\% \equiv 0,08$.
- $M \equiv M(t) = 5 \text{ MUSD} = 5.000.000 \text{ USD}$.
- $\alpha = 1\% \equiv 0,01$.
- $\bar{P} = 2,61 \frac{\text{USD}}{\text{lb}} \cdot 2.204,6 \frac{\text{lb}}{\text{ton}} \approx 5.754 \frac{\text{USD}}{\text{ton}}$.
- $\sigma = 3,35\% \leftrightarrow \sigma^2 = 11,23\% \approx 0,11$ (anual).

Reemplazando los valores en la EDP, se cumple la siguiente ecuación:

$$0,01 \left(5.754 \frac{\text{USD}}{\text{ton}} - P\right) V_P - qV_S + V_t + \frac{1}{2}V_{PP} \cdot 0,11 - 0,08V - 5.000.000 \text{ USD} = 0$$

Al resolver la ecuación anterior, que no se hará por su extrema complejidad y porque se escapa de los objetivos del curso, se obtendrá el valor óptimo de la mina cerrada $V_0(P, S, t)$.

Luego, se resolverá el problema de la mina abierta. Dado que esta se encuentra operando, entonces por explotar la operación la compañía recibe un flujo de caja $\pi(q, P, A, M, T) = q(P - A) - M(1 - \lambda) - \lambda V - T$. Pero como la mina se encuentra operando, entonces $\lambda = 1$. Así el flujo de caja es: $\pi(q, P, A, M, T) = q(P - A) - V - T$.

Después, en el caso que hay producción y considerando el valor de $\frac{1}{dt}E(dV)$ previamente calculado, entonces se cumple la siguiente EDP de segundo orden:

$$rV = \pi(q, P, A, M, T) + \frac{1}{dt}E(dV)$$

$$rV = q(P - A) - V - T + (\alpha(\bar{P} - P)V_P - qV_S + V_t + \frac{1}{2}V_{PP}\sigma^2).$$

Consideremos además la expresión para los impuestos (T) dada por:

$$t_1qP + \max\{t_2q[P(1 - t_1) - A], 0\}$$

Como por enunciado $t_1 = 20\%$ y $t_2 = 2,5\%$, entonces:

$$0,2qP + 0,025q[P \cdot 0,8 - 9] \geq T \geq 0,2qP$$

$$T = 0,2qP + \max\{0,025q[P(1 - 0,2) - A], 0\}$$

Dado que $A = C_{Mina} + C_{Planta} = 9 \text{ USD/ton}$, entonces:

$$T = 0,2qP + \max\{0,025q[P \cdot 0,8 - 9], 0\}$$

Por lo tanto, reemplazando T en la EDP, esta queda planteada de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} q\left(P - 9\frac{\text{USD}}{\text{ton}}\right) - (1,08)V - (0,2qP + \max\{0,025q[P \cdot 0,8 - 9], 0\}) + 0,01 \\ \cdot \left(5,754\frac{\text{USD}}{\text{ton}} - P\right)V_P - qV_S + V_t + \frac{1}{2}V_{PP} \cdot 0,11 - 0,08V - 5.000.000 \text{ USD} \\ = 0 \end{aligned}$$

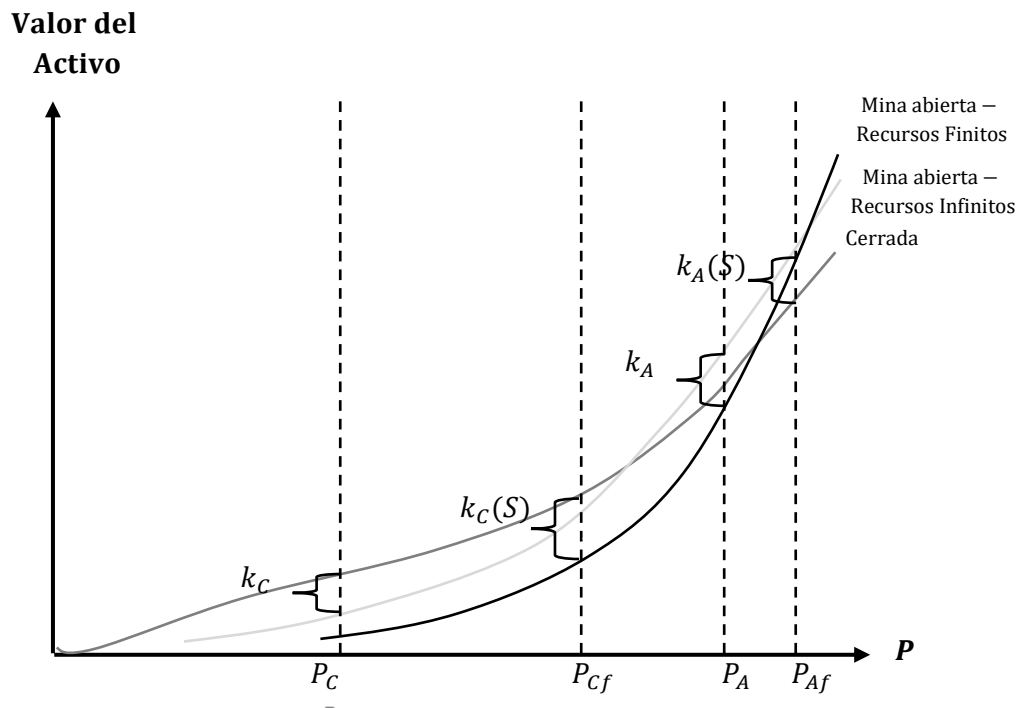
Se puede observar que además que se complejiza la EDP, aparece una función de decisión binaria. Esto crea un problema mixto aún más difícil que el caso de la mina abierta. Por ende, solo se pueden obtener soluciones numéricas vía algún *software* matemático. Así, se denotará la solución por $V_1(P, S, t)$.

Luego, se definen los estados de apertura y cierre $V_1(P, S, t)$ y $V_0(P, S, t)$, respectivamente. Además de los costos de apertura $k_A(S)$ y cierre $k_C(S)$ iguales a 2 MUSD. Junto a lo anterior, por la condición de pegado suave se cumple que:

$$\begin{aligned} V_1(P_C, S) &= \max\{V_0(P_C, S) - 2 \text{ MUSD}, 0\} \\ V_0(P_A, S) &= V_1(P_A, S) - 2 \text{ MUSD} \\ V_{1P}(P_C, S) &= \begin{cases} V_{0P}(P_C, S) & \text{si } V_0(P_C, S) - 2 \text{ MUSD} \geq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \\ V_{0P}(P_A, S) &= V_{1P}(P_A, S) \end{aligned}$$

Finalmente, resolviendo este sistema de ecuaciones se obtienen las constantes asociadas a los valores óptimos de la mina a la hora de apertura y cierre.

c)



En la figura anterior, se compara la situación infinita y la finita. Se observa que la curva de valor del activo con la mina cerrada permanece inalterada, mientras que aquella que representa el valor del activo con la mina abierta presenta un crecimiento en menor en que en el caso de recurso infinito, lo que produce que tanto el precio de apertura como el de cierre se desplacen a la derecha, es decir, aumentan. Esto se puede relacionar con el costo de oportunidad que presenta el recurso finito.

