gradivo.hr

Online skripta

MATEMATIKA B

Matematika B - online skripta za maturu

www.gradivo.hr
Izdano: 07. 02. 2025.
*dokument izdajemo jednom mjesečno

Sadržaj

1. BROJEVI
- Skupovi brojeva 4
- Brojevni pravac 11
- Omjeri, postoci, apsolutna vrijednost i aritmetička sredina 14

2. POTENCIJE
- Potencije 17

3. ALGEBARSKI IZRAZI
- Algebarski izrazi 20
- Algebarski razlomci 24

4. LINEARNE JEDNADŽBE I NEJEDNADŽBE
- Intervali 26
- Linearne jednadžbe 28
- Linearne nejednadžbe 31

5. KOORDINATNI SUSTAV
- Kartezijev koordinatni sustav 33

6. LINEARNA FUNKCIJA
- Linearna funkcija 36
- Sustav linearnih jednadžbi 44

7. TROKUTI
- Trokut 47
- Pravokutni trokut 51
- Sukladnost i sličnost 53
- Trigonometrija u pravokutnom trokutu 56
- Kut 58

8. ČETVEROKUTI
- Kvadrat i pravokutnik 63
- Romb, paralelogram i trapez 66

9. MNOGOKUTI
- Mnogokuti 69

10. PODATCI
- Prikazivanje i analiziranje podataka 72

11. KVADRATNA FUNKCIJA
- Kvadratna jednadžba 79
- Kvadratna funkcija 81
- Kvadratne nejednadžbe 86

12. TRIGONOMETRIJA TROKUTA
- Trigonometrija trokuta 88

13. KRUŽNICA I KRUG
- Kružnica i krug 92

14. POLIEDRI
- Prizme 98
- Kocka i kvadar 101
- Piramide 105

15. ROTACIJSKA TIJELA
- Valjak 109
- Stožac 111
- Kugla 113

16. KORIJENI
- Korijeni 114

17. EKSPONENCIJALNA I LOGARITAMSKA FUNKCIJA
- Eksponencijalna funkcija 116
- Logaritamska funkcija 118
- Računanje s logaritmima 120
- Eksponencijalne i logaritamske jednadžbe 122

18. VEKTORI
- Vektori i skalari 124
- Vektori u koordinatnom sustavu 126
- Računanje s vektorima 128

19. PRAVAC
- Jednadžba pravca 133
- Svojstva pravca 136

20. NIZOVI
- Pojam niza 139
- Aritmetički niz 141
- Geometrijski niz 142

21. FUNKCIJE
- Pojam funkcije 143
- Svojstva funkcija 148

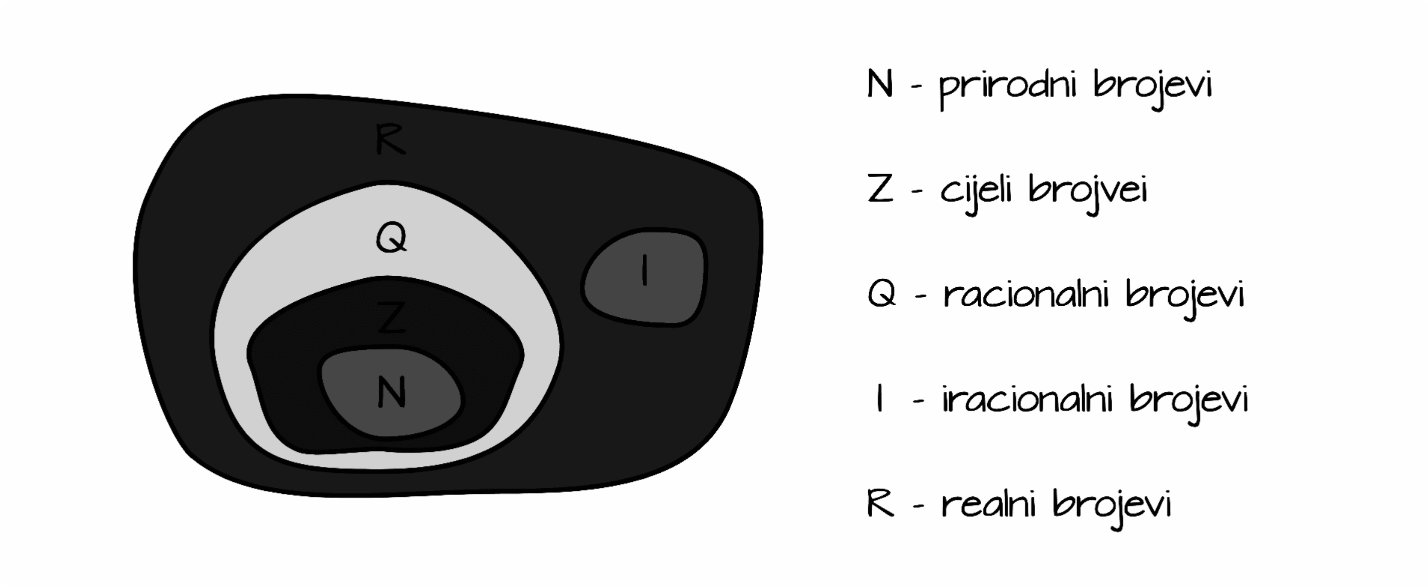
22. VJEROJATNOST
- Vjerojatnost 151

Online skripte by gradivo.hr

> Idealna skripta za svakoga! Pronađi objašnjenja svih gradiva, ilustracije, formule i tablice. Sve je napisano jednostavnim jezikom i sažeto tako da možeš u sekundi doći do informacije koju trebaš!
>
> Slobodno podijeli i s drugima! Naše skripte su uvijek bile i uvijek će ostati besplatne. To je naš mali doprinos svim srednjoškolcima!

Skupovi brojeva

Skup možemo shvatiti kao bilo kakvu kolekciju različitih objekata. Članove koji tvore skup zovemo elementima skupa.



Prirodni brojevi su oni brojevi do kojih možemo doći kada krenemo brojati od 1 na dalje, dakle 1, 2, 3, 4, ...

$$N = \{1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots\}$$

Cijeli brojevi su svi prirodni brojevi, nula i svi prirodni brojevi s minusom ispred.

$$Z = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Racionalni brojevi su oni brojevi koje možemo zapisati u obliku razlomka, npr. $\frac{m}{n}$, gdje je m cijeli broj, a n prirodan broj različit od 0.

$$Q = \left\{-\frac{3}{2}, -0.5, \ldots, \frac{1}{2}, 7, 5\right\}$$

Iracionalni brojevi su oni brojevi koji imaju beskonačan neperiodični decimalni zapis, tj. oni brojevi koje ne možemo napisati kao razlomak $\frac{m}{n}$, gdje je m cijeli, a n prirodan broj.

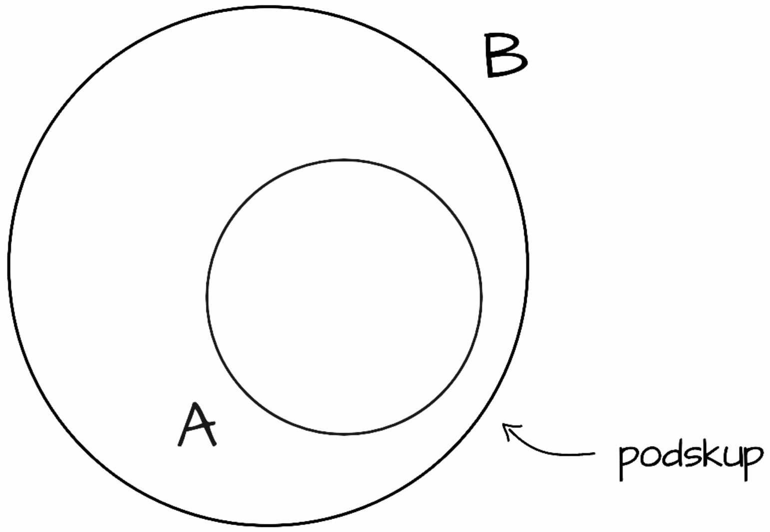
$$I = \left\{-\sqrt{2}, \ldots, \log_2 5, \tau, 4, 5142\ldots\right\}$$

Realni brojevi su oni brojevi koji su ili racionalni ili iracionalni.

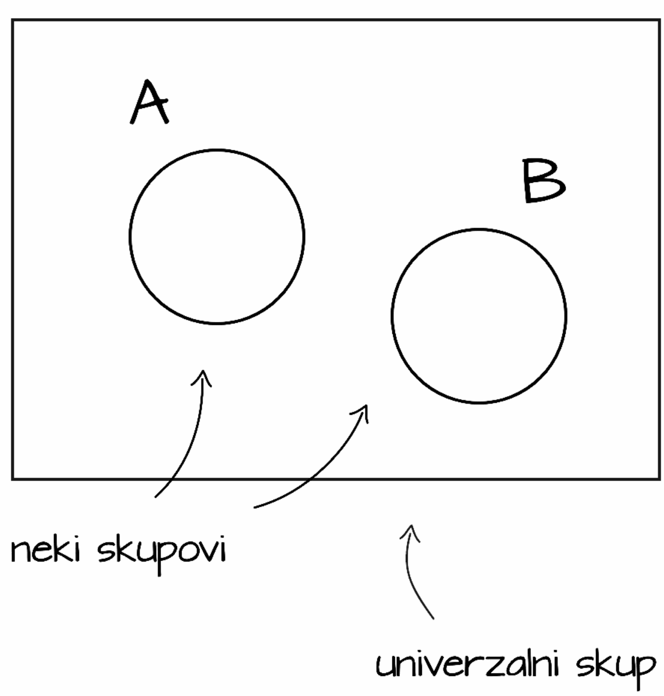
$$R = Q \cup I$$

Računske operacije među skupovima

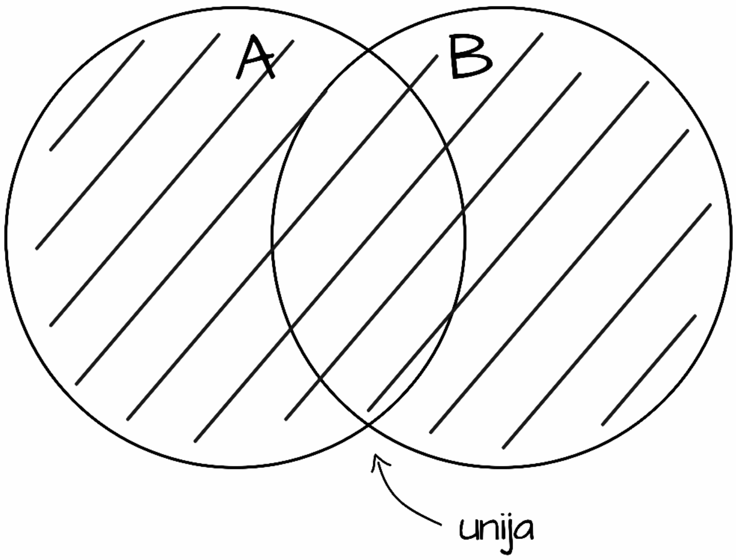
Kažemo da je skup A podskup skupa B ako je svaki element skupa A ujedno i element skupa B.
Pišemo $A \subseteq B$.



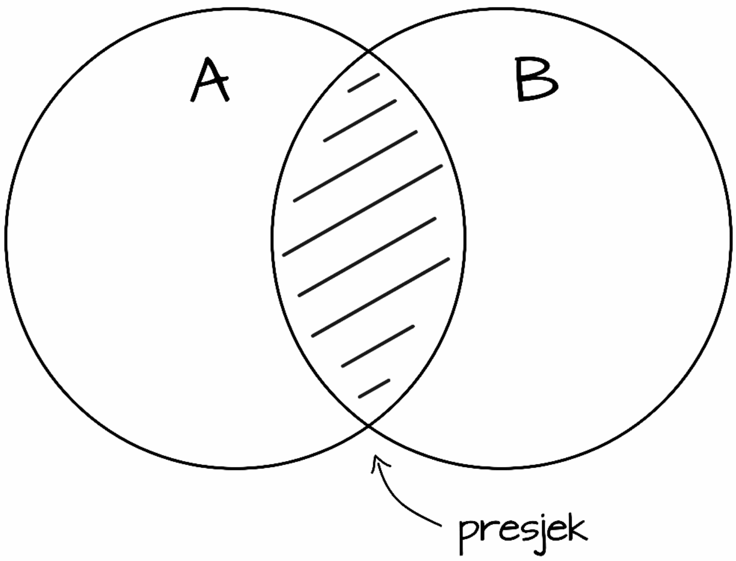
Ako unutar nekog skupa U promatramo odnose među njegovim podskupovima, skup U zovemo univerzalni skup.



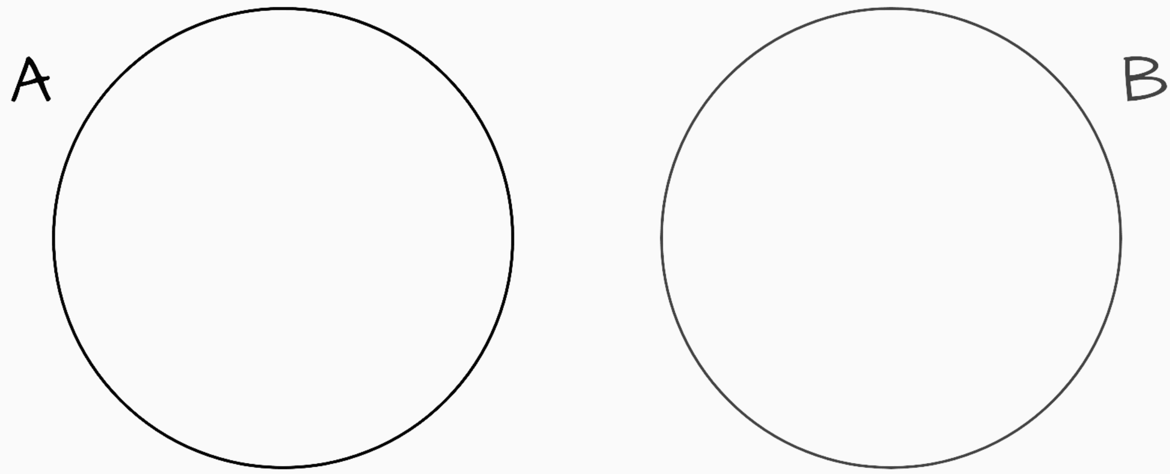
Unija skupova A i B, oznake $A \cup B$, je skup koji sadrži sve elemente koji pripadaju bilo kojem od skupova A ili B.



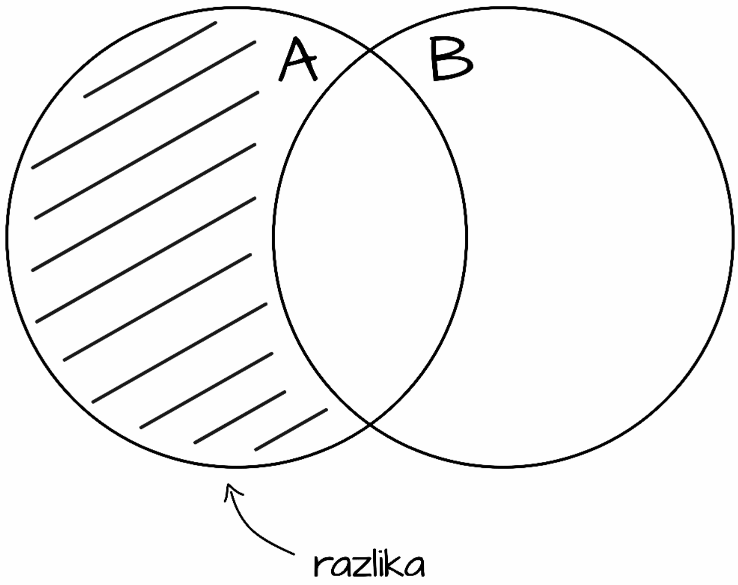
Presjek skupova A i B, oznake $A \cap B$, je skup koji sadrži sve elemente koji se nalaze i u skupu A i u skupu B.



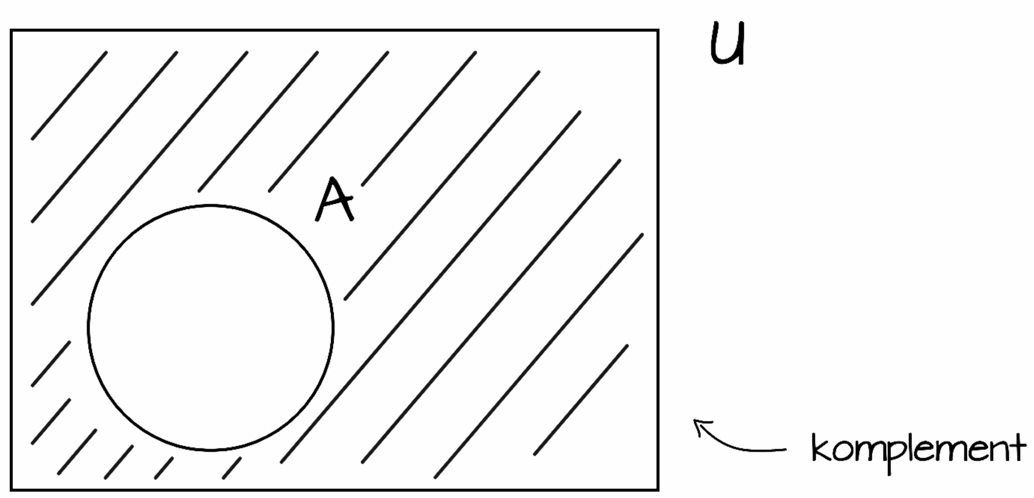
Ako skupovi A i B u presjeku nemaju zajedničkih elemenata, kažemo da su oni disjunktni skupovi.



Razlika skupova A i B, oznake $A \backslash B$, je skup koji sadrži sve elemente koji se nalaze u skupu A, ali nisu u skupu B.



Neka je $A \subseteq U$. Komplement skupa A je skup koji sadrži sve elemente univerzalnog skupa U koji se ne nalaze u skupu A. Oznaka je A^C.



Kardinalni broj skupa je broj elemenata u skupu. Drugim riječima, to je broj članova ili broj vrijednosti koliko imamo u skupu. Oznaka je $card(S)$, za neki skup S.

Skup bez elemenata zovemo prazan skup. Oznaka je $\varnothing$.

Prisjetimo se sljedećih pojmova.

Prosti i složeni brojevi

Prirodne brojeve možemo podijeliti na proste i složene.

Prosti brojevi su oni brojevi koji su djeljivi samo s 1 i sa samim sobom. Dakle, imaju točno dva djelitelja. Takvi su npr. $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 \ldots$

Složeni brojevi su oni koji nisu prosti, odnosno oni brojevi koji imaju više od dva djelitelja. Takvi su $4, 6, 8, 9, 10, 12, \ldots$

Broj 1 nije niti prost niti složen broj.

Najveći zajednički djelitelj i najmanji zajednički višekratnik

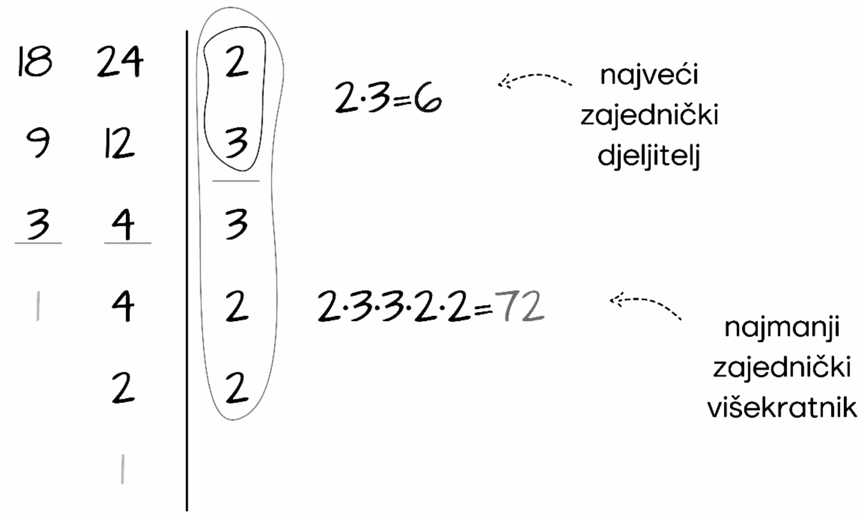
Najveći zajednički djelitelj brojeva a i b, pod oznakom $\operatorname{nzd}(a, b)$, je najveći broj koji je djelitelj i broja a i broja b.

Najveći zajednički djelitelj dvaju brojeva dobijemo tako da istodobno oba broja dijelimo njihovim zajedničkim prostim djeliteljima dok je to moguće. U trenutku kada to više nije moguće, postupak je gotov. Umnožak tako dobivenih faktora je najveći zajednički djelitelj.

Najmanji zajednički višekratnik brojeva a i b, pod oznakom $\operatorname{nzv}(a, b)$, je najmanji broj koji je višekratnik i broja a i broja b.

Najmanji zajednički višekratnik dvaju brojeva dobijemo tako da istodobno oba broja dijelimo njihovim zajedničkim prostim djeliteljima dok je to moguće. Zatim svaki od brojeva zasebno rastavljamo dalje na proste faktore dok ne dobijemo broj 1. Umnožak svih tih faktora je najmanji zajednički višekratnik.

Najbolje ćemo objasniti na primjeru: nađimo $\operatorname{nzd}(18, 24)$ i $\operatorname{nzv}(18, 24)$.



Dijeljenje s ostatkom

Teorem o dijeljenju s ostatkom: Za proizvoljni prirodan broj a i cijeli broj b postoje jedinstveni cijeli brojevi q i r takvi da je $b = qa + r$, gdje je $0 \leq r < a$.

U teoremu q predstavlja najveći cijeli dio kvocijenta b/a, a r ostatak pri dijeljenju.

Zapis racionalnih brojeva

Rekli smo da su racionalni brojevi su oni brojevi koje možemo zapisati u obliku razlomka npr. $\frac{m}{n}$ te se takav zapis zove razlomački zapis. Međutim, ako podijelimo broj m brojem n dobit ćemo decimalni zapis.

Prisjetimo se:

- 1.235 konačni decimalni zapis
- $1.235235235235... = 1.\dot{2}3\dot{5}$ periodički decimalni zapis
- $1.23535353535... = 1.2\dot{3}\dot{5}$ mještovito periodički decimalni zapis

Također, možemo i obratno, iz decimalnog zapisa doći u razlomački zapis. Objasnimo po gornjim slučajevima.

- decimalni broj koji ima konačan decimalni zapis pretvaramo u razlomak tako da u brojnik zapišemo taj broj bez decimalne točke, a u nazivnik pišemo broj 1 i dodajemo onoliko nula koliko ima decimalnih mjesta
- ako broj ima periodički decimalni zapis, u brojnik zapišemo taj broj bez decimalne točke te oduzmemo onaj broj koji predstavljaju znamenke koje se ne ponavljaju, a u nazivnik pišemo broj 9 onoliko puta koliko ima znamenki koje se ponavljaju
- ako broj ima mješovito periodički decimalni zapis, u brojnik zapišemo taj broj bez decimalne točke te oduzmemo onaj broj koji predstavljaju znamenke koje se ne ponavljaju, a u nazivnik pišemo broj 9 onoliko puta koliko ima znamenki koje se ponavljaju, zatim broj 0 onoliko puta koliko ima znamenki koje se ne ponavljaju, a nalaze se nakon decimalne točke

Najbolje ćemo uočiti na primjerima:

$$43.\underbrace{52679}_{5} = \frac{4352679}{1\underbrace{00000}_{5}}$$

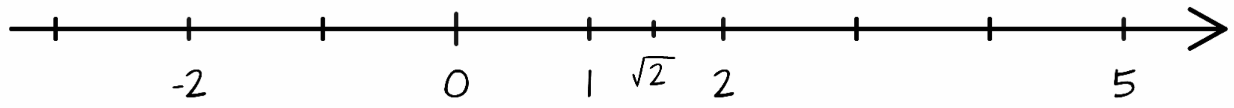
$$43.\underbrace{\dot{5}267\dot{9}}_{5} = \frac{4352636}{\underbrace{99999}_{5}} \quad = 4352679 - 43$$

$$43.\underbrace{52}_{2}\underbrace{\dot{6}7\dot{9}}_{3} = \frac{4348327}{\underbrace{999}_{3}\underbrace{00}_{2}} \quad = 4352679 - 4352$$

Ova skripta je free jer svi mi volimo besplatne stvari!
Ako želiš toga još, **skeniraj ovaj QR kod** i isprobaj besplatno ostale materijale na našoj stranici.

Brojevni pravac

Brojevni pravac je pravac na kojem je svakom realnom broju pridružena točno jedna točka.

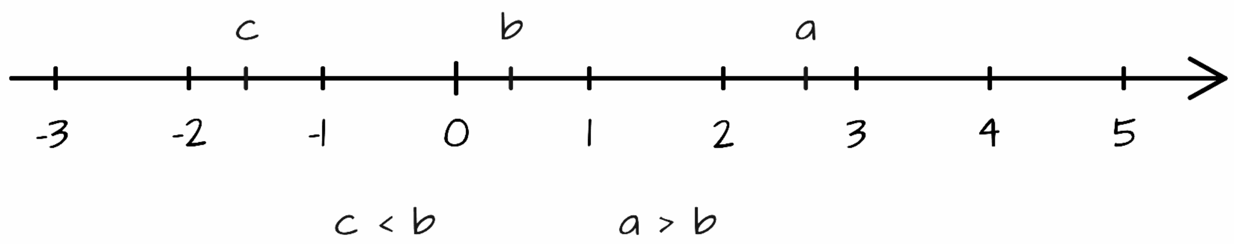


Na pravcu uvijek imamo točku ishodišta, oznake O, koja predočava nulu te definiranu jediničnu točku E, koja se nalazi na mjestu jedinice. Dužina od O do E, odnosno od 0 do 1 se zove jedinična dužina.

Uspoređivanje brojeva na pravcu

Ako se broj a nalazi desno od broja b na brojevnom pravcu, onda je broj a veći od broja b što zapisujemo kao $a > b$.

Ako se broj a nalazi lijevo od broja b na brojevnom pravcu, onda je broj a manji od broja b što zapisujemo kao $a < b$.



Uspoređivanje decimalnih brojeva

Prioritet uspoređivanja decimalnih brojeva:

1. Uspoređujemo cijeli dio decimalnog broja, odnosno ne gledamo brojeve iza decimalne točke.

2. Uspoređujemo znamenke iza decimalne točke, slijeva na desno. Čim naiđemo na znamenku koja je na nekom mjestu u jednom broju veća od znamenke na istom mjestu u drugom broju, odmah znamo da je taj broj veći.

$$2.23 \qquad 2.24$$

$$2 = 2$$

$$2.23 \qquad 2.24$$

$$2 = 2$$

$$2.23 \qquad 2.24$$

$$3 < 4$$

$$\underline{\underline{2.23 < 2.24}}$$

Zaokruživanje brojeva

Kod zaokruživanja brojeva, gledamo prvu znamenku koja se nalazi poslije mjesta na koje želimo zaokružiti broj.

Ako je ta znamenka manja od 5, broj prepisujemo do znamenke na koju trebamo zaokružiti.

$$2.273 = 2.27$$

$$2.27 \mid \underline{3}$$

$$3 < 5$$

$$2.27\cancel{3}$$

Ako je prva znamenka poslije mjesta na koje želimo zaokružiti 5 ili veća od 5, znamenku na mjestu na koje zaokružujemo povećavamo za 1.

$2.538 = 2.54$

$2.53|\underline{8}$

$8 \geq 5$

2.54

Omjeri, postoci, apsolutna vrijednost i aritmetička sredina

Omjer

Omjer brojeva a i b je rezultat dijeljenja tih brojeva, odnosno $a : b$. Čitamo "a naprema b".

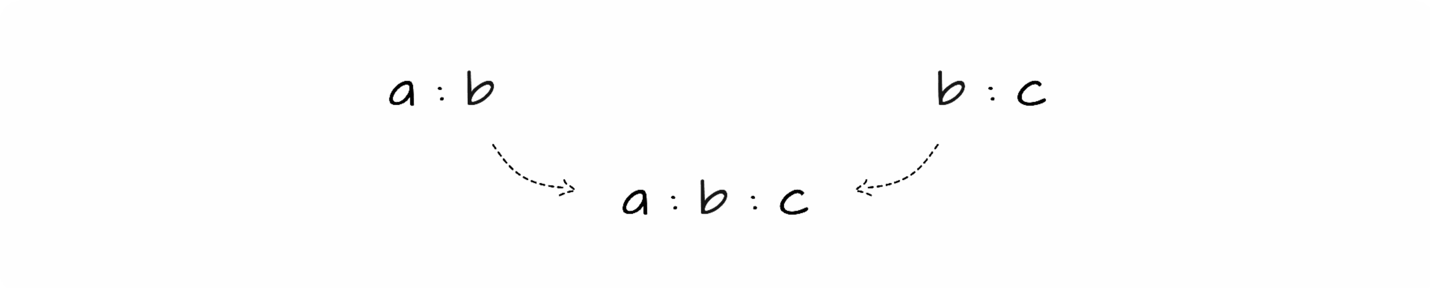
Kako je omjer zapravo dijeljenje, često ga zapisujemo i u obliku razlomka $\frac{a}{b}$.

$$a : b = \frac{a}{b}$$

Produljeni omjer

Produljeni omjer je kraći način na koji možemo zapisati više omjera gdje se drugi član jednog omjera poklapa sa prvim članom drugog omjera.

Za omjere $a : b$ i $b : c$ bi tada u obliku produženog omjera skraćeno napisali $a : b : c$.



Postotak

Postotak je stotina nekog broja, odnosno stoti dio tog broja. Također, možemo ga definirati i kao omjer nekog broja i broja 100 ili kao razlomak s nazivnikom 100. Do zapisa u decimalnom obliku dođemo tako da broj od kojeg računamo postotak podijelimo sa 100. Oznaka je $\%$, a čitamo "posto". Tako bi na primjer 43% pročitali kao "četrdeset i tri posto"

$$27\% = \frac{27}{100} = 0.27$$

Promil

Promil je, slično kao postotak, tisućina nekog broja, odnosno tisućiti dio tog broja. Također, možemo ga definirati i kao omjer nekog broja i broja 1000 ili kao razlomak s nazivnikom 1000. Do zapisa u decimalnom obliku dođemo tako da broj od kojeg računamo promil podijelimo sa 1000.

Oznaka je $‰$, a čitamo promil. Tako bi na primjer $522‰$ pročitali kao "petsto dvadeset i dva promila".

$$158‰ = \frac{158}{1000} = 0.158$$

Proporcionalnost

Proporcija ili razmjer je jednakost dvaju omjera. Za dvije veličine kažemo da su proporcionalne ako postoji zavisnost između njih, u smislu da povećanje jedne veličine uzrokuje povećanje druge i obrnuto. Veličine su proporcionalne ako je njihov omjer stalan broj $k, k \neq 0$. Veličine su obrnuto proporcionalne ako povećanje jedne uzrokuje smanjenje druge i obrnuto. Veličine su obrnuto proporcionalne ako im je umnožak stalan broj k.

$$a : b = c : d \dashrightarrow ad = bc$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \dashrightarrow ad = bc$$

Apsolutna vrijednost

Apsolutna vrijednost određuje veličinu broja bez obzira na predznak. Za broj x, apsolutna vrijednost se označava s $|x|$. U praksi, ona svaki broj prebacuje u pozitivan broj. Dakle, ako je $x \geq 0$, apsolutna vrijednost $|x|$ će biti upravo x. Ako je $x < 0$, onda će $|x|$ biti $-x$ (moramo pomnožiti s minusom ako želimo dobiti pozitivan broj jer je x negativan).

Apsolutna vrijednost suprotnih brojeva je isti broj.

ako je broj pozitivan ili 0
samo ga prepišemo

$$|5| = 5$$

$$|-5| = 5$$

ako je broj negativan
samo maknemo minus

Aritmetička sredina

Aritmetička sredina ili prosjek je broj koji računamo tako da zbroj svih vrijednosti koje promatramo podijelimo s brojem vrijednosti koje smo imali.

Formalno, za n brojeva $x_1, x_2, ..., x_n$, aritmetičku sredinu, u oznaci $\overline{x}$ računamo po formuli

x_1	x_2	x_3	x_4
5 cm	3 cm	5 cm	4 cm

$n = 4$

$$\overline{x} = \frac{5+3+5+4}{4}$$

$$\overline{x} = 4.25 \text{ cm}$$

POTENCIJE

Potencije

Potencija je skraćeni zapis za umnožak nekoliko istih brojeva. Konkretno, ako broj a množimo n puta sa samim sobom, zapisat ćemo a^n. Broj a zovemo bazom potencije, a n je eksponent.

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot a}_{n \text{ faktora}} = a^n$$

Pravila za računanje s potencijama

Potencije s eksponentima 0, 1, 2 i 3

$$a^0 = 1 \qquad a \cdot a = a^2$$

$$a^1 = a \qquad a \cdot a \cdot a = a^3$$

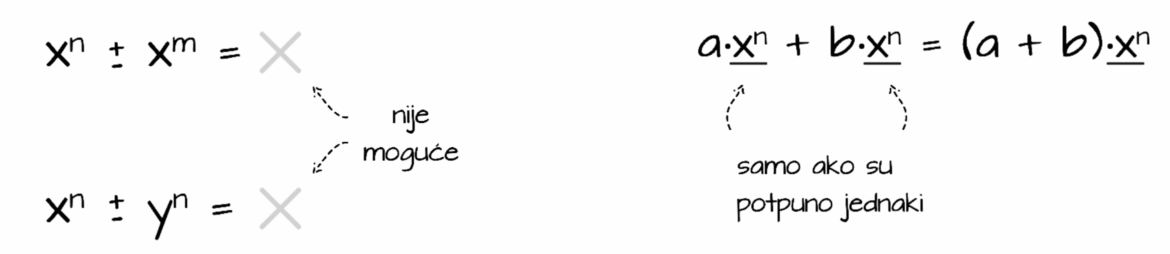
Potencije s negativnim eksponentom

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Zbrajanje jednakih potencija

$$\underbrace{a^n + a^n + \ldots + a^n}_{k \text{ članova}} = k \cdot a^n$$

Zbrajanje i oduzimanje potencija ("zbrojimo/oduzmemo brojeve ispred, a potenciju prepišemo"). Zbrajati i oduzimati možemo **samo iste** potencije, dakle i baza i eksponent moraju biti isti.



$$a \cdot x^n \pm b \cdot x^n = (a \pm b) \cdot x^n$$

Množenje i dijeljenje potencija istih baza radi se tako da "bazu prepišemo, a eksponente zbrojimo ili oduzmemo".

$$x^n \cdot x^m = x^{n+m}$$

$$\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$$

Kod množenja i dijeljenja s istim eksponentima "baze pomnožimo/podijelimo, a eksponent prepišemo".

$$x^n \cdot y^n = (xy)^n$$

$$\frac{x^n}{y^n} = \left(\frac{x}{y}\right)^n$$

Kod potenciranja "bazu prepišemo, a eksponente pomnožimo".

$$(x^n)^m = x^{nm}$$

Znanstveni zapis broja

Znanstveni zapis broja je zapis broja u obliku $a \cdot 10^n$, odnosno u obliku umnoška koeficijenta a i potencije s bazom 10.

Broj a će po apsolutnoj vrijednosti uvijek biti broj veći ili jednak 1 i manji od 10. Dakle, to je neki decimalni broj između 1 i 10 ili između -10 i -1. Eksponent n je neki cijeli broj.

Dakle, znanstveni zapis broja je

$$a \cdot 10^n, n \in \mathbb{Z}, 1 \leqslant n < 10$$

$$\underbrace{1053}_{3} = 1.053 \cdot 10^{3}$$

$$\underbrace{35078.345}_{4} = 3.5078345 \cdot 10^{4}$$

$$\underbrace{0.00064853}_{-4} = 6.4853 \cdot 10^{-4}$$

$$\underbrace{302}_{2} \cdot 10^{4} = 3.02 \cdot 10^{6}$$

Oprez! Broj $705 \cdot 10^3$ nije zapisan u znanstvenom obliku jer koeficijent 705 nije broj koji je po apsolutnoj vrijednosti između 1 i 10. Znanstveni zapis tog broja bi bio $7.05 \cdot 10^5$.

Algebarski izrazi

Algebarski izraz su "matematičke rečenice" koje nastaju od brojeva (konstanti), slova (varijabli), računskih operacija i zagrada.

Članove algebarskih izraza odvajamo plusom ili minusom. Ako dvije ili više stvari množimo i/ili dijelimo, to smatramo kao jedan član.

Jednočlani algebarski izraz se zove monom, dvočlani binom, a tročlani trinom.

$$\underbrace{3x^4y^2}_{\text{1. član}} + \underbrace{10x}_{\text{2. član}} + \underbrace{a^3r^{12}}_{\text{3. član}}$$

Osnovne formule

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^2$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^2$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

Faktorizacija

Faktorizacija ili rastavljanje na faktore (na izraze koji se množe) je postupak kojim neki matematički izraz zapisujemo u obliku umnoška. Može se provesti na dva načina:

1. rastavljanje po formuli - svaku od gornjih formula možemo primijeniti u drugu stranu, s desna na lijevo

2. izlučivanje - u izrazu nađemo najveći dio koji je sadržan u svakom članu izraza, njega izlučimo ispred zagrade, a u zagradi napišemo što ostane od izraza kada svaki njegov član podijelimo s onim što smo izlučili

$$\underline{4x^2} - 12xy + \underline{9y^2} \overset{\text{kvadrat razlike}}{=} \left\{\begin{matrix} a^2 = 4x^2 \\ b^2 = 9y^2 \end{matrix}\right. \longrightarrow \left.\begin{matrix} a = 2x \\ b = 3y \end{matrix}\right\} = (\underline{2x} - \underline{3y})^2$$

$$10x^4 - 2x^3y + 4x^2 = 2x^2(5x^2 - xy + 2)$$

$$2x^2 \quad 5x^2 \quad 2x^2 \quad xy \quad 2x^2 \quad 2$$

Vrijednost algebarskog izraza

Računanje vrijednosti algebarskog izraza provodi se tako da zadano slovo (varijablu) zamijenimo brojem koji je dodijeljen toj varijabli, kada god na nju naiđemo.

$$2x + 7 = ?$$

$$x = 5$$

$$2 \cdot 5 + 7 = 10 + 7 = 17$$

Zbrajanje i oduzimanje algebarskih izraza

Zbrajati i oduzimati možemo samo članove koji imaju **sva** identična slova (varijable) u svom zapisu. Postupak se provodi u dva koraka:

1. zbrojimo ili oduzmemo brojeve koji se nalaze u našim članovima, ispred slova

2. na taj rezultat samo nalijepimo slova koja su stajala u članovima koje smo zbrajali ili oduzimali

$$\underbrace{5x + 10x}_{5 + 10 = 15} = 15x$$

$$\underbrace{10x - 5x}_{10 - 5 = 5} = 5x$$

Množenje i dijeljenje algebarskih izraza

Množiti i dijeliti možemo bilo koje algebarske izraze. Razlikujemo dva slučaja - kada radimo s jednočlanim izrazima ili kada je barem jedan od izraza višečlan.