Al analizar las ecuaciones es posible concluir que el costo de oportunidad está intrínsecamente relacionado con los precios de apertura y cierre. Esto se relaciona tanto con el valor del activo evaluado en cada situación como con los costos de apertura y cierre pues estos son mayores para menores valores de S producto, por ejemplo, de la profundización y envejecimiento del yacimiento y requerimiento de mayores medidas de mitigación producto de la explotación minera, entre otros.

Bibliografía

Aivazian, V y Callen, J (1979). A Note on the Economics of Exhaustible Resources. The Canadian Journal of Economics Vol. 12, N° 1, 83-89.

Alford, G.G. y Whittle, J. (1986). Application of Lerchs-Grossman pit optimisation to the design of open pit mines, Open Pit Mining Conference, 201-207, Calgary, Canada.

Almarza, J. (2011). El cálculo estocástico en la valuación de activos financieros. Tesis de Licenciatura. Universidad de Buenos Aires.

Álvarez, R. (1987). Modelo de programación dinámica para el control óptimo de la fiebre tifoidea en Chile. Pontificia Universidad Católica de Chile. Escuela de Ingeniería, Santiago, Chile.

Anita, S., Arnautu, V. y Capasso, V. (2011). An introduction to optimal control problems in life sciences and economics. Birkhäuser, Berlin-Heidelberg, Alemania.

Aranda, P. (2011). Apuntes de ecuaciones diferenciales II (EDPs). Universidad Complutense de Madrid, Madrid, España.

Arndt, N. y Ganino, C. (2012). Metals and society - An introduction to economic geology. Springer Verlag, Berlin-Heidelberg, Alemania.

Arrow, K y Lehmann, E. (2005). Harold Hotelling 1895–1973, Biographical Memoirs, Vol. 87.

Asfura, A. y Mery, J. (2008). Vulnerabilidad de Proyectos Mineros por Efectos Meteorológicos en Zonas de Montaña: Identificación de Riesgos y Estimación de su Magnitud. Revista de la Construcción. Vol. 7, 47-59.

Ashbaugh, M. y Benguria, R. (2010). El Problema de la Reina Dido: Panorama sobre los Problemas de la Isoperimetría. Lecture S.I.

Auger, F. y Guzmán, J. I. (2010). How rational are Investment Decisions in the Copper Industry? Resources Policy, Vol. 35, N° 4, 292-300.

- Aziz, F., Tripathi, N., Ole, M. y Kusanagi, M. (1997). Development of flood warning system. 1-6.
- Bar-Ilan, A. y Strange, W. (1996). Investment Lags. *The American Economic Review*. Vol. 86, Nº 3, 610-622.
- Barnafi, N. y Rivera, F. (2015). El problema estático de extracción de minerales. Taller de Ingeniería Matemática, Pontificia Universidad Católica de Chile, Santiago, Chile.
- Barrick Gold Corporation (2014). Pascua-Lama. Características. Consultado el 29 de junio de 2017. Recuperado de: <https://barricklatam.com/barrick/presencia/pascua-lama/informacion-general/caracteristicas/2014-06-10/124049.html>
- Beckmann, M. J. (1968). *Dynamic programming of economic decisions* (Vol. 9). Springer-Verlag, New York, EE.UU.
- Bellman, R. (1957). *Dynamic programming*. Rand Corporation research study. Princeton University Press, Nueva York, EE.UU.
- Bellman, R. (1965). On the application of dynamic programming to the determination of optimal play in chess and checkers. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*. United States.
- Bellman, R. (1984). *Eye of the Hurricane*. World Scientific, California, EE.UU.
- Berkovitz, L. y Medhin, N. (2013). *Nonlinear optimal control theory*. CRC Press, EE.UU.
- Bertsekas, D. (1995). *Dynamic Programming and Optimal Control*. MIT, Cambridge, Massachusetts, EE.UU.
- BHP Billiton Market CAP on Forbes. Recuperado de: <http://www.forbes.com/companies/bhp-billiton/>.
- Birge, J. y Louveaux, F. (2011). *Introduction to Stochastic Programming*. Segunda edición, Springer Press. Copenhague, Dinamarca.
- Black, F. y Scholes, M. (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, Vol. 81, Nº 3, 631–654.
- Bradley, P. (1973). Increasing scarcity: The case of energy resources. *American Economic Review*, Vol. 63, Nº 2, 119-125.
- Braun, M. (1983). *Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones*. Springer-Verlag, Nueva York, EE.UU.

Brealey, R., Myers, S. y Marcus, A. (2015). *Fundamentals of corporate finance*. Octava edición, McGraw-Hill Education, New York, EE.UU.

Brennan, M. y Schwartz, E. (1985). Evaluating Natural Resource Investments. *The Journal of Business*, Vol. 58, N° 2, 135-157.

Brennan, M. y Schwartz, E. (1985). A new approach to evaluating natural resource investments. *Midl. Corp. Financ. J.*, Vol. 3, 42–47.

Brito, P. (2008). *Introduction to Dynamic Programing Applied to Economics*, Lisboa, Portugal.

Brzezniak, Z. y Zastawniak, T. (1999). *Basic Stochastics Processes – A course through exercises*. Cottingham Road, Hull, Inglaterra.

Cairns, R. (1986). Intergenerational Equity and Heterogeneous Resources. *The Scandinavian Journal of Economics*, Vol. 88, No 2. 401-416.

Calle A. y Tamayo, V. (2009). Decisiones de inversión a través de Opciones Reales. *Estudios Gerenciales*, Vol. 25, N° 111, 107-126.

Campbell, H.F. (1980). The Effect of Capital Intensity on the optimal rate of extraction of mineral deposit. *The Canadian Journal of Economics*, Vol. 13, N° 2, 349-356. University of British Columbia. Canadá.

Campbell, M., Hoane, A. J., & Hsu, F. H. (2002). *Deep blue. Artificial intelligence*. Elseviere, California.

Camus, F. (2002). *Geología de los sistemas Porfídicos en los Andes de Chile*. Sernageomin. Chile.

Camus, F. (2005). La minería y la evolución de la exploración en Chile. *Minería y Desarrollo: Foro en Economía de Minerales*, Vol. 3, Ediciones Universidad Católica de Chile, Santiago, Chile, 229-270.