Postupak za prvi slučaj se, slično kao i kod zbrajanja, sastoji od dva koraka:

1. pomnožimo ili podijelimo brojeve koji se nalaze ispred slova u članovima s kojima radimo
2. pomnožimo ili podijelimo ista slova, odnosno potencije s istom bazom, na način kako se množe ili dijele potencije (slovo prepišemo, a eksponente zbrojimo ili oduzmemo).

$$x \cdot x = x^2$$

$$3x \cdot 12x = 36x^2$$

$$3 \cdot 12 = 36$$

$$x^3 : x^2 = x$$

$$24x^3y : 8x^2 = 3xy$$

$$24 : 8 = 3$$

U drugom slučaju, ako imamo samo jedan član koji množi ili dijeli zagradu, onda ga množimo/dijelimo sa svakim članom zagrade posebno. **Pazimo na predznake!**

Množenje zagrada radimo po principu "svaki sa svakim", gdje svaki član prve zagrade posebno množimo sa svakim članom druge zagrade. Ponovno, **pazimo na predznake!**

$$(2a - 3b)(ax + 2) = 2a^2x + 4a - 3abx - 6b$$

Ova skripta je free jer svi mi volimo besplatne stvari!
Ako želiš toga još, **skeniraj ovaj QR kod** i isprobaj besplatno ostale materijale na našoj stranici.

Algebarski razlomci

Algebarski razlomci su razlomci koji i u brojniku i u nazivniku imaju algebarske izraze.

Vrijednost algebarskog razlomka računamo isto kao i kod običnih algebarskih izraza, svako pojavljivanje slova (varijable) u razlomku zamijenimo brojem koji je dodijeljen varijabli.

$$\frac{3x}{5} = ?$$

$$x = 2$$

$$\frac{3\cdot 2}{5} = \frac{6}{5}$$

Skraćivanje algebarskih razlomaka

Algebarske razlomke možemo kratiti ako su i brojnik i nazivnik zapisani u obliku umnoška te ako brojnik i nazivnik imaju neki dio koji se množi, isti.

Bitno je zapamtiti da, ako su neka dva člana algebarskog razlomka povezana plusom ili minusom, njih gledamo kao jednu, nerazdvojnu cjelinu. Dakle, smijemo kratiti samo članove koji su međusobno povezani množenjem.

$$\frac{(3x+5)\cancel{(2+5x)}}{\cancel{(2+5x)}(2x+1)} = \frac{3x+5}{2x+1}$$

$$\frac{x^{\cancel{6}\,4}(2x+3)}{\cancel{x^{2}}\,1\,(x+2)} = \frac{x^4(2x+3)}{x+2}$$

$$\frac{\cancel{x-3}}{(x+2)\cancel{(x-3)}} = \frac{1}{x+2}$$

Množenje i dijeljenje algebarskih razlomaka

Algebarske razlomke množimo kao i obične razlomke, brojnike sa brojnicima, a nazivnike sa nazivnicima. Lakše pamtimo kao "gornji s gornjim, donji s donjim".

Dijelimo isto kao i obične razlomke, drugi razlomak obrnemo i onda pomnožimo s prvim.

Također, prije množenja skratimo ako je moguće, bilo koji član koji je gore u bilo kojem razlomku možemo kratiti s istim članom koji se nalazi dolje u bilo kojem razlomku.

$$\frac{5x+8}{\cancel{2x+3}}\cdot\frac{\cancel{2x+3}}{7x+1}=\frac{5x+8}{7x+1}$$

$$\frac{x+2}{2x+1}:\frac{x+2}{4x-3}=\frac{\cancel{x+2}}{2x+1}\cdot\frac{4x-3}{\cancel{x+2}}=\frac{4x-3}{2x+1}$$

Zbrajanje i oduzimanje algebarskih razlomaka

Zbrajanje i oduzimanje algebarskih razlomaka provodi se u 4 koraka.

1. korak - Faktoriziramo nazivnike svih razlomaka s kojima radimo.

2. korak - U novom redu napravimo veliku razlomačku crtu i odredimo najmanji zajednički nazivnik, na sljedeći način: prepišemo sve što piše u nazivniku prvog razlomka, zatim od nazivnika drugog razlomka prepišemo samo dijelove koji nedostaju novom, velikom razlomku. Postupak ponavljamo za svaki razlomak koji zbrajamo ili oduzimamo.

3. korak - Podijelimo novi, veliki nazivnik s nazivnikom prvog razlomka, odnosno od velikog razlomka uzmemo dijelove koje prvi razlomak nema te ih pomnožimo s brojnikom tj. s onime što piše gore u razlomku. Prepišemo plus ili minus koji se nalazio iza razlomka kojeg smo gledali. Postupak ponavljamo za svaki razlomak koji zbrajamo ili oduzimamo.

4. korak - Sredimo brojnik, odnosno pomnožimo, zbrojimo i oduzmemo sve što možemo u gornjem dijelu novog, velikog razlomka.

$$\frac{2}{x+1}+\frac{x}{x^2-1}=\frac{2}{\underline{x+1}}+\frac{x}{\underline{(x-1)}\underline{(x+1)}}=$$

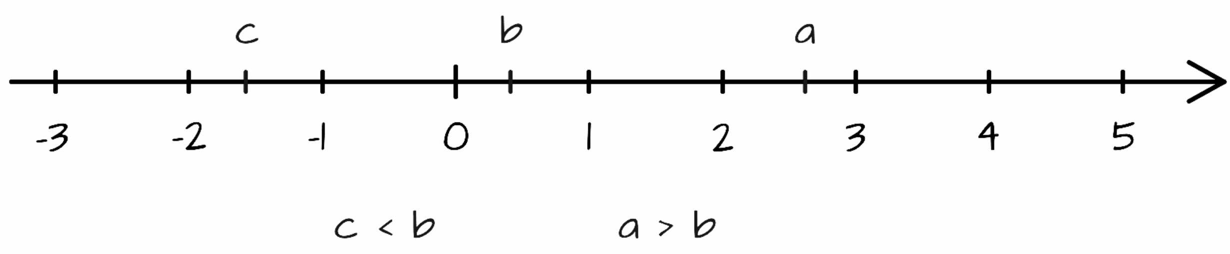
$$=\frac{2\cdot(x-1)+x\cdot 1}{\underline{(x+1)}\underline{(x-1)}}=\frac{3x-2}{(x+1)(x-1)}$$

Intervali

Uspoređivanje brojeva

Ako se broj a nalazi desno od broja b na brojevnom pravcu, onda je broj a veći od broja b što zapisujemo kao $a > b$.

Ako se broj a nalazi lijevo od broja b na brojevnom pravcu, onda je broj a manji od broja b što zapisujemo kao $a < b$.



Intervali

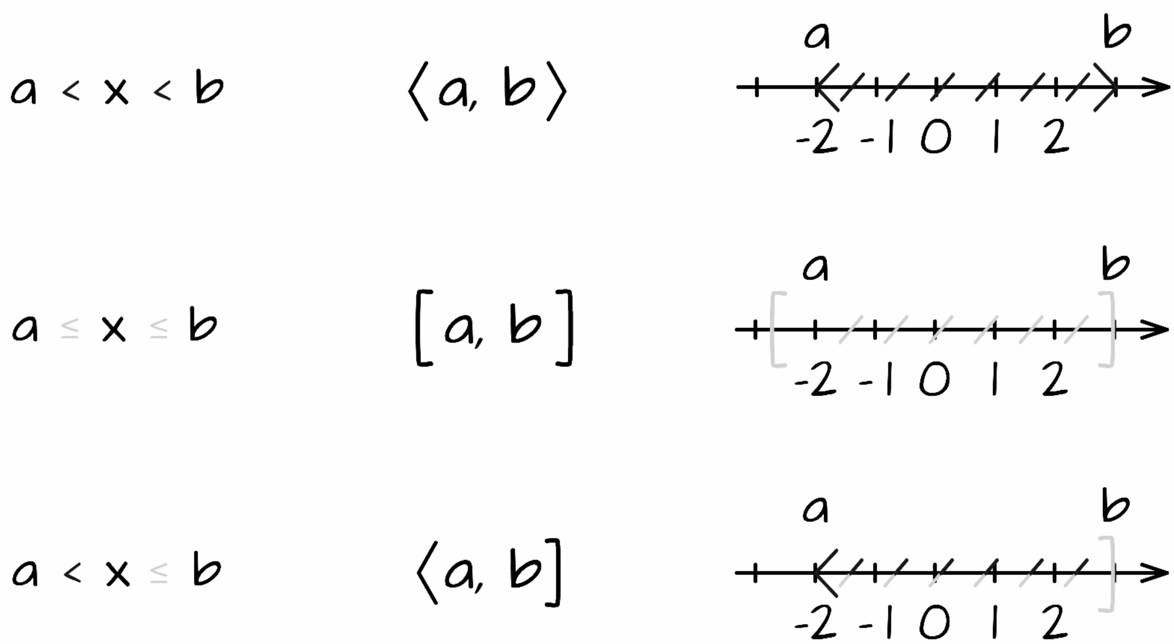
Interval je skup svih brojeva koji se nalaze između neka dva poznata broja ili skup svih brojeva većih/manjih od nekog poznatog broja.

Za prikaz intervala služimo se posebnim zagradama: $\langle, \rangle, [,]$.

Otvorene, šiljaste ili špičaste zagrade $\langle$ i $\rangle$ koristimo kada ne želimo uključiti broj koji se nalazi uz njih.

Zatvorene ili uglate zagrade $[$ i $]$ koristimo kada želimo uključiti broj koji se nalazi uz njih.

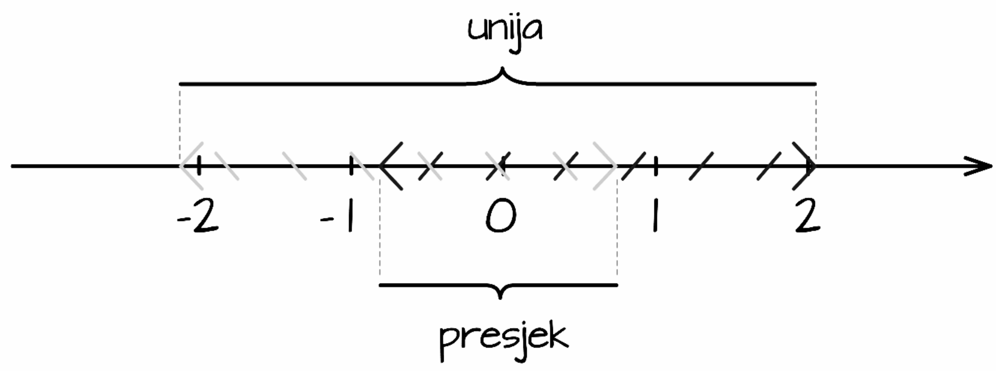
Uz pomoć intervala prikazujemo i rješenja nejednadžbi. Razlikujemo tri slučaja: otvorene, zatvorene i poluotvorene intervale.



Unija i presjek intervala

Unija dva intervala je interval koji sadrži sve brojeve koji su se nalazili u bilo kojem intervalu, dakle bilo što iz prvog intervala ili bilo što iz drugog intervala.

Presjek dva intervala je interval koji sadrži samo one brojeve koji su se nalazili u oba intervala, dakle ono što se nalazilo i u prvom i u drugom intervalu.



Ova skripta je free jer svi mi volimo besplatne stvari!
Ako želiš toga još, **skeniraj ovaj QR kod** i isprobaj besplatno ostale materijale na našoj stranici.

Linearne jednadžbe

Linearna jednadžba je jednadžba oblika $a \cdot x + b = 0$ gdje je a različit od 0. Još se koristi naziv "jedna jednadžba s jednom nepoznanicom".

Riješiti jednadžbu znači odrediti sve brojeve x tako da uvrštavanjem tih vrijednosti umjesto x-a, dobijemo nekakvu istinu, odnosno da lijeva i desna strana jednadžbe budu jednake. Takve x-eve zovemo rješenje jednadžbe.

Broj rješenja linearne jednadžbe

Linearna jednadžba može imati **jedno**, **nijedno** ili **beskonačno mnogo rješenja**.

Jednadžba ima jedno rješenje ako rješavanjem jednadžbe za x dobijemo točno neki određeni broj.

Jednadžba nema rješenja ako rješavanjem dođemo do nekog izraza koji nikada nije istina. Takvi izrazi su oblika $0 \cdot x = b$ gdje je b bilo koji broj različit od 0.

Jednadžba ima beskonačno mnogo rješenja ako je zadnji izraz do kojeg dođemo oblika $0 \cdot x = 0$.

$5x = 6 \;\downarrow$ jedno rješenje

$0x = 4 \;\downarrow$ nema rješenja

$0x = 0 \;\downarrow$ beskonačno mnogo rješenja

Postupak rješavanja linearne jednadžbe

Svaku lineranu jednadžbu možemo riješiti u 4 koraka.

1. korak - Riješimo se svih zagrada i razlomaka (pomnožimo jednadžbu sa najmanjim zajedničkim nazivnikom).

2. korak - Sve nepoznanice stavimo na lijevu stranu, a sve brojeve na desnu.

3. korak - Posebno zbrojimo i oduzmemo sve nepoznanice s lijeve strane i posebno sve brojeve s desne strane.

4. korak - Podijelimo cijelu jednadžbu s bilo čim što stoji ispred nepoznanice, tj. s brojem koji stoji ispred nepoznanice.

1. korak: $\frac{-2x}{7} = 9 + x \quad / \cdot 7$

2. korak: $-2x = 63 + 7x$

3. korak: $\underline{-2x}\ \underline{-7x} = 63$

4. korak: $-9x = 63 \quad / :(-9) \longrightarrow \underline{\underline{x = -7}}$

Jednadžbe s apsolutnim vrijednostima

Jednadžbe s apsolutnim vrijednostima rješavamo isto kao i obične linearne jednadžbe. Razlika je samo u trenutku kada se želimo osloboditi apsolutnih vrijednosti.

Postupak pri oslobađanju je sljedeći:

1. Jednadžbu rastavimo na dva slučaja: u prvom slučaju samo maknemo apsolutne vrijednosti, a u drugom slučaju ih pretvorimo u zagrade i stavimo minus ispred novonastale zagrade.
2. Svaki slučaj rješavamo kao novi zadatak, tj. kao posebnu jednadžbu.
3. Rješenje početne jednadžbe je svako rješenje do kojeg dođemo ovim načinom.

$$|x+2| = 9$$

$$x + 2 = 9 \qquad\qquad -(x+2) = 9$$

$$\underline{x = 7} \qquad\qquad \underline{x = -11}$$

Izražavanje jedne veličine s pomoću drugih u jednakosti

Ako želimo iz jednakosti izraziti jednu veličinu s pomoću drugih, zapravo radimo računske operacije nakon kojih će na lijevoj strani ostati samo veličina (nepoznanica/slovo) koje želimo izraziti, a sve ostalo će biti na desnoj strani. Pokažimo na primjeru.

Iz jednadžbe $a = \frac{b+c}{2}$ izrazimo veličinu b:

$$a = \frac{(b + c)}{2} \quad / \cdot 2$$

$$2a = b + c$$

$$2a - c = b$$

$$b = 2a - c$$

Linearne nejednadžbe

Postupak rješavanja linearnih nejednadžbi isti je kao i kod linearnih jednadžbi, sve do trenutka kada množimo ili dijelimo jednadžbu negativnim brojem. Tada ćemo, osim što ćemo lijevu i desnu stranu pomnožiti/podijeliti tim brojem, okrenuti znak nejednakosti u drugu stranu. Sve ostalo je u potpunosti isto.

$$\frac{-2x}{7} = 6 \quad / \cdot 7 \qquad\qquad \frac{-2x}{7} < 6 \quad / \cdot 7$$

$$-2x = 42 \quad / : (-2) \qquad\qquad -2x < 42 \quad / : (\underline{-2})$$

negativan predznak

$$x = -21 \qquad\qquad x > -21$$

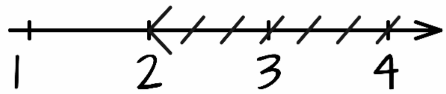
obrnuti znak

Prikaz rješenja linearnih nejednadžbi

Rješenja linearnih nejednadžbi možemo prikazati na tri načina: preko nejednakosti gdje je x sam na lijevoj strani, preko intervala ili grafički preko pravca.

Treći način prikaza rješenja je grafički, na brojevnom pravcu. Nakon što nacrtamo brojevni pravac, podebljamo ili obojamo dio pravca koji odgovara našem rješenju.

$x > 2$ $\quad\langle 2, +\infty \rangle$



tri načina za prikazati isto rješenje

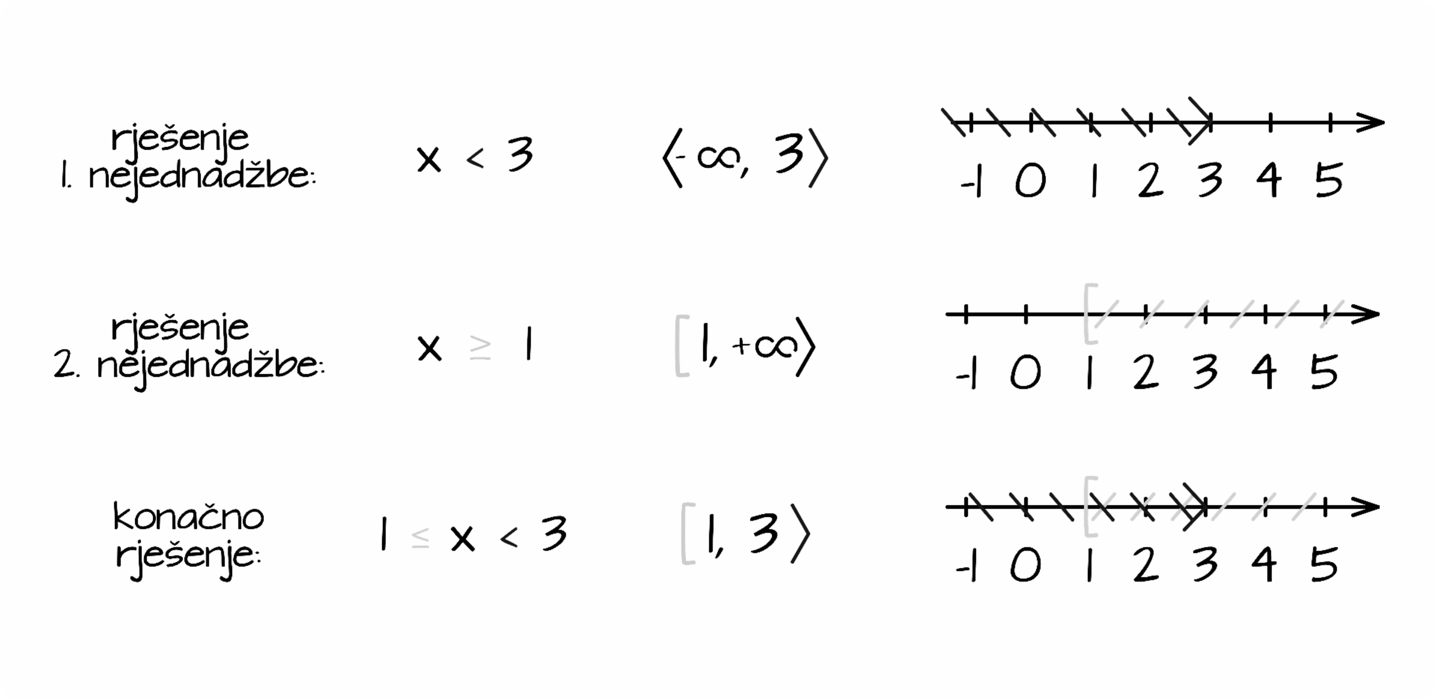
Sustav linearnih nejednadžbi

Sustavi nejednadžbi rješavaju se tako da:

1. svaku od nejednadžbi riješimo zasebno

2. na istom brojevnom pravcu označimo rješenja svake nejednadžbe različitim bojama ili crticama okrenutima u drugu stranu

3. naše konačno rješenje će biti presjek ova dva rješenja, odnosno onaj dio brojevnog pravca gdje se nalaze obje boje ili gdje se crtice sijeku



Nejednadžbe s apsolutnim vrijednostima

Razlikujemo dvije vrste nejednadžbi s apsolutnim vrijednostima.

1. slučaj, |x| $\leq$ a:

- Ako je $a < 0$, nejednadžba $|x| \leq a$ nema rješenja.
- Ako je $a = 0$ rješenje je $x = 0$.
- Ako je $a > 0$, rješenje nejednadžbe $|x| \leq a$ zapisujemo na jedan od tri načina (odnosno rješavamo se apsolutne vrijednosti):
  $-a \leq x \leq a$ ili $(x \geq -a$ i $x \leq a)$ ili $x \in [-a, a]$.

2. slučaj, |x| $\geq$ a:

- Ako je $a \leq 0$, rješenje nejednadžbe $|x| \geq a$ su svi realni brojevi x.
- Ako je $a > 0$, rješenje nejednadžbe $|x| \geq a$ zapisujemo na jedan od sljedećih načina: $(x \leq -a \text{ ili } x \geq a)$ ili $x \in \langle -\infty, -a] \cup [a, \infty\rangle$.

Ova skripta je free jer svi mi volimo besplatne stvari!
Ako želiš toga još, **skeniraj ovaj QR kod** i isprobaj besplatno ostale materijale na našoj stranici.

KOORDINATNI SUSTAV

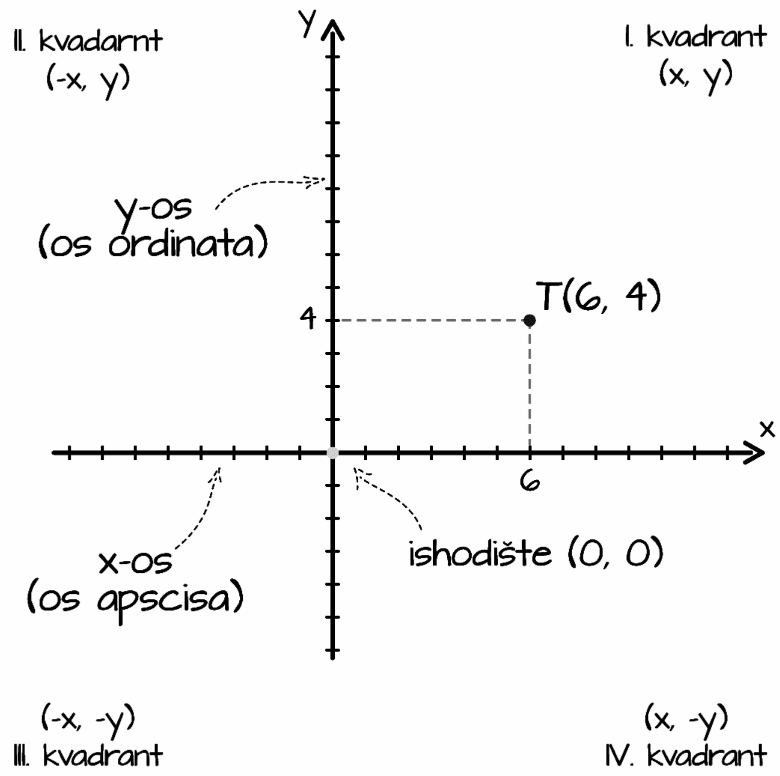
Kartezijev koordinatni sustav

Uređeni par je par elemenata u kojem se točno zna koji je element na prvom mjestu, a koji na drugom. Oznaka je (a, b). Tada je prvi element a, a drugi element b.

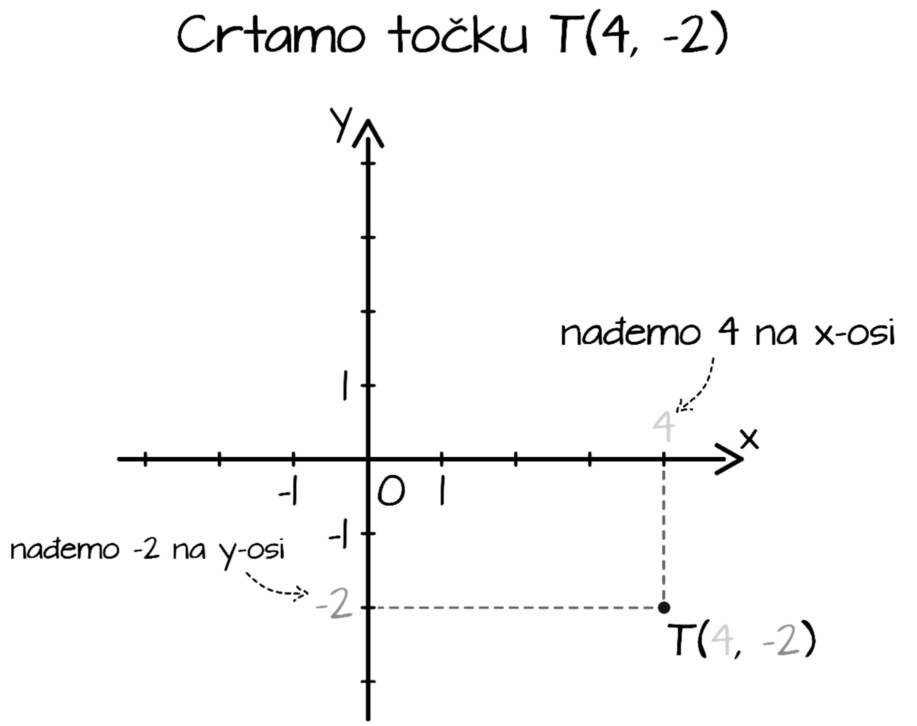
Kartezijev koordinatni sustav u ravnini (ili samo koordinatni sustav) se sastoji od svih uređenih parova gdje su i prvi i drugi element realni brojevi. Svaki takav uređeni par određuje točno jednu točku u koordinatnom sustavu. Kažemo da točka T ima koordinate (x, y) i pišemo $T(x, y)$. Broj x je apscisa točke T, a y je ordinata točke T.

Točke u ravnini smještamo u odnosu na dva okomita pravca koje zovemo koordinatne osi. Vodoravnu os nazivamo os x ili os apscisa. Vertikalnu os nazivamo os y ili os ordinata. Sjecište koordinatnih osi zovemo ishodište koordinatnog sustava.

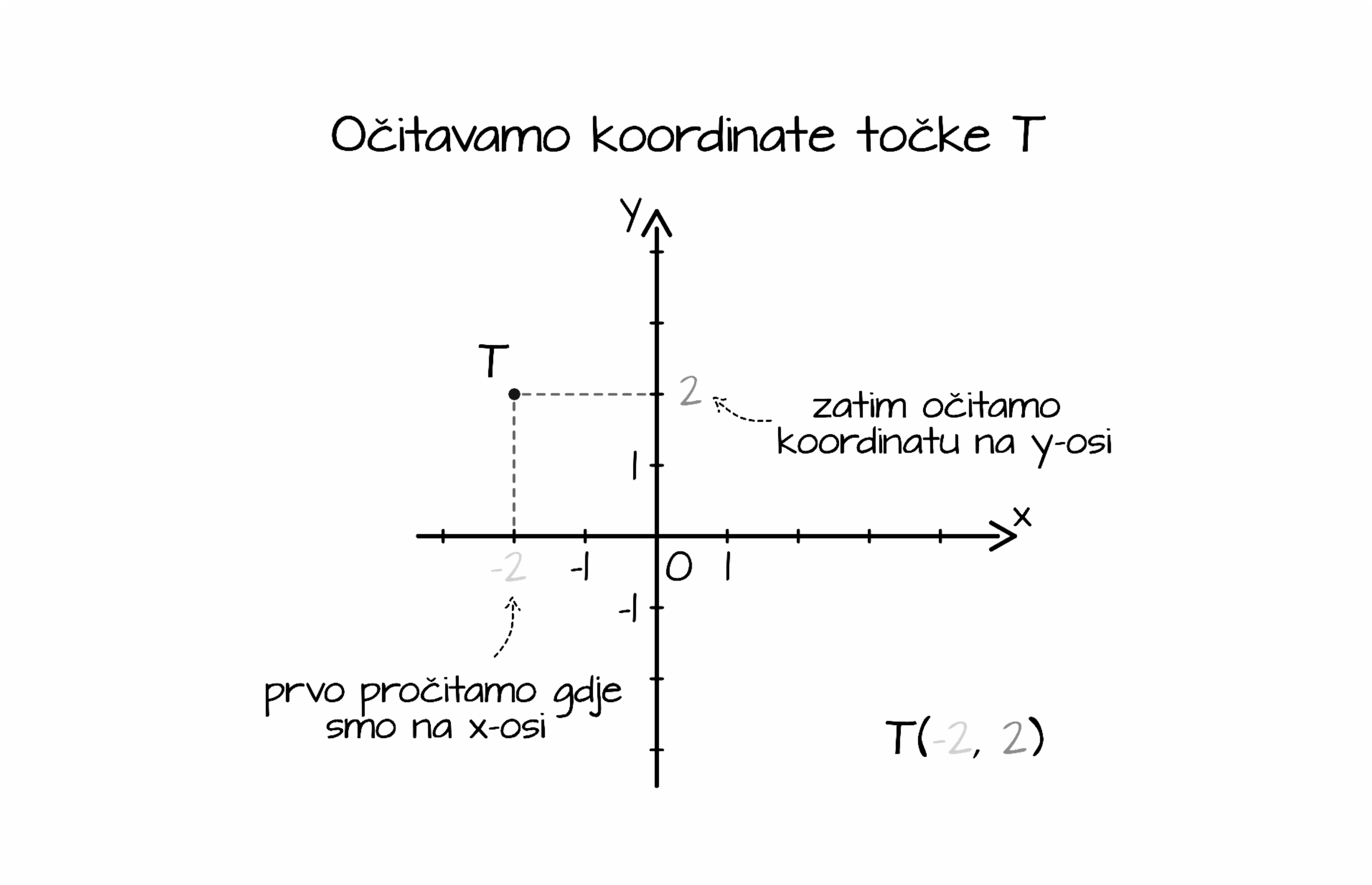
Koordinatne osi dijele ravninu na četiri dijela te tako imamo četiri kvadranta. Kvadrante karakteriziraju predznaci koordinata njihovih točaka.



Kada želimo nacrtati neku točku u koordinatnom sustavu, prvo na x-osi nađemo prvu koordinatu, odnosno prvi broj u zagradi, te točke. Povučemo okomitu isprekidanu liniju koja izlazi iz te točke. Zatim na y-osi nađemo drugu koordinatu tj. drugi broj iz zagrade i iz njega povučemo isto tako okomitu, iscrtkanu liniju. Naša točka se nalazi na sjecištu tih iscrtkanih linija.



Koordinate točke nacrtane u koordinatnom sustavu očitavamo postupkom obrnutim od crtanja točke. Iz točke povučemo okomitu liniju na x-os i pročitamo prvu koordinatu, a zatim okomitu liniju na y-os te pročitamo drugu koordinatu.



Udaljenost točaka u koordinatnom sustavu

Udaljenost točaka $A(x_1, x_2)$ i $B(x_2, y_2)$ računa se formulom:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Polovište dužine

Polovište dužine $\overline{AB}$, gdje je $A\left(x_1, y_1\right)$ i $B\left(x_2, y_2\right)$, označavamo s P i njezine koordinate $\left(x_P, y_P\right)$ računamo kao:

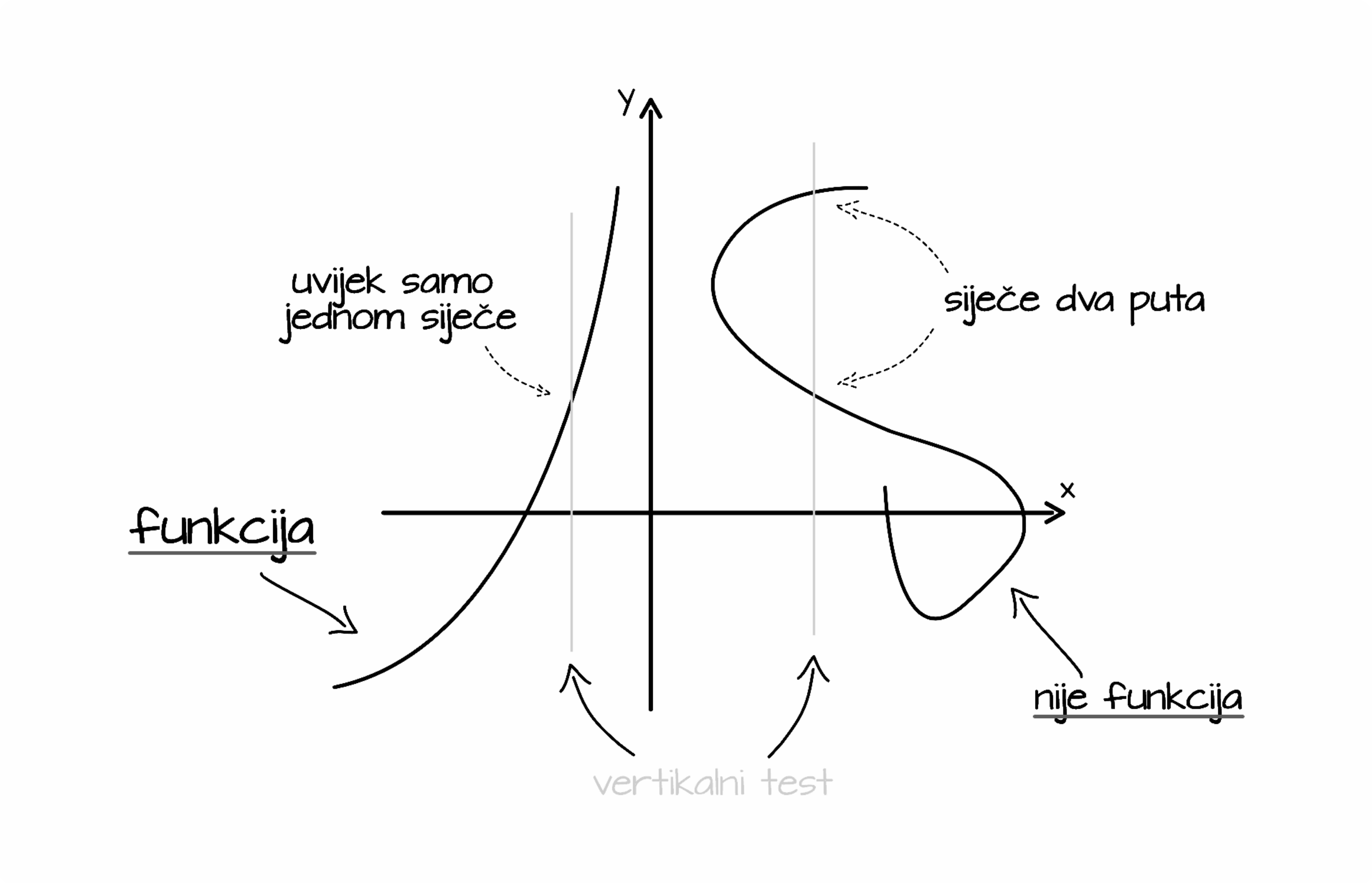
$$x_P = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad y_P = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Sviđa ti se što vidiš? E pa ima toga još! **Skeniraj QR kod** pored i pretplati se na pripreme za maturu koje su ti uvijek dostupne, u neograničenim količinama!

Linearna funkcija

Općenito o funkciji

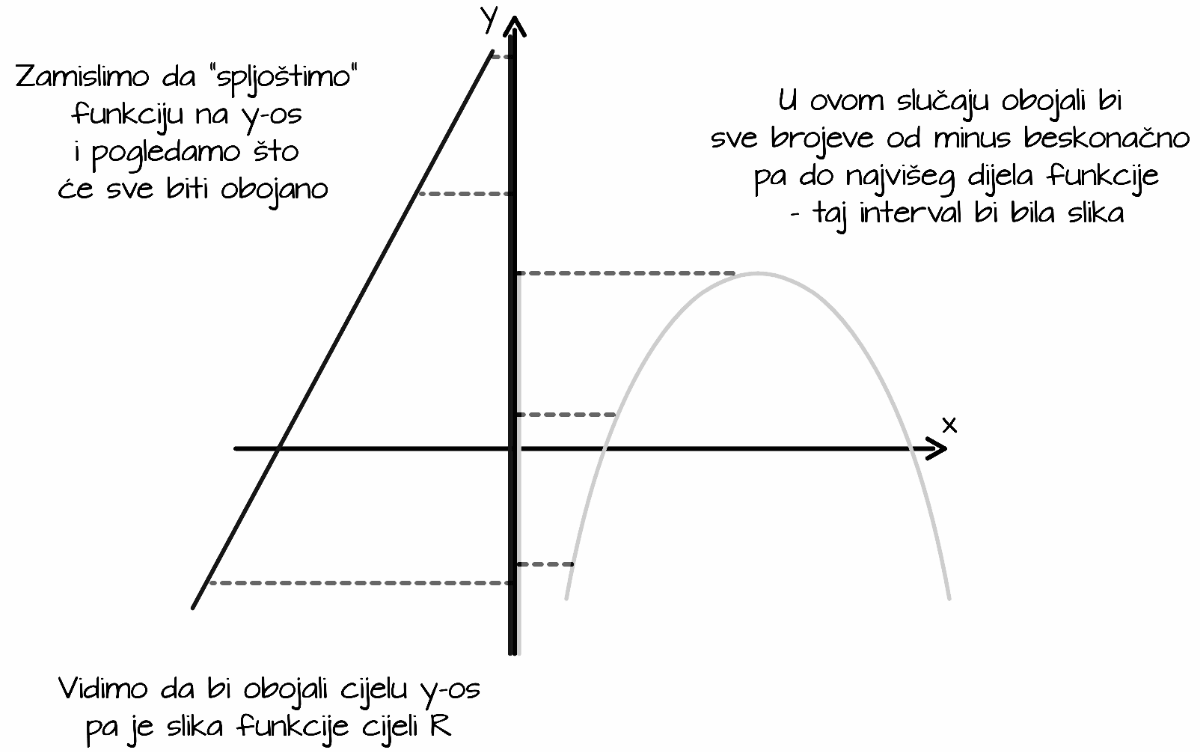
Općenito, funkcija je preslikavanje sa skupa D u skup K takvo da se svaki element skupa D preslika u neki element skupa K. Ako se jedan element iz D preslikava u 2 ili više elemenata skupa K, onda to nije funkcija. Skup D zovemo domena funkcije, a skup K kodomena funkcije. Provjeru je li neki graf funkcija ili nije, radimo uz pomoć vertikalnog testa. Ako uspijemo naći uspravni pravac koji siječe graf u 2 ili više točke, onda to nije funkcija. Ako svaki takav pravac siječe graf uvijek u samo jednoj točki, onda je to graf funkcije.