Cantallopets, J., Castillo, E. y Rojas, D., (2015). Caracterización de los costos de la gran minería del cobre. 19 de junio, de COCHILCO Sitio web: http://www.cochilco.cl/descargas/estudios/tematico/productividad/Informe_caracterizacion_de_los_costos.pdf

Carlisle, D. (1954). The economics of fund resource with particular reference to mining. *American Economic Review*, Vol. 44, N° 4, 595-616.

Carrasco, P., Chilès, J. y Sèguret, S. (2008). Additivity, Metallurgical Recovery and Grade. 8th International Geostatistic Congress, Santiago, Chile.

Castillo, L. (2009). Modelos de Optimización para Planificación Minera a Cielo Abierto. Tesis de Magíster, Universidad de Chile, Santiago, Chile.

Cavalieri, R. (2009). Where parallel lines meet. Colorado State University. EE.UU.

Ceballos, G., Ehrlich, P., Barnosky, A., García, A., Pringle, R. y Palmer, T. (2015). Accelerated modern human-induced species losses: Entering the sixth mass extinction. *Science Advances*, Vol. 1, N° 5, 1-5.

Chao, H. (1981). Exhaustible Resource Models: The Value of Information: *Operations Research*, Vol. 29, No. 5.

Chen M.-H. (2010). Understanding world metals prices – returns, volatility and diversification. *Resources Policy*, Vol. 35, 127-140.

Chiang, A. (1992). *Elements of dynamic optimization*. McGraw-Hill, Singapur.

Cochilco (2016a). Catastro de empresas exploradoras 2016. Santiago, Chile.

Cochilco (2016b). Inversión en la minería chilena: Catastro de Proyectos 2015-2024. Santiago, Chile.

Cochilco (2016c). Franjas metalogénicas de los Andes Centrales: blancos clave para la exploración minera. Dirección de Estudios y políticas públicas. Recuperado de: https://www..cl/Listado%20Temtico/Franjas_metalog%C3%A9nicas_de_Los_Andes_Centrales-Post_Validaci%C3%B3n_Completo.pdf

Cochilco (2017). Boletín electrónico precios de los metales e inventarios. Gobierno de Chile. Consultado el 29 de junio de 2017. Recuperado de: https://boletin.cochilco.cl/estadisticas/grafico.asp?tipo_metal=1.

Codelco (2013). Codelco completa más de 107 mil millones de dólares de aporte a Chile. Gerencia de Comunicaciones. Recuperado de: https://www.codelco.com/codelco-completa-mas-de-107-mil-millones-de-dolares-de-aporte-a-chile/prontus_codelco/2013-07-11/112003.html

Codelco (varios años). Resumen de Memoria Anual. Recuperado de: <https://www.codelco.com>.

Colgan, J. D. (2013). *Petro-Agression: When oil causes war*. American University and Wilson Scholar, Cambridge.

Collahuasi (2009 al 2015). Reporte de desarrollo sustentable. Iquique, Chile.

Conrad, R. y Hool, R. (1984). Interporal extraction of mineral resources under variable rate taxes. *Land Economics*, Vol. 60, N° 4, 319-327.

Consejo Minero (2016,2017). Reporte Anual: Minería en cifras. Santiago, Chile.

Contreras, C. (2016). Simulación como herramienta para la planificación de la preparación minera en minería tipo Block/ Panel Caving. Memoria para optar al título de ingeniera civil de minas. Departamento de Ingeniería de Minas, Universidad de Chile. Santiago, Chile.

Corfo (2016). Presentación Comisión Investigadora del Litio, Chile. 70.

Cortázar, G. y Schwartz, E. (1993). A Compound Option Model of Production and Intermediate Inventories. *The Journal of Business*, Vol. 66, N° 4, 517-540.

Cortázar, G., Gravet, M. y Urzúa, J. (2008). The valuation of multidimensional American real options using the LSM simulation method. *Comput. Oper. Res.*, Vol. 35, 113–129.

Cortázar, G., Schwartz, E.S. y Casassus, J. (2001). Optimal exploration investments under Price and geological-technical uncertainty: a real options model. *RD Manag*, Vol. 31, 181–189.

Cox, R. (1946). Probability, Frequency and Reasonable Expectation. *American Journal of Physics*, Vol. 14, N° 1, 1-13.

Cox, J.C., Ross, S.A. y Rubinstein, M. (1979). Option pricing: a simplified approach. *Journal of Financial Economics*, Vol. 7, N° 3, 229–263.

Cresson, J. y Darses, S. (2007). Stochastic embedding of dynamical systems. *Journal of Mathematical Physics*, Vol. 48, N° 7, 54.

Crowson, P. (2003). Mine size and the structure of costs. Elsevier. Reino Unido.

Dahl, C.A. (2014). *International Energy Markets*. Edición revisada, Pennwell Press, Tulsa, Oklahoma, EEUU.

Dapena, J. y Fidalgo, S. (2002). Un enfoque de opciones reales en procesos de adquisiciones de empresas. Universidad del CEMA, Argentina.

Dasgupta, P. y Heal, G. (1979). *Economic Theory and Exhaustible Resources*. Cambridge University Press, Cambridge, UK.

Davison, R. (1978). Optimal Depletion of an Exhaustible Resource with Research and Development towards an Alternative Technology. *The Review of Economic Studies*, Vol. 45, N° 2, 355-367.

De Teresa, L. (2007). Euler y el cálculo de variaciones. *Miscelánea matemática*, México. Vol. 45, 25-31.

Deck, C., Guzmán, J.I., Hinrichsen, C., Lichtin, C., Rademacher, M., Cancino, R., Henríquez, J. Jara, E. Morales, G. Echeverría, A. Juárez, G. Recabarren, M. Ronda, J. y Vila-Echague, E. (2013). Flexible Stochastic Planning: The Ultimate Frontier. *Mine Planning 2013*, Santiago, Chile.

Del Sol, P. (1987). Dominant firm and competitive fringe interaction in exhaustible resource markets. *Disertación de Ph.D.*, Departamento de Ingeniería, Universidad de Standford, Standford, CA.

Departamento Nacional Produção Mineral (DNPM) (2014). Niobio Sumario Mineral 2014. Recuperado en: <http://www.dnpm.gov.br/dnpm/sumarios/niobio-sumario-mineral-2014>

Department of Mines and Petroleum (2015). Mineral royalty rate analysis final report 2015. Department of State Development, Government of Western Australia. 1-155.

Devarajan, S. y Fisher, A. (1981). Hotelling's "Economics of Exhaustible Resources": Fifty Years Later. *Journal of Economic Literature*. Vol. 19, N° 1-73.

Dierkes, U., Hildebrandt, S. y Sauvigny, F. (2010). *Minimal surfaces*. Segunda edición. Springer, Berlin, Alemania.

Diestel, R. (2010). *Graph theory*. Segunda edición. Springer, Nueva York, NY.