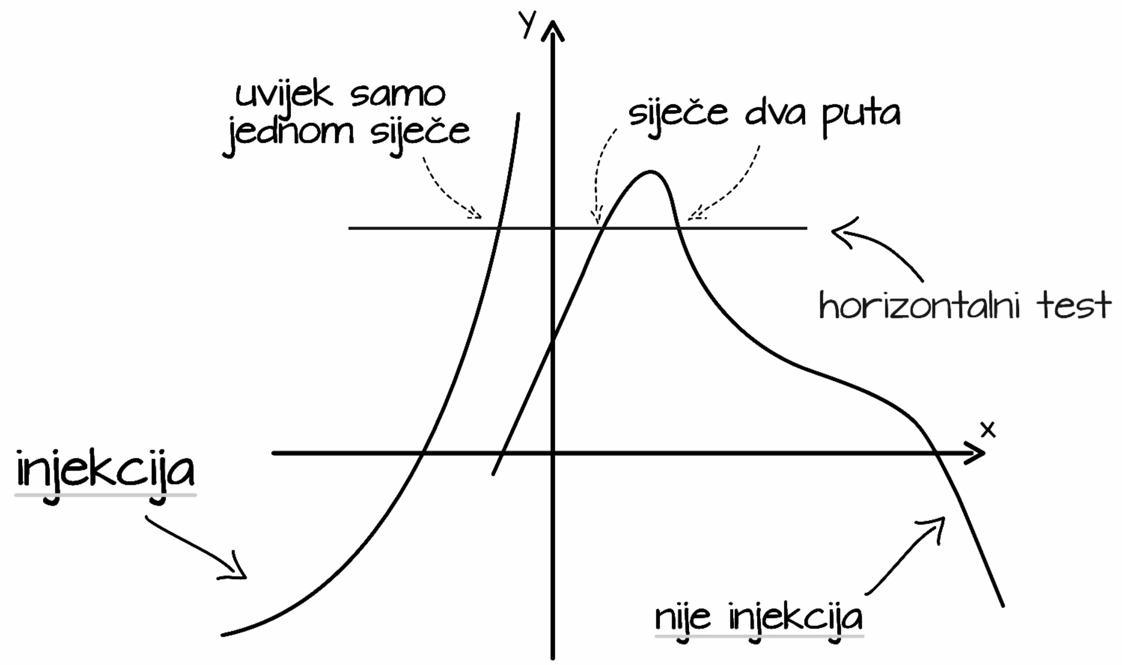
Funkciju također možemo zamišljati kao "crnu kutiju" koja radi po nekakvom pravilu. Nakon što u nju ubacimo broj, ona po zadanom pravilu nešto napravi s tim brojem i rezultat izbaci van.

Ako sa f označimo našu funkciju, tada pridruživanje broja x broju y označavamo s $f(x)=y$. Broj x zovemo argument funckije, a y vrijednost funkcije.
Svaka funkcija je zadana svojom domenom, kodomenom i pravilom pridruživanja.

Slika funkcije je skup svih vrijednosti koje funkcija može poprimiti, odnosno skup svih brojeva koje funkcija može izbaciti. To ćemo gledati kao sve y-e koje možemo dobiti. Oznaka za sliku je Im.



Funkcija je injekcija ako se svaki x preslika u svoj, drugačiji y tj. ako ne postoje dva x-a za koja će funkcija izbaciti istu vrijednost. Injektivnost se provjerava horizontalnim testom. Slično kao i vertikalni test, ako vodoravni pravac siječe funkciju u dvije ili više točkaka, nije injekcija, a u suprotnom jest.



Linearna funkcija

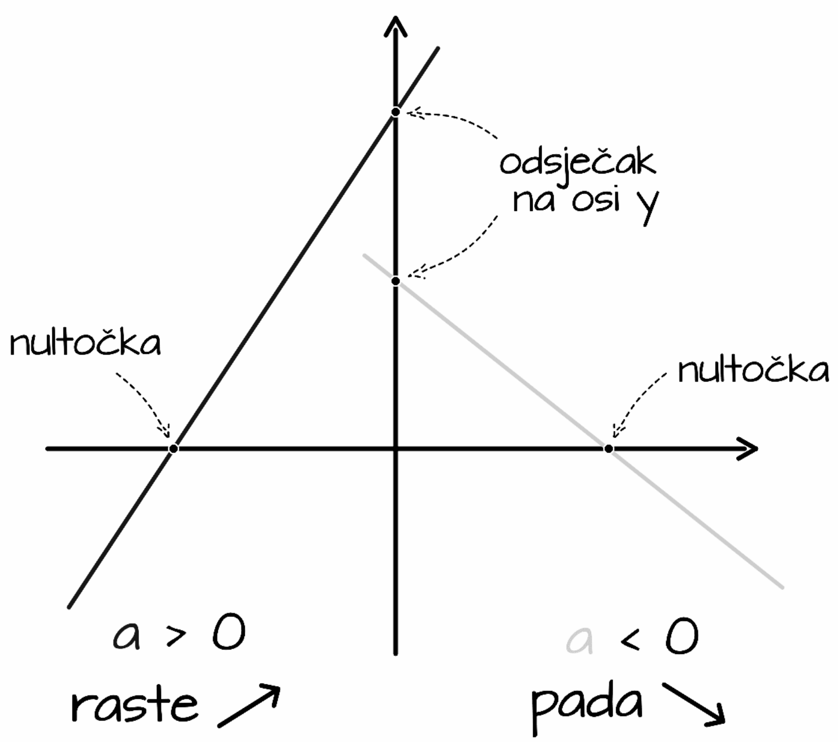
Funkciju zadanu pravilom $f(x) = a \cdot x + b$ gdje su a i b neki realni brojevi i $a \neq 0$ nazivamo linearnom funkcijom. Broj a se zove koeficijent smjera (nagib pravca), a b je odsječak na osi y.

U linearnoj funkciji, umjesto a i b bi trebali stajati brojevi, a x i $f(x)$ (odnosno y) ostaju slova.

Broj a, nagib pravca ili koeficijent smjera, određuje koliko je pravac nagnut - strm ili blag. Što je a veći po svojoj vrijednosti, to je pravac strmiji. Broj b, odsječak na osi y, predstavlja mjesto gdje pravac udara y-os. To je dakle broj na kojem vidimo da pravac siječe y-os.

Nultočka linearne funkcije je broj x koji dobijemo rješavanjem jednadžbe $ax + b = 0$.

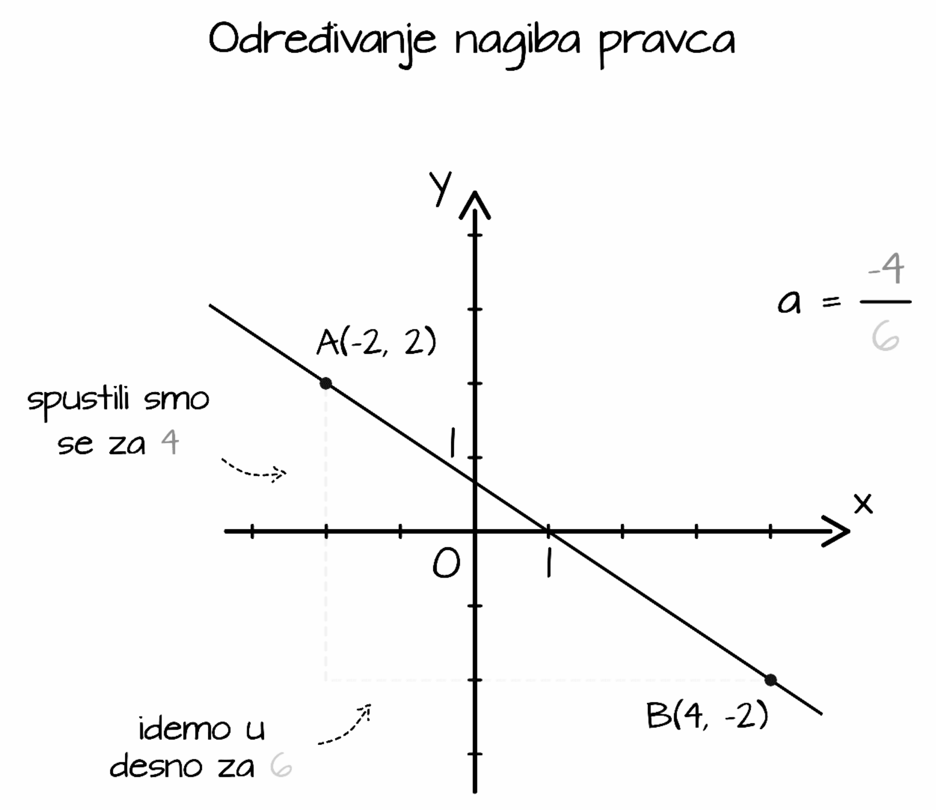
Graf svake linearne funkcije je pravac. Za pravac ćemo reći da raste, ako gledajući s lijeva na desno, idemo sve više i više. U tom slučaju je $a > 0$. Obrnuto, ako s lijeva na desno pravac izgleda kao da se spušta, reći ćemo da pada i tada je $a < 0$.



Nagib pravca

Nagib pravca, odnosno koeficijent smjera, nam je jako bitan. Govori nam koliko brzo neki pravac ide prema gore ili prema dolje. Ako ga želimo iščitati iz slike pravca, to možemo vrlo jednostavno napraviti. Trebaju nam samo dvije "lijepe" točke.

Krećemo od lijeve od te dvije točke i gledamo koliko moramo ići dolje ili gore da dođemo do razine druge točke. Naravno, ako se pomičemo dolje, stavljamo minus ispred broja, a ako idemo gore, ne stavljamo ništa. Taj broj će ići gore u razlomak odnosno u brojnik. Nazivnik tj. donji broj u razlomku će biti pomak od lijeve točke do desne, odnosno koliko nam koraka treba u desno da dođemo do njezine razine. Dakle, a će biti jednak razlomku koji nastane iz ova dva broja.



Crtanje grafa linearne funkcije

Znamo da je graf linearne funkcije pravac. Svaki pravac je određen s dvije točke pa nam je zapravo dovoljno naći samo dvije točke koje zadovoljavaju početnu funkciju i odmah možemo nacrtati pravac.

Točke nalazimo tako da za x odaberemo neki broj i za njega izračunamo koliki će biti y. Te dvije vrijednosti skupa određuju jednu točku. Postupak ponovimo još jednom i imamo dvije točke kroz koje povučemo pravac.

Ovaj postupak možemo lijepo napraviti preko tablice kako je pokazano na slici dolje.

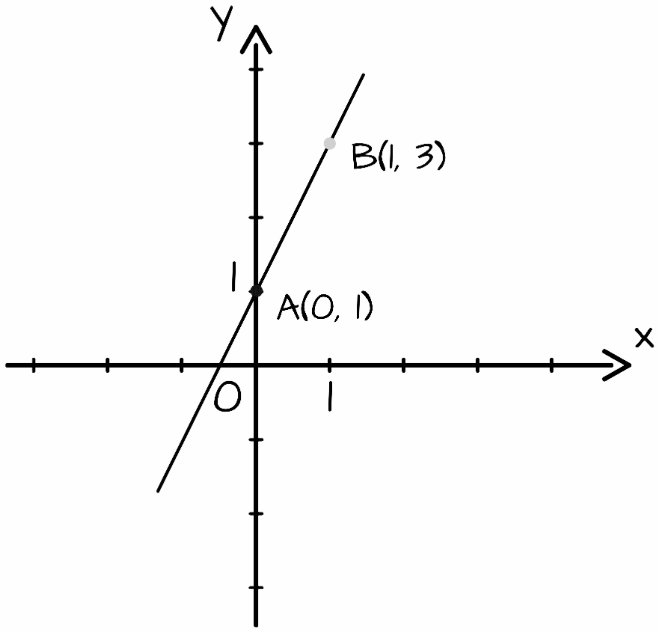
Crtnje pravca

$y = 2x + 1$

	x	y
A	0	1
B	1	3

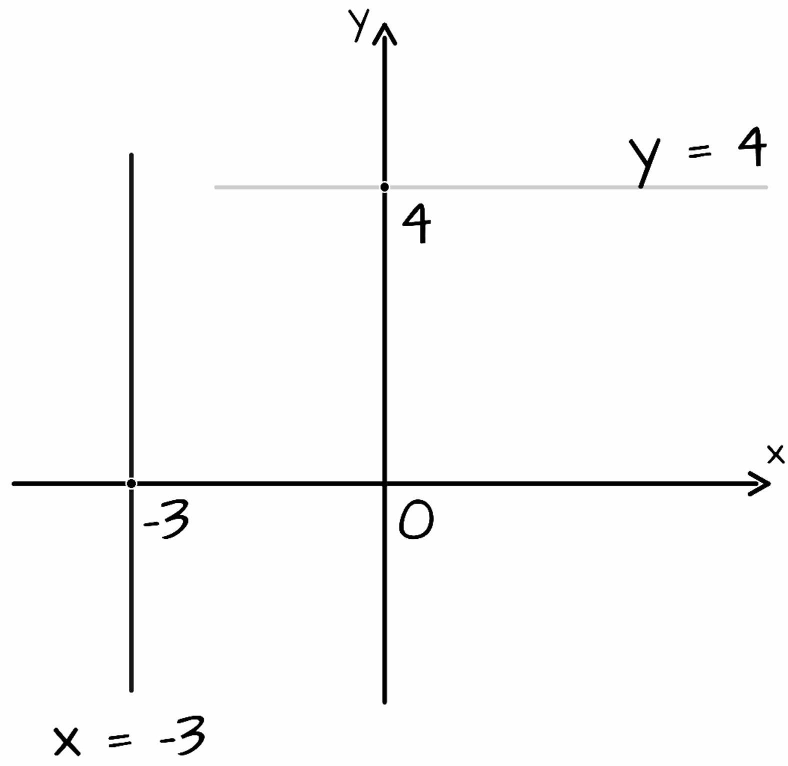
$y = 2 \cdot 0 + 1$

$y = 1$



Posebni pravci su takozvani horizontalni i vertikalni pravci.

Horizontalni pravac je oblika $y = b$, gdje je b neki broj. On je paralelan s x-osi, tj. osi apscisa.
Vertikalni pravac je oblika $x = c$, gdje je c neki broj. On je paralelan s y-osi, tj. osi ordinata.



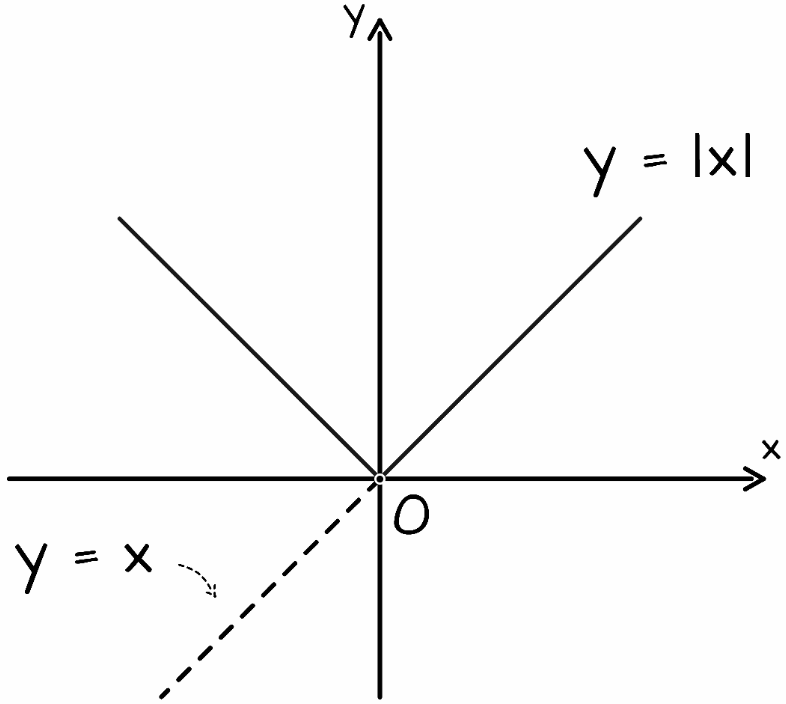
Graf funkcije apsolutne vrijednosti

Graf apsolutne vrijednosti $y = |x|$ crtamo tako da:

1. nacrtamo graf funkcije $y = x$

2. dio funkcije koji se nalazi iznad x-osi ostaje nepromijenjen, a dio funkcije ispod x-osi prebacimo iznad x-osi tj. zrcalimo s obzirom na x-os jer funkcija apsolutne vrijednosti svaku negativnu vrijednost pretvara u pozitivnu istog apsolutnog iznosa.
Na taj način ćemo dobiti graf funkcije $y = |x|$.

Graf funkcije $y = |x|$ jednak je grafu $y = x$ za $x \geq 0$ i grafu $y = -x$ za $x < 0$.


y
y = |x|
x
O
y = x

Sustav linearnih jednadžbi

Linearna jednadžba s dvije nepoznanice je jednadžba oblika $ax + by + c = 0$, gdje su x i y nepoznanice, a a, b i c neki brojevi. Inače, svaka takva jednadžba ima beskonačno mnogo rješenja.

Međutim, ako dodamo još jednu jednadžbu s dvije nepoznanice dobivamo sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice koji može imati jedno, nijedno ili beskonačno mnogo rješenja.

Rješenje sustava linearnih jednadžbi je svaki par brojeva (x, y) koji zadovoljava obje jednadžbe kada se brojevi x i y ubace u njih.

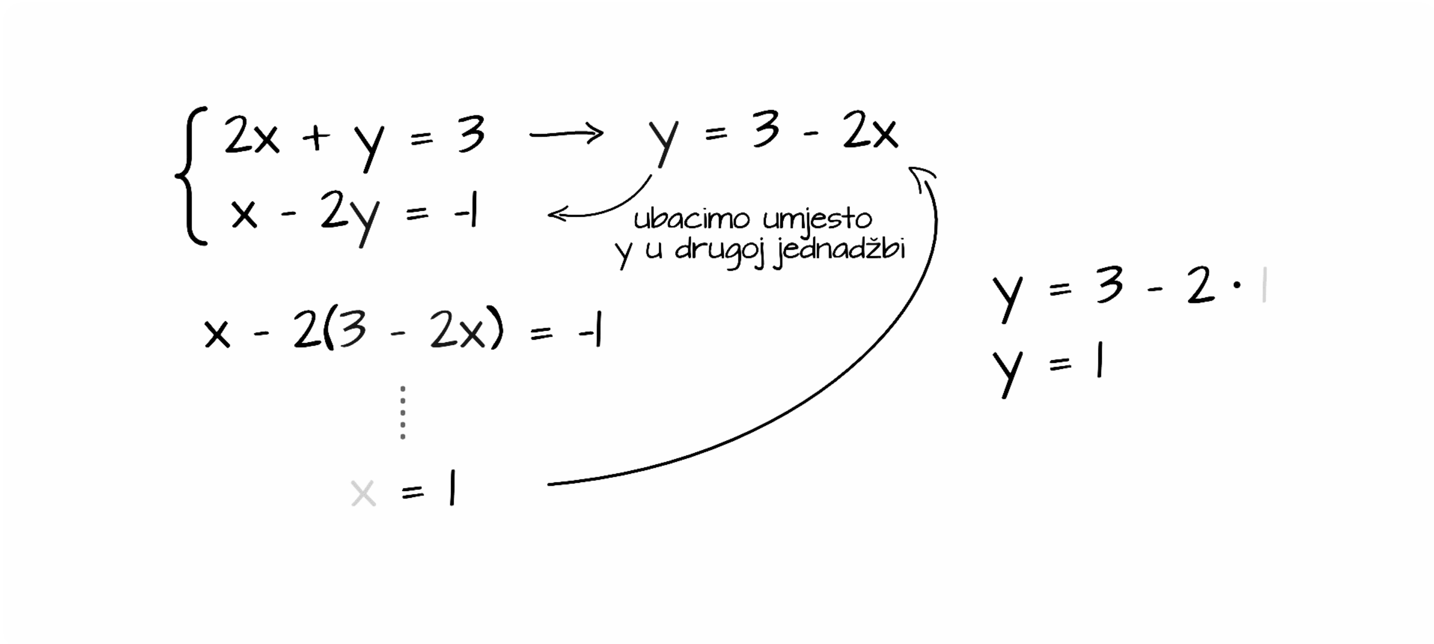
Rješavanje sustava dviju jednadžbi s dvije nepoznanice

Imamo dvije metode: metoda supstitucije i metoda suprotnih koeficijenata.