Dill, H. (2010). The "chessboard" classification scheme of mineral deposits: Mineralogy and geology from aluminum to zirconium. *Earth-Science Reviews*. Vol. 100, 1–420.

Dixit, A. (1989). Entry and Exit Decisions under Uncertainty. *The Journal of Political Economy*, Vol. 97, N° 3, 620-638.

Dixit, A. y Pindyck, R. (1994). *Investment under uncertainty*. Princeton University Press, New Jersey, Estados Unidos.

Edwards, H. y Penney, D. *Differentil equations and linear algebra*. Tercera edición, Pearson, New Jersey, Estados Unidos.

Euler, L. (1744). *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici lattissimo sensu accepti*.

Evans, A.M. (1997). An introduction to economic geology and its environmental impact. Blackwell Science Ltd., Reino Unido.

Evans, L. (2010). Partial differential equations. Segunda edición. American Mathematical Society, Estados Unidos.

Farzin, Y. (1984). The Effect of the Discount Rate on Depletion of Exhaustible Resources. Journal of Political Economy. Vol. 92, N° 5, 841-851.

Farzin, Y. (1992). The Time Path of Scarcity Rent in the Theory of Exhaustible Resources. The Economic Journal. Vol. 102, N° 413, 813-830.

Field, B. (2008). Natural resource economics. Segunda edición. Waveland Press, Long Grove, IL, EEUU.

Field, B. y Field, M. (2016). Environmental economics: An introduction. Séptima edición, McGraw-Hill Education, Nueva York, EEUU.

Financial post. (2012). BHP said to delay Olympic Dam expansion. Consultado el 29 de junio del 2017. Recuperado en: <http://business.financialpost.com/investing/bhp-said-to-delay-olympic-dam-expansion/wcm/d2d5d78e-0993-446a-9157-ae19de3e69e0>

Flores L.F (1964). Introducción a la programación dinámica. Pontificia Universidad Católica de Chile. Escuela de Ingeniería, Santiago, Chile.

Fontana, J. (2011). Por el bien de un imperio. Una historia del mundo desde 1945.

Forbath, P. (2002). El río Congo. Fondo de Cultura Económica, Madrid.

Fraser Institute (2016). Annual survey of mining companies. Recuperado en: <https://www.fraserinstitute.org/sites/default/files/survey-of-mining-companies-2016.pdf>

Freeman, R.E. y McVea, J. (2001). A Stakeholder Approach to Strategic Management. SSRN Electronic Journal. En Hitt, M., Harrison, J., Freeman, R.E. (editors), Handbook of Strategic Management. Blackwell Publishing, Oxford, Reino Unido.

Freguglia, P. y Giaquinta, M. (2016). The Early Period of the Calculus of Variations. Birkhäuser, Suiza.

Frimpong, S. y Whiting, J. (1997). Derivative mine valuation: strategic investment decisions in competitive markets. Resour. Policy. Vol. 23, 163–171.

García, D. y Guzmán, J.I. (2018). Price volatility and reversion rate in mineral commodity markets. Working Paper, Departamento de Minería, Pontificia Universidad Católica de Chile, Santiago, Chile.

Garrido, M. (2002). Algunos resultados de existencia, unicidad y estabilidad para EDP funcionales estocásticas no lineales. Sevilla, España.

Gaudet, G. (2007). Natural Resource Economics under the Rule of Hotelling, Vol. 40, N° 4.

Gelfand, I. y Fomin, S. (1963). Calculus of variations. Prentice-Hall Inc., Nueva Jersey, EE.UU.

GEM (2013). Curso de opciones reales. Santiago, Chile.

GEM (2015). Curso de análisis de riesgos. Santiago, Chile.

Gleixner, A. (2008). Solving large – scale open pit mining production scheduling problems by integer. Master's Thesis, Technische Universität, Berlin, Alemania.

Goldstine, H. (1981). A History of the Calculus of Variations from the 17th through the 19th Century. Springer-Verlag, New York, EE.UU.

Gordon, R. (1966). Conservation and the Theory of Exhaustible Resources. The Canadian Journal of Economics and Political Science, Vol. 32, N° 3. 319-326.

Grossman, G. y Shapiro, C. (1986). Optimal Dynamic R&D Programs. Rand Journal of Economics. Vol. 17, N° 4, 581-593.

Guzmán, J.I. (2007). Essays in Industrial Organization Applied to Mineral Markets. Thesis of the requirements for the Degree of Doctor in Engineering Sciences, Pontificia Universidad Católica de Chile, Escuela de Ingeniería, Chile.

Guzmán, J. I. (2008a). Determinación del precio de los minerales. Minería Chilena, Vol. 325, 1–5.

Guzmán, J. I. (2008b). La oferta de minerales: oferta primaria. Minería Chilena, Vol. 323, 1–5.

Guzmán, J.I. (2008c). Las rentas mineras. Reportajes Minería Chilena. Chile.

Guzmán, J.I. (2008d). Ultimate pit limit determination: A new formulation for an old (and poorly specified) problem. Communication in the Workshop on Operations Research in Mining, Viña del Mar, Chile. 1-24.

Guzmán, J. I. (2011a). Inversión bajo incertidumbre. Minería Chilena, Vol. 358, 101–104.

Guzmán, J. I. (2011b). Inversión bajo incertidumbre: Tipos de incertidumbres. *Minería Chilena*, Vol. 359, 146–147.

Guzmán, J.I. (2015). El problema espacio-temporal de la extracción de los recursos minerales. *Encuentro Nacional de Ingeniería Matemática*, Santiago, Chile.

Guzmán, J.I. (2015). Estudio de caso de determinación de malla de sondaje óptima en caliche. Chile.

Guzmán, J.I. y Silva, E. (2017). Copper Price determination: fundamentals versus non-fundamentals. *Mineral Economics* (por aparecer).

Hardin, G. (1968). The tragedy of the commons. *Science*, Vol. 162, N° 3859, 1243–1248.

Hartwick, J. y Sardosky, P. (1990). Duopoly in Exhaustible Resource Exploration and Extraction. *The Canadian Journal of Economics*, Vol. 23, N° 2, 279-293.

Heimlich, E. (2009). Incorporación de riesgo a la evaluación de proyectos mineros. Dirección de Estudios y Políticas Públicas Comisión Chilena del Cobre. Recuperado de: http://www.cochilco.cl/descargas/estudios/tematico/economico/incorporacion_de_riesgo_evaluacion_proyectos.pdf.

Hildebrandt, S. y Tromba, A. (1996). *The parsimonious universe: shape and form in the natural world*. Springer-Verlag, Nueva York, Estados Unidos.

Hochbaum, D.S. (2008). The pseudoflow algorithm: A new algorithm for the maximum flow problem. *Operations Research*, Vol. 58 , 992–1009.

Hockley, D.E, y Hockley L.C (2015). Some histories of mine closure, the idea. 10 th International Conference on Mine Closure, Vancouver, Canada.

Hoffman, J. (2001). *Numerical Methods for Engineers and Scientists*. Marcel Dekker, Inc., Basel, Suiza.

Holly, S., y Hughes Hallett, A. (2010). *Optimal control, expectations and uncertainty*. Cambridge University Press, Cambridge, Reino Unido.

Hotelling, H. (1931). The economics of exhaustible resources. *The Journal of Political Economy*, Vol. 39, N° 2, 137-175.

Hull, D. (2003). *Optimal control theory for applications*. Springer-Verlag, New York. EE.UU.

Hull, J. (2015). *Options, Futures and other Derivatives*. Novena edición. Pearson, Upper Saddle River, EE.UU.

Humphreys, D. (1996). New approaches to Valuation: A Mining Company Perspective. *Resources Policy*, Vol. 22, Issues 1-2, 75–77.

Hunt, B. (2007). *Copper Costs, mines and projects. Summary & Analysis*, Vol. 1.

Hustrulid, W., Kuchta, M. y Martin, R. (2013). *Open pit mine planning and design*. Tercera edición, CRC Press, Londres, Reino Unido.

Jakubec, J. y Laubscher, D. (2000). The MRMR rock mass rating classification system in mining practice. *Australasian Institute of Mining and Metallurgy, Australia*. Vol 1, 413–421.

Janeras, M., Oller, P., Arancibia, R., Pons, J., Costa, O. y García, C. (2013). Experiencias de estudio del riesgo de taludes de nieve en explotaciones mineras de los Andes Centrales de Chile y Argentina. VIII Simposio Nacional sobre Taludes y Laderas Inestables. Barcelona. España. Recuperado de: http://www.igc.cat/pdf/pubtec/2011_2013/2013_janeras_et_al_experiencias.pdf

Jara, J., Lagos G. y Tilton, J. (2008). Using exploration expenditures to assess the climate for mineral investment. *Resources Policy*, Vol. 33, 179-187.

Jara, J.J. (2017). Determinants of Country Competitiveness in Attracting Mining Investments: An Empirical Analysis, Vol. 52, 65-71.

Jarrow, R. y Protter, P. (2004). *A short history of stochastic integration and mathematical finance: The early years, 1880–1970*. Cornell University, New York, EE.UU. Vol. 45, 75–91.

Juárez, G., Dodds, R., Echeverría, A., Guzmán, J. I., Recabarren, M., Ronda, J., y Vila-Echagüe, E. (2014). *Open Pit Strategic Mine Planning with Automatic Phase Generation*. GEM, Santiago, Chile.

Kamien, I. y Schwartz, L. (1978). Optimal Exhaustible Resource Depletion with Endogenous Technical Change. *The Review of Economic Studies*. Vol. 45, N° 1, 179-196.

Kamien, M. y Schwartz, N. (1991). *Dynamic Optimization – The calculus of variations and optimal control in economics and management*. Segunda edición, Elsevier Science B. V., Amsterdam, The Netherlands.

Kazakidis, V. (2001). *Operating Risk: Planning for Flexible Mining Systems*. The University of British Columbia, Vancouver, Canadá.

Kazakidis, V.N. y Scoble M. (2003). Planning for flexibility in underground mine production systems. *Mining Engineering, Amer. Inst. Min. Metall. Pet. Eng., SME*, 55,8, 33-39.

Kennedy, J. O. S. (1986). *Dynamic Programming. Applications to Agriculture and Natural Resources*. Springer Netherlands, Melbourne.

Kirschner, D., Lenhart, S., y Serbin, S. (1997). Optimal control of the chemotherapy of HIV. *Journal of Mathematical Biology*. Vol. 35, 775-792.

Kneese, A. y Sweeney, J. (1993). *Handbook of Natural Resource and Energy Economics. Volumen 3*, North Holland, Amsterdam, Holanda.

Knight, F. (1921). *Risk, uncertainty and profit*. Sentry Press, Nueva York, USA.

Kodukula P. y Papudesu C. (2006). *Project valuation using real options, a practitioner's guide*. J. Ross Publishing, Inc.

Kot, M. (2014). *A first course in the Calculus of Variations*. Board Press, Estados Unidos. The First Variation. 27-46.

Krasnov, M., Makarenko, G. y Kiseliiov, A. (1976). *Cálculo variacional (ejemplos y problemas)*. MIR, Madrid, España. Extremo de funcionales, 26-157.

Krautkraemer, J. (1988). The cut-off grade and the theory of the extraction. *Canadian Journal of Economics*. Vol. 21, N° 1, 146-160.

Krautkraemer, J. (1998). Nonrenewable Resource Scarcity. *Journal of Economic Literature*. Vol. 36, N° 4, 2065- 2107.

Krzak, M. (2013). The evaluation of an ore deposit development prospect through application of the "games against nature" approach. *Asia-Pacific Journal of Operational Research (APJOR)*, vol. 30, N° 6, 1-18.

Kulatilaka, N. y Marcus, A.J. (1992). Project Valuation under Uncertainty: When does DCF fail?. *Journal of Applied Corporate Finance*, Vol. 5, Issues 3, 92–100.

Kurmyshev, E. y Sánchez-Yáñez, R. (2003). *Fundamentos de métodos matemáticos para Física e Ingeniería*. Ed. Limusa, Ciudad de México, México.

Kydland, F. y Prescott E. (1982). Time to Build and Aggregate Fluctuations. *Econometrica*. Vol. 50, N° 6, 1345-1370.

Labys, W.C. (1999). Metal prices and the business cycle. *Resources Policy*. Vol 25, 229-238.

Laibson, D. (2011). Value matching and smooth pasting in optimal stopping problems. *Economics Lecture*, Harvard University, Cambridge, Massachusetts, EEUU.

Lane, K. (1964). Choosing the optimum cut-off grade. *Colorado School of Mines Quarterly*, Vol. 59, 811-824.

Lane, K. F. (1988). *The economic definition of ore: cut-off grades in theory and practice*. Mining Journal Books, Londres.

Lasserre, P. (1985). Capacity Choice by Mines. *The Canadian Journal of Economics / Revue Canadienne d'Economique*. Vol. 18, N° 4.

Laubscher, D. (1994). Cave mining – the state of the art. *Journal of the South African Institute of Mining and Metallurgy*. Vol. 94, N°10, 279–293.

Laughton, D. (2007). *The Banff Taxonomy of Asset Valuation Methods: Lessons from Financial Markets for Real Asset Valuation in the Upstream Petroleum Industry*. Retrieved March 22, 2010, de http://www.davidlaughtonconsulting.ca/docs/banff_taxonomy.pdf.