Metoda supstitucije

U ovoj metodi, želimo “izraziti” jednu nepoznanicu pomoću druge. Drugim riječima, želimo na jednoj strani bilo koje jednadžbe sustava dobiti da piše samo jedna nepoznanica, a da je sve ostalo na drugoj strani.

Nakon toga, u drugu jednadžbu, onu koju nismo dirali za sad, umjesto nepoznanice iz prvog dijela koja je sama na jednoj strani, ubacimo izraz kojem je ona jednaka. Na taj način dobijemo običnu linearnu jednadžbu koju znamo riješiti.



Metoda suprotnih koeficijenata

U ovoj metodi je bitno da za početak uredno napišemo dvije zadane jednadžbe jednu ispod druge, odnosno nepoznanicu ispod istoimene nepoznanice. Cilj ove metode je namjestiti suprotne brojeve ispred jedne od nepoznanica tj. namjestiti tako da u obje jednadžbe ispred iste nepoznanice stoji isti broj, samo s drugim predznakom. Nakon toga, te nepoznanice prekrižimo, a sve ostalo prepišemo u novu jednadžbu, tako da ono što je bilo lijevo ostaje lijevo, a sve što je bilo na desnoj strani, ostaje desno.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \quad / \cdot 2 \\ 3x - 2y = 8 \quad / \cdot 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x + \cancel{6y} = 2 \\ 9x - \cancel{6y} = 24 \end{cases}$$

$$4x + 9x = 2 + 24$$

$$\vdots$$

$$x = 2$$

$$2 \cdot 2 + 3y = 1$$

$$y = -1$$

Neki tvrde da postoji i metoda komparacije, no to je samo metoda supstitucije sa više koraka. :)

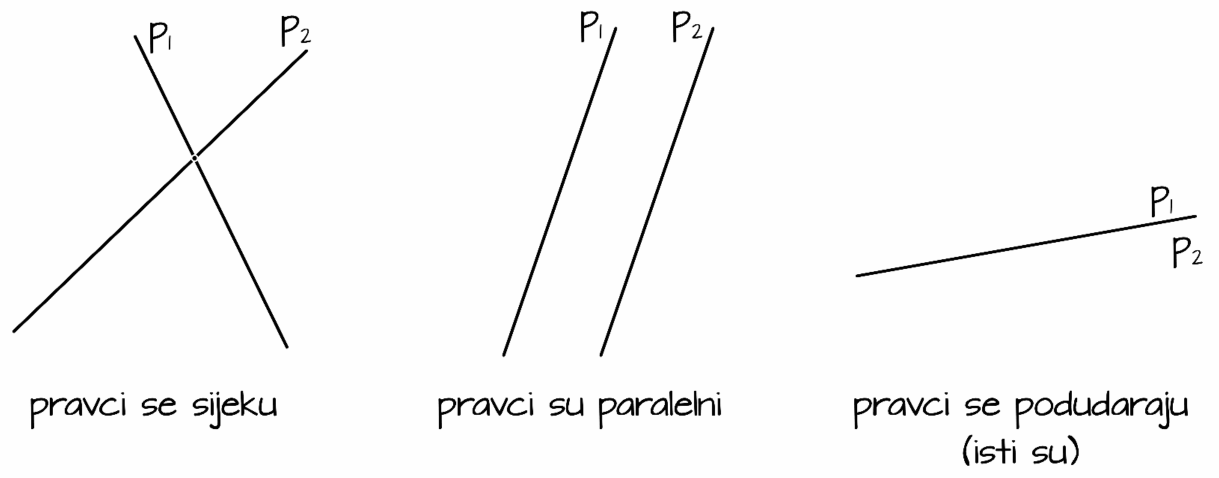
Broj rješenja

Vidjeli smo primjere gdje smo dobili točno jedno rješenje za x i jedno rješenje za y. Međutim rekli smo da sustavi linearnih jednadžbi mogu imati i beskonačno rješenja ili čak niti jedno. Te slučajeve prepoznajemo na sljedeći način:

- Ako tijekom rješavanja jedne jednadžbe dođemo do izraza koji ne sadrži nepoznanice (odnosno sve nepoznanice se ponište ili piše npr. $0x$) i taj izraz je istinit (npr. $0 = 0$), to znači da sustav ima beskonačno mnogo rješenja.
- Ako tijekom rješavanja jedne jednadžbe dođemo do neke neistine, neke "gluposti" kao npr. $0 = 1$, možemo odmah stati. Taj sustav nema rješenja. Tu se nepoznanice isto tako ponište, odnosno nemamo ih ili piše npr. $0x$.

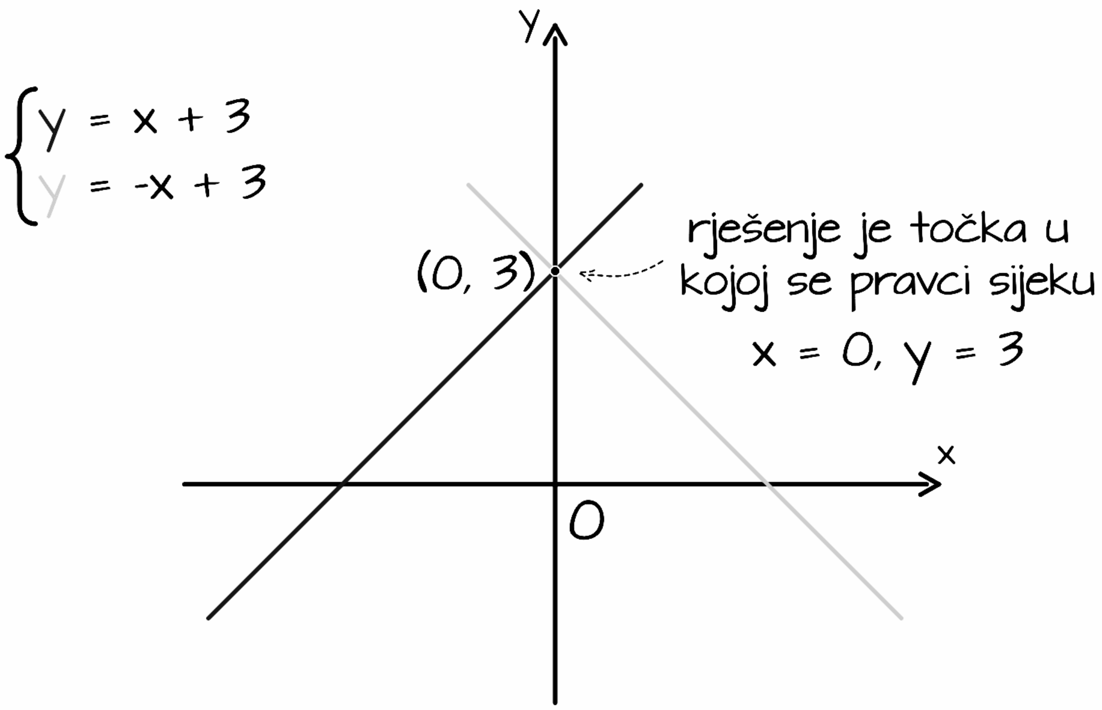
Grafičko rješavanje

Linearna jednadžba s dvije nepoznanice je pravac.
Dvije linearne jednadžbe s dvije nepoznanice su dva pravca. Što se tiče rješenja, prisjetimo se kako se mogu odnositi dva pravca u ravnini.



Onda isto vrijedi i za sustave linearnih jednadžbi. Mogu imati jedno rješenje (pravci se sijeku), niti jedno rješenje (pravci su paralelni) ili beskonačno mnogo rješenja (pravci se podudaraju).

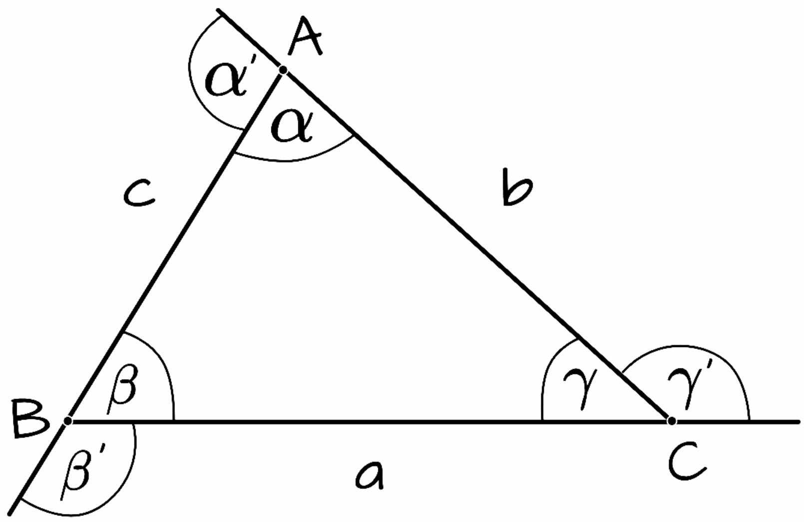
Grafičko rješavanje sustava dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice radit ćemo upravo tako da nacrtamo dva pravca koji su zadani preko jednadžbi i pogledamo kako se oni odnose. Dovoljno je napisati odgovor riječima, samo u slučaju kada se sijeku još trebamo i očitati točku u kojoj se sijeku.



TROKUTI

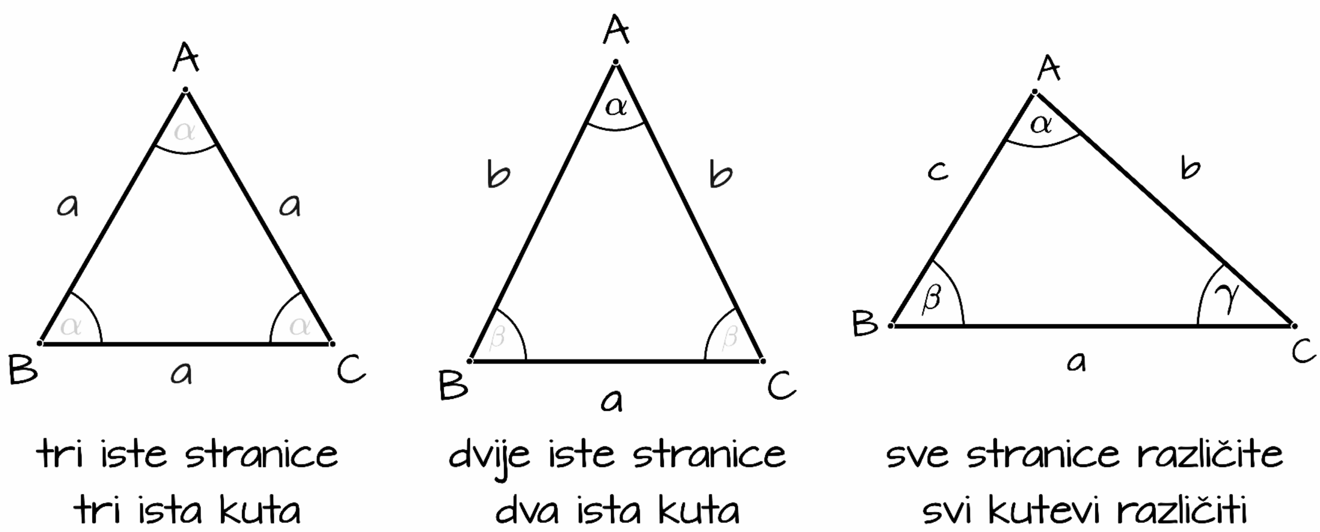
Trokut

Trokut $\triangle ABC$ je dio ravnine odmeđen dužinama $\overline{AB}, \overline{BC}$ i $\overline{CA}$. Točke A, B i C se zovu vrhovi trokuta, dužine $\overline{AB}, \overline{BC}$ i $\overline{CA}$ su stranice, a α, β i γ su unutarnji kutevi trokuta.

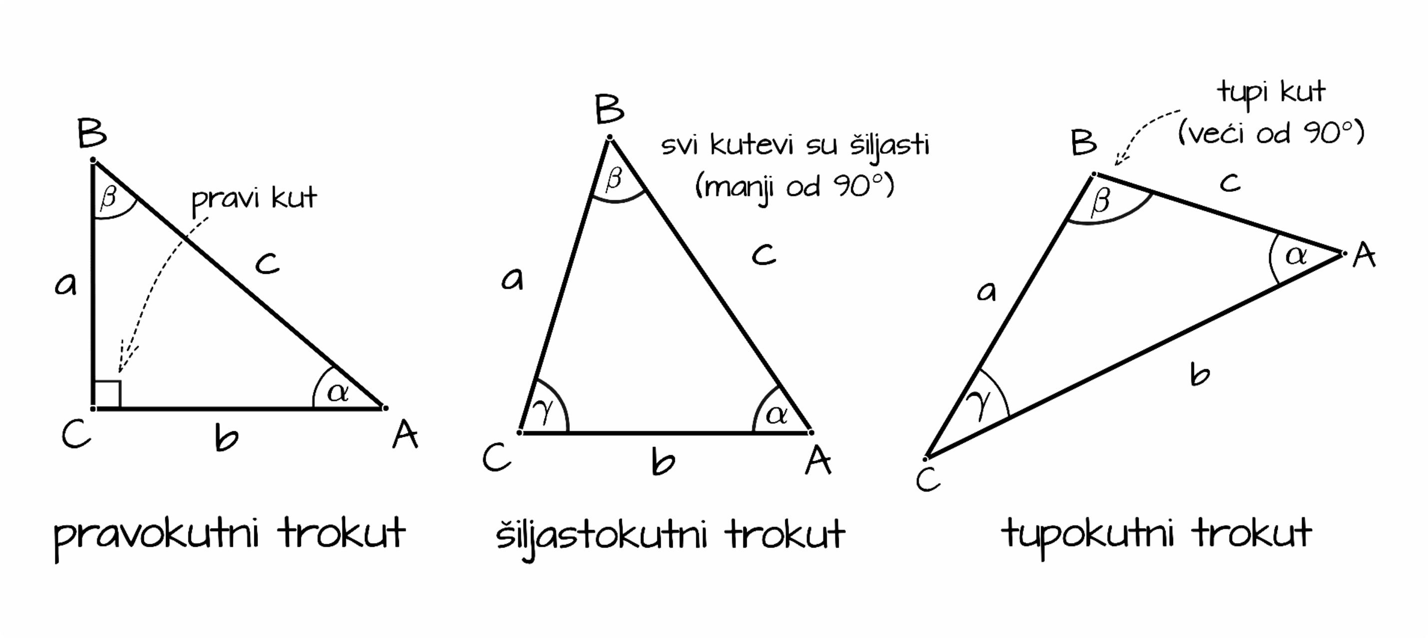


Vrste trokuta

Obzirom na duljine stranica u trokutu, razlikujemo 3 trokuta: jednakostranični (sve stranice su jednake duljine), jednakokračni (dvije stranice su jednake duljine) i raznostranični (sve stranice su različite duljine).



Obzirom na veličine kuteva, opet imamo 3 vrste: pravokutni (ima jedan pravi kut), šiljastokutni (svi kutevi su šiljasti) i tupokutni (ima jedan tupi kut).



Svojstva trokuta

- Zbroj duljina bilo koje dvije stranice trokuta mora biti veći od duljine treće stranice trokuta (nejednakost trokuta).
- Zbroj unutarnjih kuteva u trokutu iznosi 180°.
- Što je kut veći, nasuprotna stranica je duža. Što je stranica trokuta duža, to je nasuprotni kut veći.
- Vanjski kutovi trokuta su kutevi koji se nalaze uz unutarnje kuteve, a računaju se kao $\alpha' = 180^\circ - \alpha$, $\beta' = 180^\circ - \beta$ i $\gamma' = 180^\circ - \gamma$. (pogledajte prvu sliku)
- Zbroj vanjskih kutova trokuta iznosi 360°.
- Opseg trokuta je zbroj svih stranica tog trokuta, odnosno $O = a + b + c$, gdje su a, b i c stranice trokuta.
- Svaki trokut ima tri visine. Visina je okomica iz vrha trokuta na nasuprotnu stranicu.
- Površina trokuta računa se formulom $P = \frac{a \cdot v_a}{2}$, gdje je a bilo koja stranica trokuta, a v_a visina na tu stranicu.
  Još neke formule za površinu trokuta:
  - Heronova formula: $P = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}$ gdje je s poluopseg odnosno $s = \frac{a+b+c}{2}$
  - $P = r \cdot s = \frac{abc}{4R}$, gdje je r središte trokutu upisane kružnice, a R središte opisane kružnice

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

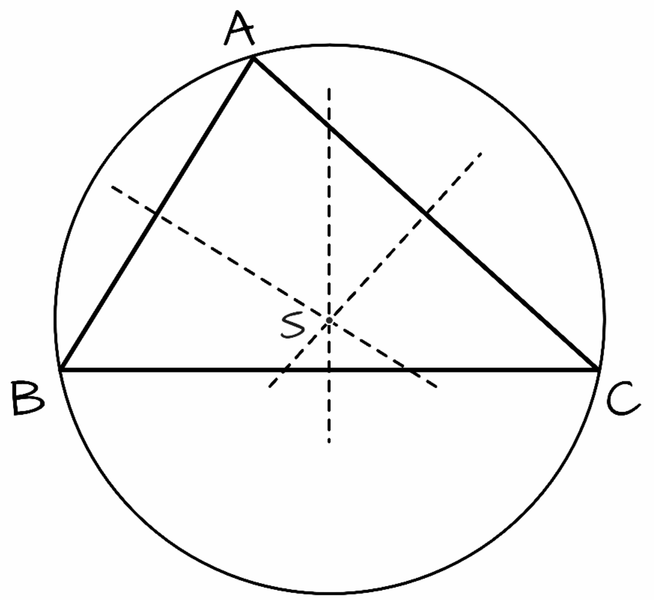
$$\alpha' + \beta' + \gamma' = 360^\circ$$

$$O = a + b + c$$

$$P = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{b \cdot v_b}{2} = \frac{c \cdot v_c}{2}$$

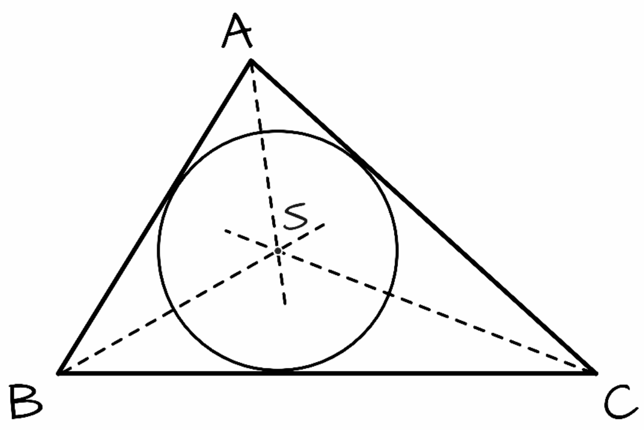
Karakteristične točke trokuta

- središte opisane kružnice - točka u kojoj se sijeku simetrale stranica trokuta. Simetrala dužine je pravac okomit na tu dužinu koji prolazi njezinim polovištem.