Lautier, D. (2005). Term structure models of commodity prices: a review. *Journal of Alternative Investments*, Vol. 8, 42–64. Recuperado en: <http://basepub.dauphine.fr/handle/123456789/5465>

Lefebvre, M. (2000). *Applied Stochastics Processes*. Montreal, Canadá.

Leite, R. y Dimitrakopoulos, A. (2009). Production scheduling under metal uncertainty-Application of stochastic mathematical programming at an open pit copper mine and comparison to conventional scheduling. Perth, Australia.

Lemelin, B., Sabour, S. y Poulin, R. (2006). Valuing mine at raglan using real options. *Internal Journal Mining Reclamation and Environment*. Vol. 20, 46–56.

Lenhart, S. y Workman, J. (2007). *Optimal control of biological models*. Chapman and Hall/CRC Publishers, Florida, USA.

Lerchs, H. y Grossman, I., 1965. Optimum design of open-pit mines. *Transactions C.I.M.*, Vol. 68, 17-24.

Ley N° 20.469 (2010). *Diario Oficial de la República de Chile*, Santiago, Chile.

Ley N° 20.551. *Diario Oficial de la República de Chile*, Santiago, Chile, 14 de marzo de 2015.

Liberzon, D. (2012). *Calculus of variations and optimal control theory*. Princeton University Press, Princeton, Estados Unidos. 17

Liski, M. y Montero, J.-P. (2007). Forward trading in exhaustible-resource oligopoly. *Resources and Energy Economics*. Vol. 37, 122-146.

López, C. (1986). *Apuntes de Proyectos de Ingeniería*. E.T.S.I Ing de Minas.

Mackenzie, B.W. (1982). *Economic Guidelines for Exploration Planning*. Queen`s University, Kingston, Ontario, Canadá.

Macklin, R. y Thompson, P. (2010). *The big fella: The rise and rise of BHP Billiton*. Random House, Australia.

Majd, S. y Pindyck, R. (1987). Time to Build, Option Value, and Investment Decisions. *Journal of Financial Economics*. Vol. 18, Nº 1, 7-27.

Majd, S. y Pindyck, R.S. (1989). The Learning Curve and Optimal Production Under Uncertainty. *Rand Journal of Economics*. Vol. 20, 331–343.

Mangel, M. (1985). *Decision and Control in Uncertain Resource Systems*. Mathematics in Science and Engineering. Vol. 172.

Mankiw, G. (2012). *Principles of Economics*. South-Western, Sexta edición. ISBN: 978-0-568-45305-9.

Martínez, J. y Villalón, J. (2003). *Introducción al cálculo estocástico aplicado a la modelización económico-financiero-actuarial*. Netbiblo, Oleiros, España.

Marvasti, A. (2013). The role of price expectations and legal uncertainties in ocean mineral, exploration activities. *Resources Policy*. Vol. 38, Nº 1, 68-74.

Mascareñas, J. (1999). *Opciones Reales en la Valoración de Proyectos de Inversión*. Universidad Complutense de Madrid, España.

Mascareñas, J. (2016). *Productos Financieros Estructurados*. Monografías de Juan Mascareñas sobre Finanzas Corporativas. Nº 28. ISSN: 1988-1878. Recuperado en: <http://www.juanmascarenas.eu/monograf.html>

Mauboussin, M. J. (1999). *Get Real: Using Real Options in Security Analysis*. *Frontiers of Finance*. Credit Suisse First Boston Corporation Equity Research. Vol. 10, 2-27.

Mayer, Z. y Kazakidis, V. (2007) Decision Making in Flexible Mine Production System Design Using Real Options. *Journal of Construction Engineering and Management*. Vol. 133, 169-180.

McDonald, R. & Siegel, D. (1986). Investment and the Valuation of Firms When There is an Option to Shut Down. *International Economic Review*. Vol. 26, N° 1, 331-349.

Méndez, X. (2013). Optimización en la recuperación metalúrgica de molibdeno, Planta I Las Tórtolas, División Los Bronces-Angloamerican. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile.

Meyer, C. (1985). Ore metals through geologic history. *Science*. Vol. 227, N° 4693, 1421-1428.

Mijáilov, P. (1978). Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Editorial Mir, Moscú, Rusia.

Minería Chilena (2017). Codelco creará minera en Ecuador, explora dos proyectos en Brasil y busca ingresar a Mongolia.

Ministerio de Minería (2004). Reglamento de Seguridad Minera. Decreto Supremo N°132. Diario Oficial de la República de Chile. Recuperado de: http://www.sernageomin.cl/pdf/mineria/seguridad/reglamentos_seguridad_minera/DS132_Reglamento_SEGMIN.pdf

Mitchel, I. (2008). Hamilton-Jacobi-Bellman Equation. Recuperado de: <http://www.cs.ubc.ca/~mitchell/Class/CS532M.2007W2/Talks/hjbSham.pdf>

Moel, A. y Tufano, P. (2002). When are real options exercised? An empirical study of mine closings. *Rev. Financ. Stud.* Vol. 15, 35–64.

Myers, S. (1977). Determinants of corporate borrowing. *Journal of Financial Economics*, Vol. 5, 147-175.

Myers, S. y Majd, S. (1983). Calculating the Abandonment Value Using Options Pricing Theory. Sloan School of Management, MIT, MA, Estados Unidos.

Neingo, P.N., Tholana, T. y Nhlenko, A.S. (2018). A comparison of three production rate estimation methods on South African platinum mines. *Resources Policy*, por aparecer.

Newman, A. M., Rubio, E., Caro, R., Weintraub, A. y Eurek, K (2010). A Review of Operations Research in Mine Planning. *Interfaces*. Vol. 40, N° 3, 222–245.

Nicholson, W. (2001). *Microeconomía Intermedia y sus Aplicaciones*. Octava Edición. McGraw-Hill Interamericana, Bogotá.

Nicholson, W. (2004). Teoría microeconómica: principios básicos y ampliaciones. Thompson, Australia.

Novo Lítio (2017). Lithium supply and demand. Recuperado en: <https://www.dakotaminerals.com.au/lithium/lithium-supply-demand>

Osserman, R. (1986). A survey of minimal surfaces. Segunda edición. Dover, Nueva York.

Otto, J., Andrews, C., Cawood, F., Doggett, M., Guj, P., Stermole, F., Stermole, J. y Tilton, J. (2006). Mining royalties – a global study of their impact on investors, government, and civil society. The World Bank, Washington, DC.

Oyarzún, J. (2007). El Modelo IOCG y el Potencial de Exploración Cuprífera de la Cordillera de la Costa del Norte de Chile.

Paish, G. (1938). Causes of changes in gold supply. *Económica*. Vol. 5, 379-409.

Pearce, D. y Turner, R. (1995). Economía de los recursos naturales y del medio ambiente. Colegio de Economistas de Madrid. Celeste Ediciones, Madrid. 1-448.