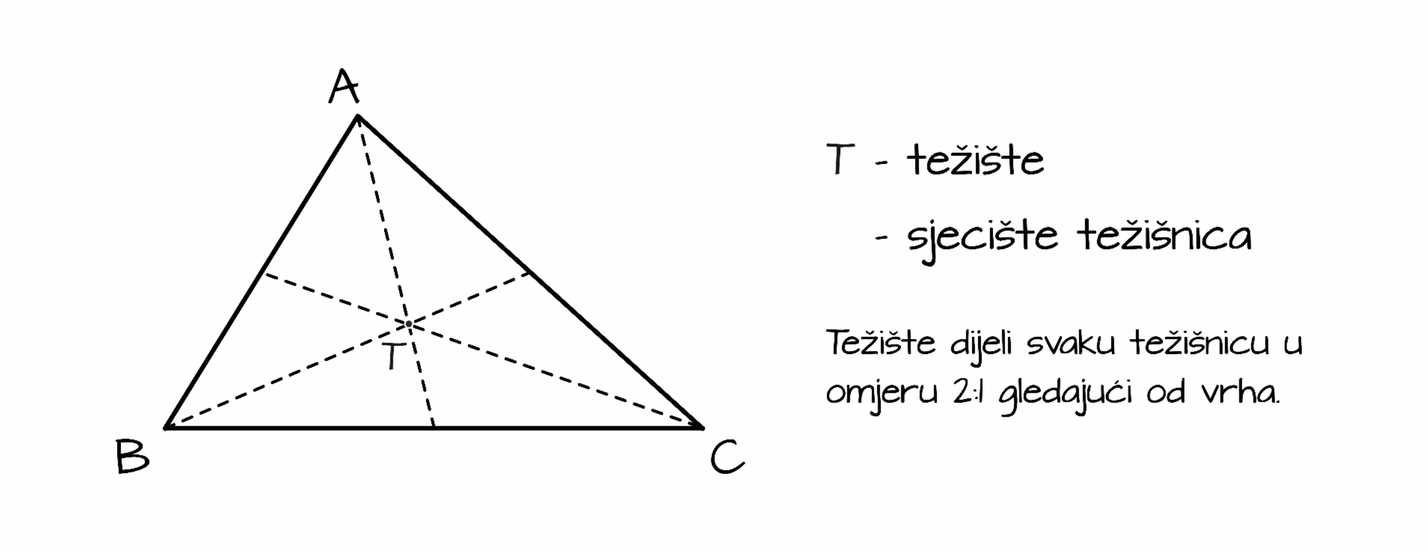
S - središte opisane kružnice
- sjecište simetrala stranica

• središte upisane kružnice - točka u kojoj se sijeku simetrale unutarnjih kutova trokuta. Simetrala kuta je polupravac, s početkom u vrhu kuta, koji taj kut dijeli na dva jednaka dijela.

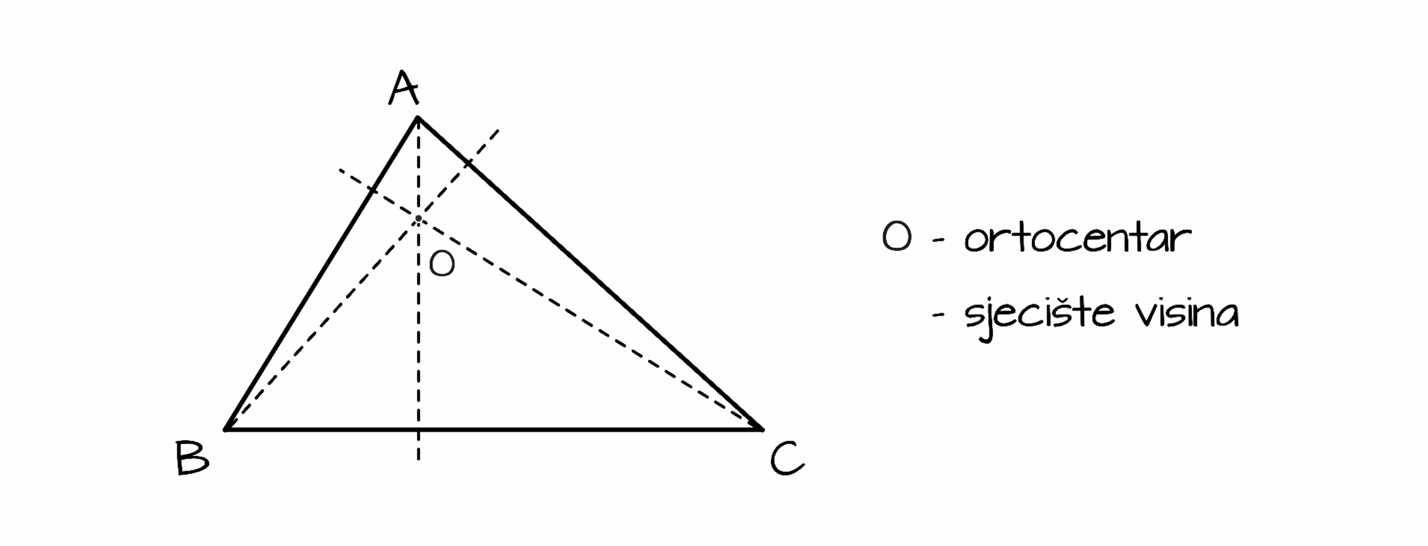


S - središte upisane kružnice
- sjecište simetrala kuteva

• težište - točka u kojoj se sijeku težišnice trokuta. Težišnica je dužina koja spaja vrh trokuta s polovištem nasuprotne stranice. Težište dijeli težišnicu u omjeru 2:1 gledajući od vrha trokuta.



• ortocentar - točka u kojoj se sijeku pravci na kojima leže visine trokuta



Ova skripta je free jer svi mi volimo besplatne stvari!
Ako želiš toga još, **skeniraj ovaj QR kod** i isprobaj besplatno ostale materijale na našoj stranici.

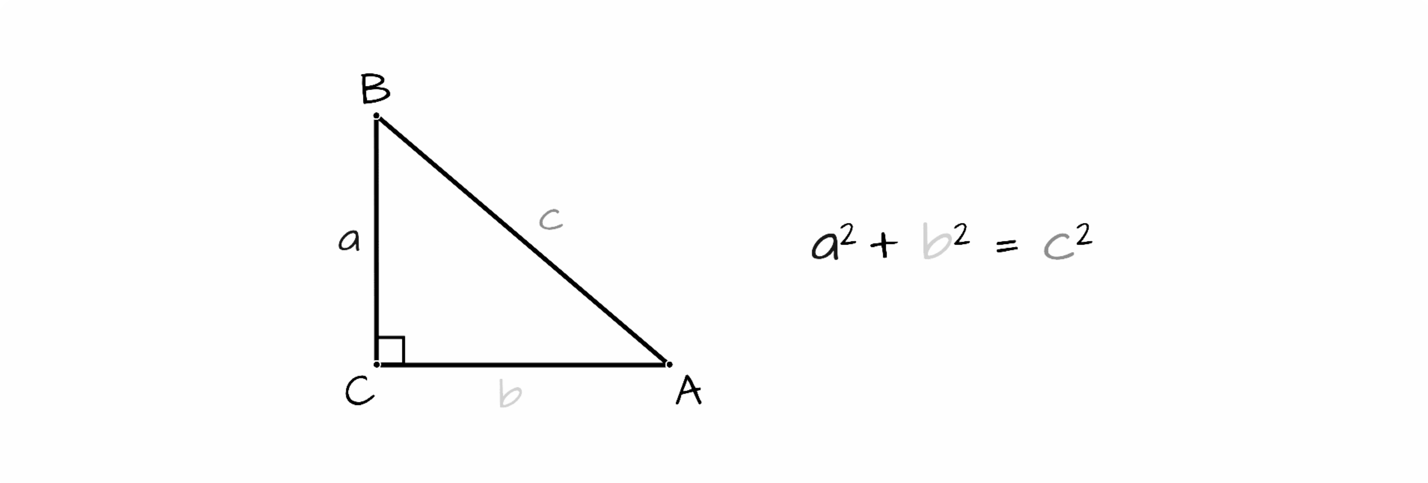
Pravokutni trokut

Pravokutni trokut je trokut koji ima jedan pravi kut. To odmah povlači da je zbroj druga dva kuta 90°. Stranice uz pravi kut se zovu katete, a stranica nasuprot pravom kutu, najduža stranica, se zove hipotenuza.

Kako su katete okomite, površina pravokutnog trokuta se može računati i prema sljedećoj formuli, gdje su a i b katete:

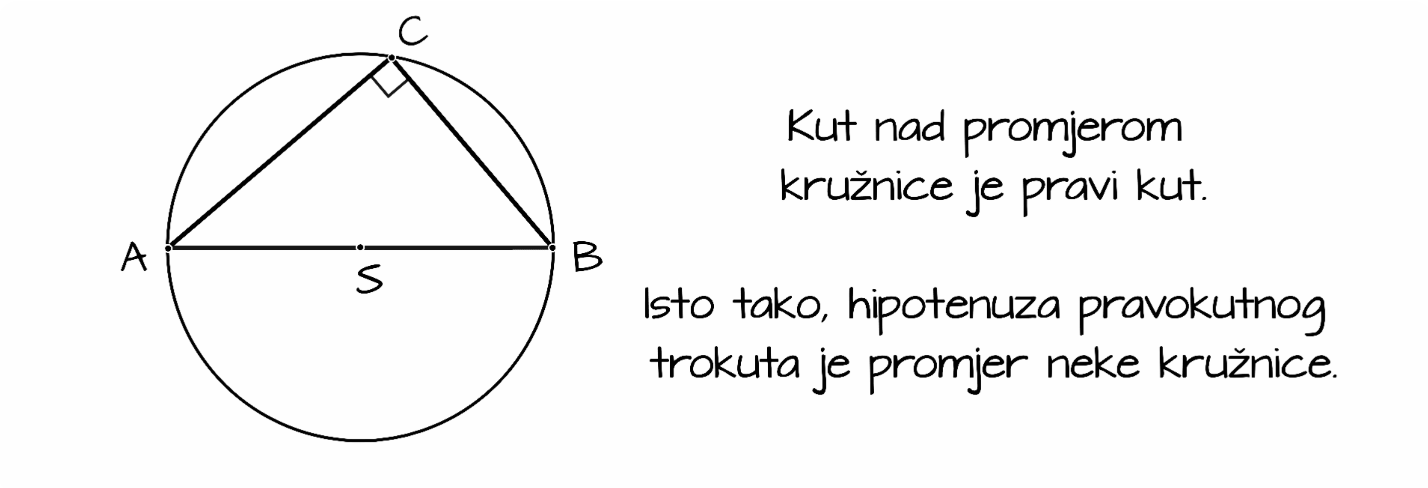
$$P = \frac{a \cdot b}{2}$$

Pitagorin poučak

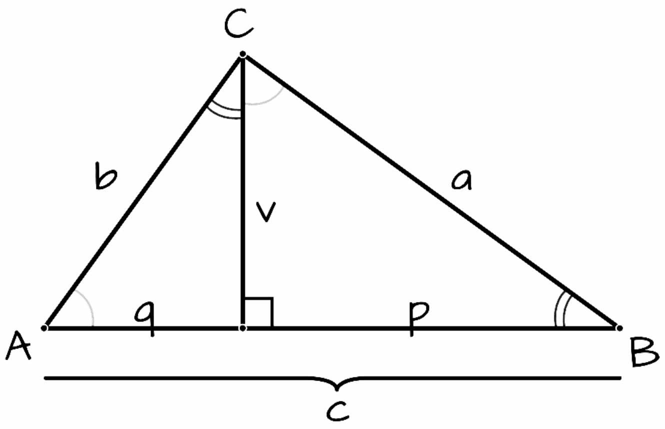


$$a^2 + b^2 = c^2$$

Talesov poučak



Euklidov poučak



$$a = \sqrt{cp}$$

$$b = \sqrt{cq}$$

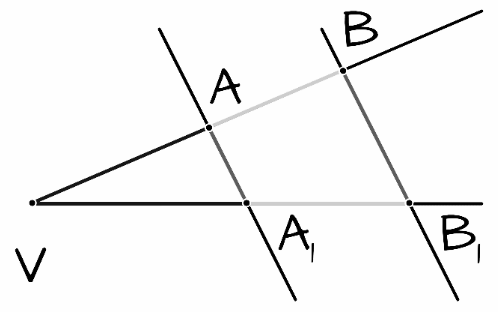
$$v = \sqrt{pq}$$

Sviđa ti se što vidiš? E pa ima toga još! **Skeniraj QR kod** pored i pretplati se na pripreme za maturu koje su ti uvijek dostupne, u neograničenim količinama!

Sukladnost i sličnost

Talesov teorem o proporcionalnosti dužina

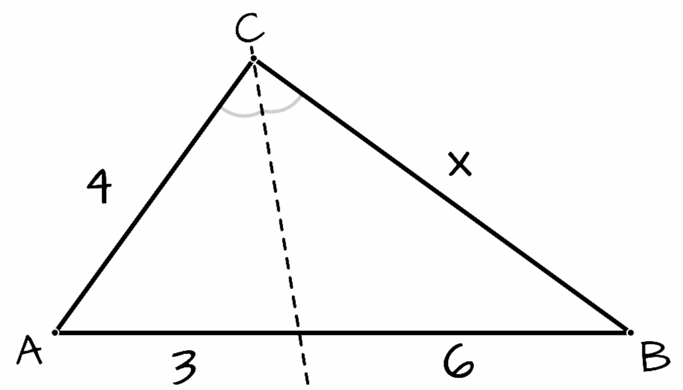
Ako krakove nekog kuta presječemo paralelnim pravcima, dužine koje dobijemo na jednom kraku proporcionalne su dužinama koje dobijemo na drugom kraku. Vrijedi i obratno.



$$\frac{|VA|}{|VB|} = \frac{|VA_1|}{|VB_1|} \quad \frac{|AB|}{|VA|} = \frac{|A_1B_1|}{|VA_1|} \quad \frac{|VA|}{|VB|} = \frac{|A_1A|}{|B_1B|}$$

Poučak o simetrali kuta

Simetrala kuta dijeli nasuprotnu stranicu u omjeru preostalih dviju stranica.



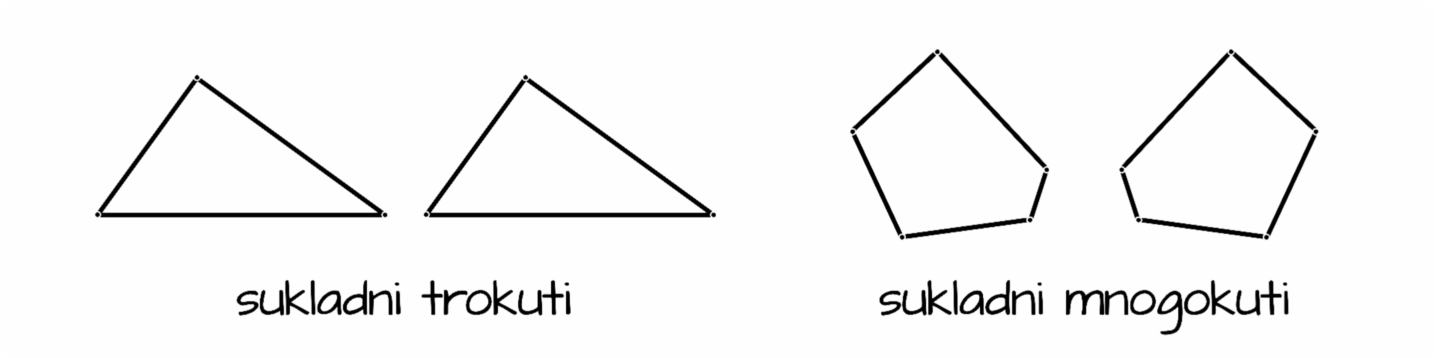
$$\frac{3}{6} = \frac{4}{x}$$

$$x = 8$$

Sukladnost trokuta

Dva su trokuta, ili općenito dva geometrijska lika, sukladna ako jedan možemo dovesti u drugi tako da se potpuno poklapaju. Drugim riječima, ako su isti, ali na drugom mjestu u prostoru. Za odrediti sukladnost trokuta koristimo 3 poučka, ovisno o elementima koji su isti u oba trokuta. Ako su stranice i/ili kutevi iz poučaka isti, onda će trokuti biti sukladni. Za sukladnost dvaju trokuta je potrebno pronaći barem tri elementa u kojima se oni poklapaju.

- S-K-S poučak: dvije stranice i kut između njih su sukladni (isti)
- K-S-K poučak: jedna stranice i kutovi uz tu stranicu su sukladni
- S-S-S poučak: sve tri stranice su sukladne



Sličnost trokuta

Dva su trokuta slična ako su im sva tri kuta istih veličina. Drugim riječima, ako likovi izgledaju "isto", ali je jedan veća ili manja verzija drugog.

Koeficijent sličnosti, oznake k, je omjer duljina odgovarajućih stranica, opsega, visina ili težišnica. Kod površine k moramo kvadrirati.

$$k = \frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|B'C'|}{|BC|} = \frac{|A'C'|}{|AC|}$$

$$k = \frac{o'}{o}$$

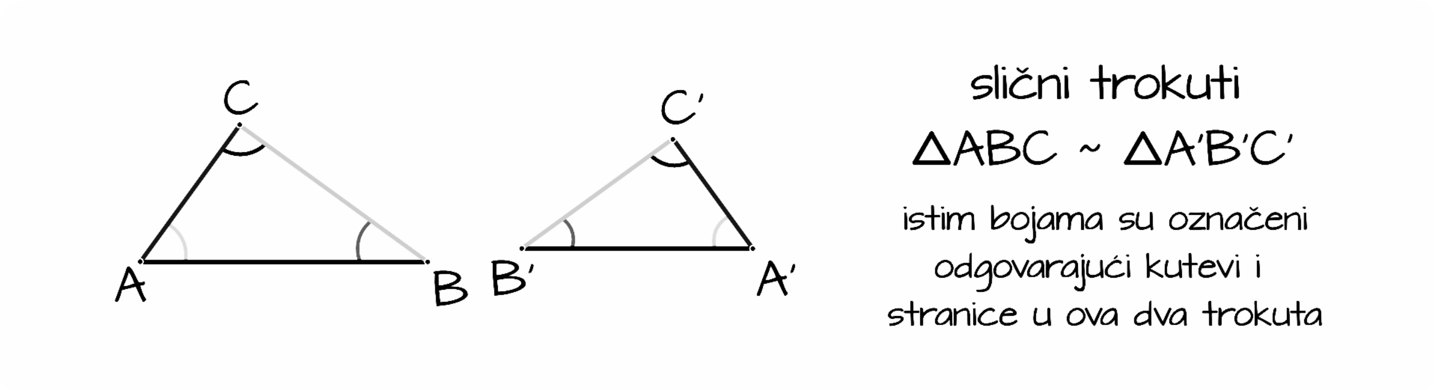
$$k = \frac{v_{a'}}{v_a} = \frac{v_{b'}}{v_b} = \frac{v_{c'}}{v_c}$$

$$k = \frac{t_{a'}}{t_a} = \frac{t_{b'}}{t_b} = \frac{t_{c'}}{t_c}$$

$$k^2 = \frac{P'}{P}$$

Za odrediti sličnost trokuta opet imamo 3 poučka koji, ako su zadovoljeni uvjeti, potvrđuju da su trokuti slični.