Pesch, H. J., y Plail, M. (2009). The maximum principle of optimal control: a history of ingenious ideas and missed opportunities. *Control and Cybernetics*. Vol. 38, 973-995.

Pindyck, R. (1978). The Optimal Exploration and Production of Nonrenewable Resources. *The Journal of Political Economy*. Vol. 86, N° 5, 841-861.

Pindyck, R. (1980). Uncertainty and Exhaustible Resource Markets. *Journal of Political Economy*. Vol. 88, N° 6, 1203-1225.

Pindyck, R. (1981). The Optimal Production of an Exhaustible Resource When Price Is Exogenous and Stochastic. *The Scandinavian Journal of Economics*. Vol. 83, N° 2, The Impact of Rising Oil Prices on the World Economy (1981), 277-288.

Pindyck, R. (1984). Uncertainty in the Theory of Renewable Resource Markets. *The Review of Economic Studies*. Vol. 51, N° 2, 289-303.

Pindyck, R. (1993). Investments of uncertain cost. *Journal of Financial Economics*. Vol. 34, N° 1, 53-76.

Pindyck, R. y Rotemberg, J. (1990). The excess co-movement of commodity prices. *The Economic Journal*. Vol. 100, 1173-1189.

Pohl, W.L. (2011). Economic geology principles and practice – metals, minerals, coal and hydrocarbons – introduction to formation and sustainable exploitation of mineral deposits. Blackwell Publishing, Noida, India.

Polasky, S. (1996). Exploration and Extraction in a Duopoly-Exhaustible Resource Market. The Canadian Journal of Economics, Vol. 29, N° 2, 473-492.

Portal Minero (2014). Codelco Andina logra ángulos de taludes de 58° en rajo. Consultado el 30 de junio. Recuperado en: <http://www.portalminero.com/pages/viewpage.action?pageId=89634658>

PwC. (2016). Compare Mining Taxes. Consultado el 22 de junio de 2016. Recuperado en: <http://www.pwc.com/gx/en/industries/energy-utilities-mining/mining/tax/data-tool.html>

Radetzki, M (2009). The anatomy of three commodity booms. Resources Policy. Vol. 31, 56-64.

Radner, R. (1963). Notes on the theory of economic planning (No. TR9). CALIFORNIA UNIV BERKELEY, California.

Ramírez, F. (1987). Application of optimal control theory to enhanced oil recovery. Elsevier, Amsterdam, Holanda.

Rendu, J. M. (2002). Geostatistical simulations for risk assessment and decision making: the mining industry perspective. International Journal of Surface Mining, Reclamation and Environment. Vol. 16, 122-133.

Revista Minería Chilena Online (2017). Cartera de proyectos de inversión paralizada por consulta indígena suma USD7.527 millones. Consultado el 29 de junio de 2017. Recuperado en: <http://www.mch.cl/2017/06/16/cartera-proyectos-inversion-paralizada-consulta-indigena-suma-us7-527-millones/>

Robjohn (2011). A circle with infinite radius is a line. Consultado el 23 de junio del 2016. Recuperado en: <http://math.stackexchange.com/questions/82220/a-circle-with-infinite-radius-is-a-line>

Roques, F. (2008). Fuel mix diversification incentives in liberalized electricity markets: A mean-Variance Portfolio theory approach. Energy Economics, Vol. 30, 1831-1849.

Rossi, M. y Deutsch, C. (2014). Mineral resource estimation. Springer, Dordrecht, Holanda.

Rudloff, B. (2013). Metodología de valorización con opciones reales de secuenciamiento minero bajo incertidumbre. Repositorio Universidad de Chile. Recuperado de: <http://repositorio.uchile.cl/handle/2250/113869>

Sabour, S. (2001). Dynamics of threshold prices for optimal switches: the case of mining. *Resources Policy*, Vol. 27, 209–214.

Sabour, S. (2002). The option to improve the recovery of a mill plant: when it should be exercised?. *Miner. Eng.*, Vol. 15, 197–199.

Samis, M., Davis, G. y Laughton, D. (2007). Using stochastic discounted cash flow and real option Monte Carlo simulation to analyse the impacts of contingent taxes on mining projects. AusIMM, Carlton, Australia, 127–137.

Samuelson, P. (1941). The Stability of Equilibrium: Comparative Statics and Dynamics. *Econometrica*, Vol. 9, N° 2, 97-120.

Sánchez, B. y Cristián, M. (2011). Acciones de las Empresas Mineras en el Ciclo de Precios de Commodities. Tesis para optar al grado de magíster en economía aplicada. Recuperado de: http://www.tesis.uchile.cl/tesis/uchile/2011/cf-sanchez_cb/html/index-frames.html

Santander, M. (1998) Introducción al Cálculo Variacional, Universidad de Física Teórica, Universidad de Valladolid. Tercera edición. 8-32. España.

Sanz, G., Rodríguez, J., Pascual, R., Pantoja, L., Fernández-Cañadas, J.A., Miquel, E. y García-Cabarga, J.A. (2013). Guía para la observación nivo-meteorológica. Agencia estatal de meteorología. Gobierno de España.

Sasser, J. (1992). History of Ordinary Differential Equations: the First Hundred Years. University of Cincinnati, Cincinnati, Estados Unidos.

Savolainen, J. (2016). Real Options in Metal Mining Project Valuation: Review of literature. *Resources Policy*, Vol. 50, Issue C, 49-65.

Schaake, J., Hamill, T., Buizza, R., y Clark, M. (2007). Hepex, The Hydrological Ensemble Prediction Experiment. *B. Am. Meteorol. Soc.*, Vol. 88, 1541-1547.

Schättler, H. y Ledzewicz, U. (2010). Geometric optimal control: theory, methods and examples. Springer Verlag, Berlin-Heidelberg, Alemania.

Schmidt, J., Turek, G., Clark, M., Uddstrom, M., y Dymond, J. (2008). Probabilistic forecasting of shallow, rainfall-triggered landslides using real-time numerical weather predictions. *Natural Hazards and Earth System Sciences*, Vol. 8, 349-357.

Schodde, R. (2013). The impact of the changes in the gold price on exploration activities and strategies. NewGenGold Conference, Perth, Noviembre 2011 (2013) www.minexconsulting.com

Schodde, R. (2014). Discovery performance for gold and base metals in the Pacific/South-East Asia, UWA (2014) March 2014 www.minexconsulting.com.

Schöne, M. (2014). Real Options Valuation: The Importance of Stochastic Process Choice in Commodity Price Modelling. (Springer Gabler, Ed.), *Statewide Agricultural Land Use Baseline 2015*, Vol. 1. Vallendar, Alemania.

Seierstad, A. y Sydsaeter, K. (1987). *Optimal control theory with economics applications*. Elsevier North-Holland, Amsterdam, Países Bajos, Vol. 26.

Sernageomin (2014). Potencial de litio en salares del Norte de Chile. Santiago, Chile.

Sernageomin (2015). Anuario de la minería de Chile 2015. Ministerio de Minería, Gobierno de Chile, 1-253.

Servicio de Impuestos Internos. Circular N°74 (2010). Instrucciones sobre el impuesto específico a la renta operacional de la actividad minera, de acuerdo a lo dispuesto en los artículos 64 bis y 64 ter, de la ley sobre impuesto a la renta, conforme a las modificaciones introducidas por la ley 20.469, de 2010 (en línea). Santiago, Chile. Consultado el 20 junio 2016. Recuperado de: <http://www.sii.cl/documentos/circulares/2010/circu74.htm>.

Sethi, S. y Thompson, G. (2005). *Optimal control theory: applications to management science and economics*. Springer, EE.UU.

Shingareva, I. y Lizárraga-Celaya, C. (2010). Ecuaciones diferenciales parciales no lineales: separación de variables, soluciones simbólicas. Universidad de Sonora, México.

Shinkuma, T. (2000). A generalization of the Cairns-Krautkraemer model and the optimality of the mining rule. *Resource and Energy Economics*. vol. 22, 147-160.

Shinkuma, T. y Nishiyama, T. (2001). The grade selection rule of the metal mines; and empirical study on copper mines. *Resources Policy*, Vol. 26, N° 1, 31-38.

Shone, R. (2002). *Economic Dynamics, Phase Diagrams and their Economic Application*. Cambridge University Press.

Silver, D. y varios autores. (2016). *Mastering the game of Go with deep neural networks and tree search*. *Nature*, Vol. 529, 484-489.

Simmons, A., y Hollingsworth, A. (2002). *Some aspects of the improvement in skill of numerical weather prediction*. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, Vol. 128, 647-677.

Simon, H. A. (1956). *Rational choice and the structure of the environment*. *Psychological Review*, Vol. 63, N° 2, 129-138.

Singer, D.A. (2017). *Future Copper Resources*. *Ore Geology Reviews*, Vol. 89, 271-279.

Slade, M. (1988). *Grade Selection under Uncertainty: Least Cost Last and Other Anomalies*. *Journal of Environmental Economics and Management* 15, 189-205.

Slade, M. (2001). *Valuing managerial flexibility: an application of real-option theory to mining investments*. *J. Environ. Econ. Manag.* Vol. 41, 193–233.

Slade, E. y Thille, H. (2009). *Whither Hotelling: Tests of the Theory of Exhaustible Resources*. *Annual Review of Resource Economics*, Vol. 1, 239-260.

Sniedovich, M. (2010). *Dynamic programming: foundations and principles*. CRC press, Melbourne, Australia.

SNL Metals & Mining (2016). *Tendencias Mundiales en exploración*. Documento publicado en página web de la compañía.

Sonami. (2016). *Precio histórico del Cobre*. Recuperado de: http://www.sonami.cl/index.php?option=com_content&view=article&id=224&Itemid=117

Stan, D. (2014). *Nonlinear and Nonlocal Diffusion Equations*. Universidad Autónoma de Madrid, España.

Spittales, S. y Hilgert, F. (2009). *Are Congo's mines the main target of the armed group on its soil? The economics of Peace and Security Journal*. Vol. 4, N°1, 55-61.

Stein, J. (2009). *Application of Stochastic Optimal Control to Financial Market Debt Crises*. Brown University, EE.UU. Center for Economic Studies and Ifo Institute, Brown University, Working Paper N° 2359. EE.UU.

Stringer, C. y Galway-Witham, J. (2017) On the origin of our species. *Nature*, Vol. 546 (junio), 212-213.

Strotz, R. H. (1955-1956). Myopia and inconsistency in dynamic utility maximization. *The Review of Economic Studies*, Vol. 23, N° 3, 165-180.

Suárez, A., Krzemien, A. Riesgo, P. (2015). Investment in new tungsten mining projects. *Resources Policy*, Vol. 46, 177-190.

Sunkpho, J., y Ootamakorn, C. (2011). Real-time flood monitoring and warning system. *Songklaounakarin Journal of Science and Technology*, Vol. 33, 227-235.

Taylor, H.K. (1986) Rates of working mines; a simple rule of thumb. *Transactions of the Institution of Mining and Metallurgy*, Vol. 95, section A, 203-204.

Tilton, J. (2002). *Creating Wealth and Competitiveness in Mining*. Colorado School of Mines, Working Paper, EE.UU.

Tilton, J.E. (2002). Long-Term Trends in Copper Prices. *Mining Engineering*, 25-32.

Tilton, J.E. (2003). On borrowing time: Assessing the threat of mineral depletion. *Resources for the Future*, Washington, EE.UU.

Tilton, J.E. y Guzmán, J.I. (2016). *Mineral economics and policy*. Resources for the Future Press, New York, EE.UU.

Todhunter, I. (1861). *The History Of The Calculus Of Variations During The Nineteenth Century*. MacMillan and Co, Londres, Reino Unido.

Uhlmann, J. (2015). Global optimum cut-off grade strategy derivation using optimal control theory. Tesis de Magíster, Escuela de Ingeniería, Pontificia Universidad Católica de Chile, Santiago, Chile.

USGS (2016). *Mineral Commodity summaries 2016*. Virginia, EE.UU.

Venegas, F. (2008). *Riesgos Financieros y Económicos: Productos Derivados Y Decisiones Económicas Bajo Incertidumbre*. Segunda edición. Cengage Learning, México, D. F., México

Verhulst, P. F. (1838). Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement. *Correspondance Mathématique et Physique*, Vol. 10, 113-121.

Weber, T. (2011). *Optimal control theory with applications in economics*. The MIT Press, Estados Unidos.

White, D. J. (1969). Dynamic programming. California, EE.UU.

Wikipedia (2016a). Brownian motion. (2016). Recuperado el 22 de junio de 2016 de https://en.wikipedia.org/wiki/Brownian_motion.

Wikipedia (2016b). Levy Process. Recuperado el 30 de junio de 2016 en https://en.wikipedia.org/wiki/L%C3%A9vy_process.

Wikipedia (2016c). Ruslan Stratonovich. Recuperado el 22 de junio de 2016 de https://en.wikipedia.org/wiki/Ruslan_Stratonovich.

William F. (1997). Numerical Method for Partial Differential Equations. Academic Press, New York, EE.UU.

Winter, J. (1998). Investment and exit decisions at the plant level: A dynamic programming approach. Springer Science & Business Media, Mannheim, Alemania.

Woodhouse, R. (2004). A History of the Calculus of Variations in the Eighteenth Century. American Mathematical Society, Providence (RI), EE.UU.

Zhang, W.-B. (2005). Differential Equations, Bifurcations, and Chaos in Economics. London: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, Londres.