- S-S-S poučak: omjer duljina odgovarajućih stranica je isti za svaki par stranica iz većeg i manjeg trokuta, odnosno koeficijent sličnosti k je isti za svaki par stranica
- K-K poučak: dva sukladna kuta u oba trokuta
- S-K-S poučak: jedan kut sukladan, a stranice uz taj kut proporcionalne



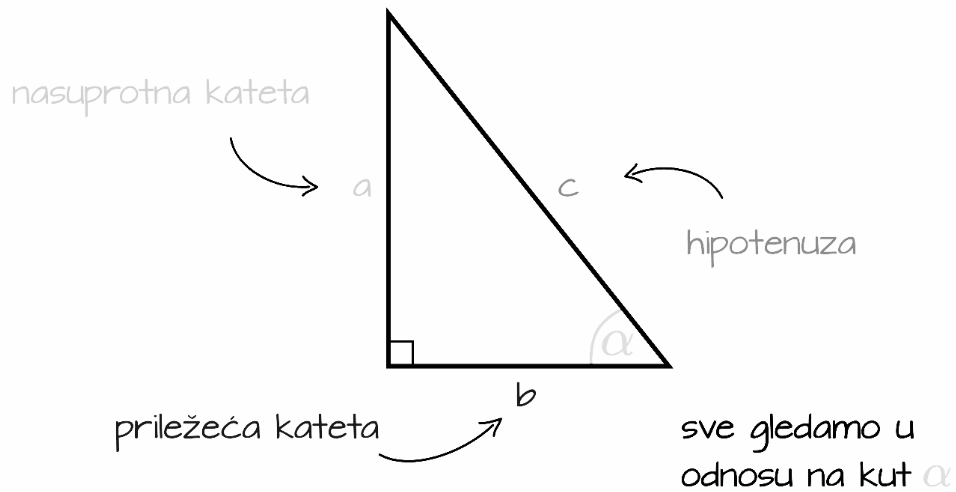
Trigonometrija u pravokutnom trokutu

Trigonometrijske omjere u pravokutnom trokutu ćemo raditi uzimajući u obzir položaj stranica u odnosu na neki šiljasti kut, dakle nikad ne gledamo u odnosu na pravi kut.

Hipotenuza je najduža stranica u trokutu, nalazi se nasuprot pravom kutu.

Priležeća kateta je ona koja se nalazi uz kut, a da nije hipotenuza.

Nasuprotna kateta je stranica nasuprot kutu kojeg gledamo, ona i kut se nikako "ne dodiruju".



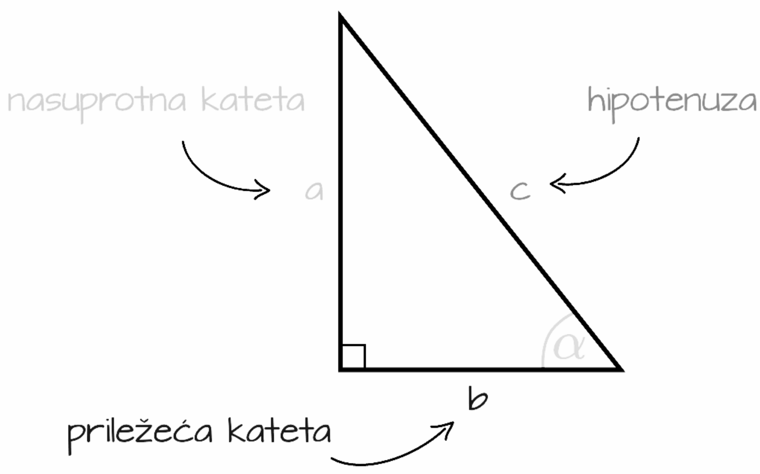
Trigonometrijski omjeri

Sinus je omjer nasuprotne katete i hipotenuze. Za kut α, oznaka je $\sin\alpha$.

Kosinus je omjer priležeće katete i hipotenuze. Za kut α, oznaka je $\cos\alpha$.

Tangens je omjer nasuprotne i priležeće katete. Za kut α, oznaka je $\operatorname{tg}\alpha$.

Kotangens je omjer priležeće i nasuprotne katete. Za kut α, oznaka je $\operatorname{ctg}\alpha$.



$$\sin\alpha = \frac{\text{nasuprotna k.}}{\text{hipotenuza}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{priležeća k.}}{\text{hipotenuza}} = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{nasuprotna k.}}{\text{priležeća k.}} = \frac{a}{b}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\text{priležeća k.}}{\text{nasuprotna k.}} = \frac{b}{a}$$

$$sin\alpha = \frac{a}{c}$$

$$cos\alpha = \frac{b}{c}$$

$$tg\alpha = \frac{a}{b}$$

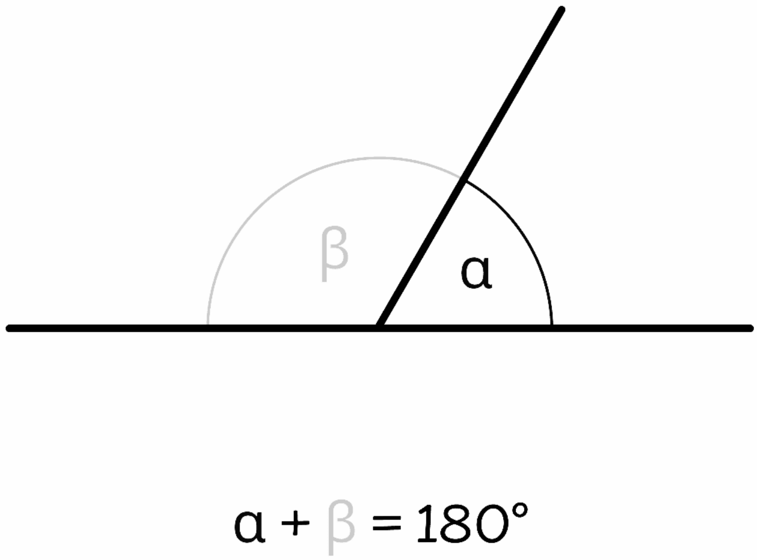
$$ctg\alpha = \frac{b}{a}$$

Tablica najčešćih kuteva i vrijednosti trigonometrijskih funkcija za njih.

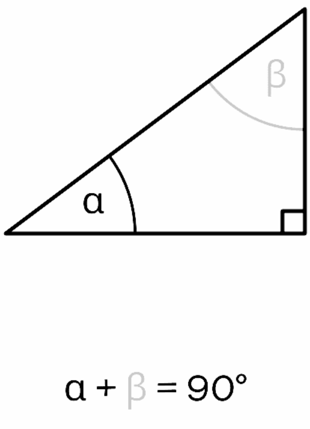
	30°	45°	60°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
ctg	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Kut

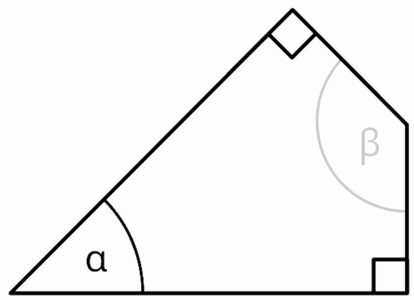
Dva su kuta sukuti ili susjedni kutovi ako imaju jedan zajednički krak, a drugi su im kraci suprotni polupravci istog pravca. Takvi kutovi zajedno čine ispruženi kut.



Dva su kuta komplementarna ako zajedno čine pravi kut odnosno ako zbroju iznose 90°.

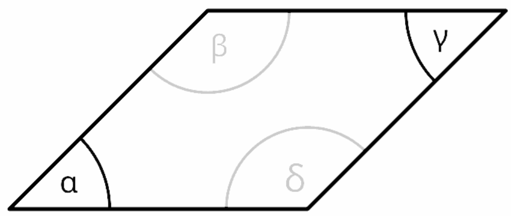


Dva su kuta suplementarna ako u zbroju iznose 180°. Suplementarni kutovi mogu, ali i ne moraju biti sukuti.



$$\alpha + \beta = 180°$$

Dva su kuta sukladna ako imaju istu mjeru.



$$\alpha \cong \gamma$$
$$\beta \cong \delta$$

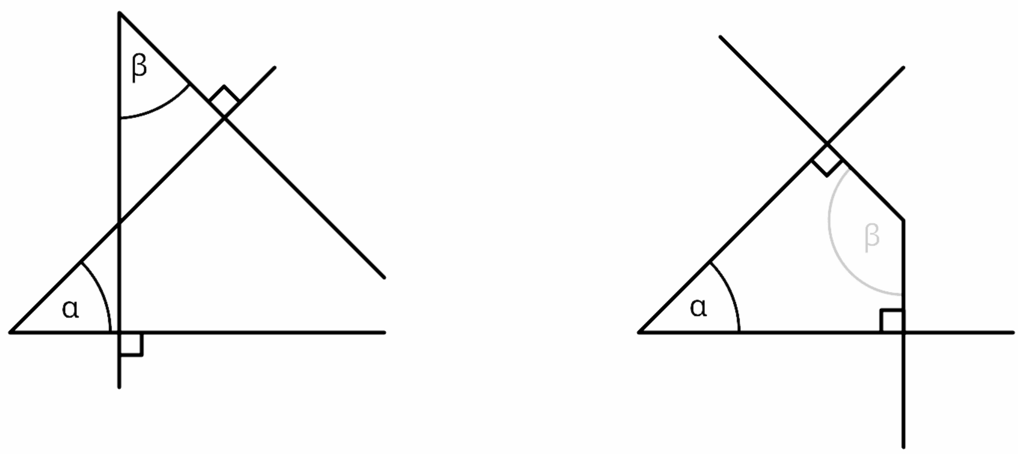
Kutovi s paralelnim kracima

Ako dva kuta imaju paralelne krakove, tada su oni ili sukladni ili suplementarni.

$\alpha \cong \beta$ $\qquad$ $\alpha + \beta = 180°$

Kutovi s okomitim kracima

Ako dva kuta imaju okomite krakove, tada su oni ili sukladni ili suplementarni.

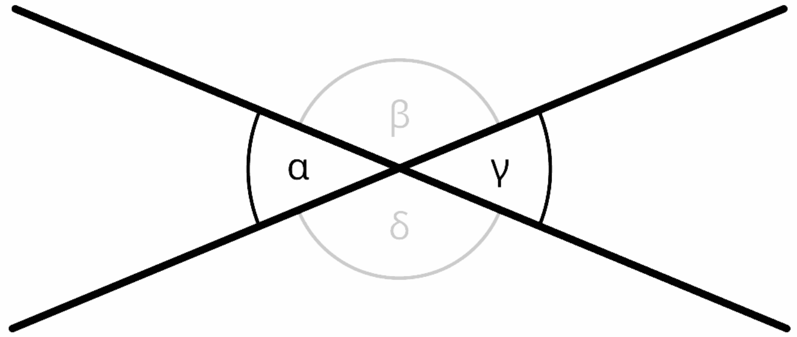


$\alpha \cong \beta$ $\qquad$ $\alpha + \beta = 180°$

Poučak o vršnim kutovima

Dva pravca koja se sijeku određuju dva para međusobno sukladnih kutova.

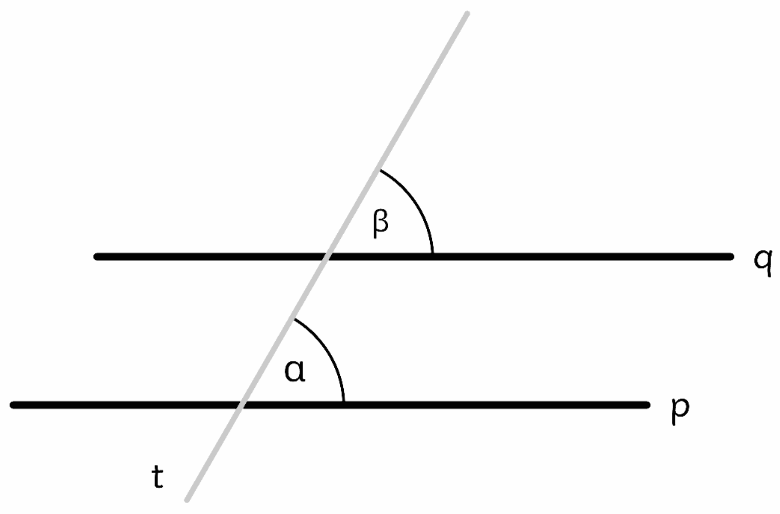
Te sukladne kutove zovemo vršnim kutovima. Dakle, vršni kutovi su kutovi jednakih veličina koji imaju zajednički vrh, a kraci su im suprotni polupravci istog pravca.



$$\alpha \cong \gamma$$
$$\beta \cong \delta$$

Poučak o kutovima uz transverzalu

Neka su p i q paralelni pravci i neka je t (transverzala) pravac koji siječe te paralelne pravce. Pravac t s pravcima p i q određuje sukladne kutove.



$$\alpha \cong \beta$$

ČETVEROKUTI

Kvadrat i pravokutnik

Pravokutnik je četverokut s 4 prava kuta.
Kvadrat je četverokut sa 4 prava kuta i 4 stranice jednake duljine.

Svojstva

Kako kvadrat ima 4 prava kuta, isto kao i svaki pravokutnik, zaključujemo da je kvadrat ujedno i pravokutnik.

Za pravokutnik i kvadrat vrijede određena svojstva:

- svi unutarnji kutovi su pravi, tj. iznose 90°
- nasuprotne stranice jednakih su duljina
- nasuprotne stranice su paralelne
- dijagonale su jednakih duljina
- dijagonale se međusobno raspolavljaju

Za kvadrat, dodatno, vrijedi:

- sve stranice su iste duljine
- dijagonale se sijeku pod pravim kutom

Opseg i površina

$$O_{kvadrat} = 4a$$

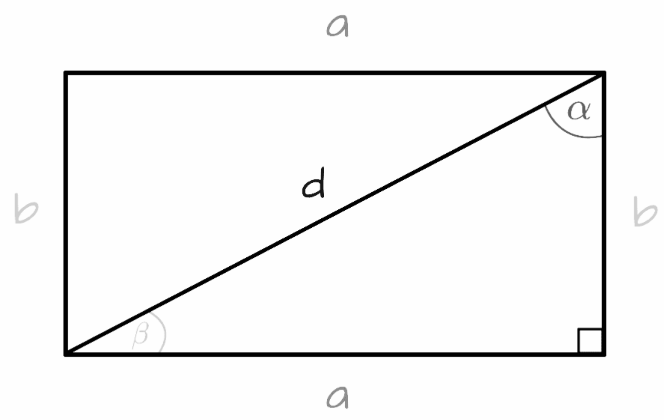
$$O_{pravokutnik} = 2a + 2b$$

$$P_{kvadrat} = a^2$$

$$P_{pravokutnik} = ab$$

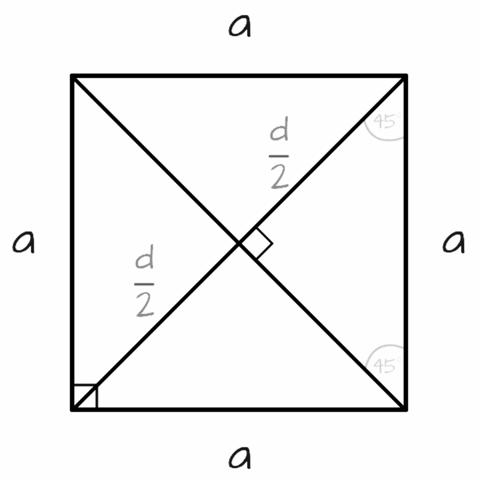
Pravokutni trokut u kvadratu i pravokutniku

U kvadratu i pravokutniku, pravokutne trokute dobivamo povlačenjem dijagonala.



$$d^2 = a^2 + b^2$$

Dodatno, u kvadratu pravokutne trokute dobivamo i ako povučemo obje dijagonale.



$$d = a\sqrt{2}$$

Trigonometrijski omjeri u pravokutniku:

$$\sin\alpha = \frac{a}{d} \quad \sin\beta = \frac{b}{d}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{d} \quad \cos\beta = \frac{a}{d}$$

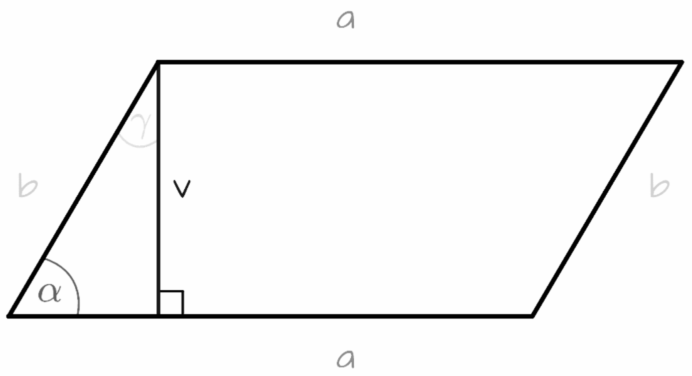
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a}$$

Romb, paralelogram i trapez

Paralelogram

Paralelogram je četverokut kojemu su nasuprotne stranice paralelne. To ujedno znači da su i pravokutnik i kvadrat paralelogrami.

- Nasuprotne stranice paralelograma usporedne su i jednakih su duljina.
- Dijagonale paralelograma raspolavljaju se. Nisu jednake duljine.
- Nasuprotni kutevi paralelograma jednakih su veličina.
- Susjedni kutevi paralelograma u zbroju daju $180°$. Zbroj svih unutarnjih kuteva je $360°$.



$$P = a \cdot v_a = ab \cdot sin\alpha$$

$$e^2 + f^2 = 2\left(a^2 + b^2\right)$$

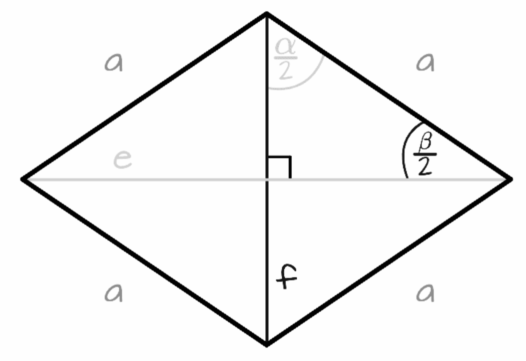
$$\sin\alpha = \cos\gamma = \frac{v}{b} \quad ; \quad \cos\alpha = \sin\gamma = \frac{v}{b}$$

U formulama, e i f predstavljaju dijagonale paralelograma, a kut φ je manji kut između dijagonala.

Romb

Romb je paralelogram kojemu su sve stranice jednake duljine.

- Kako je romb ujedno i paralelogram, za njega vrijede sva gornja svojstva.
- Dodatno, dijagonale se sijeku pod pravim kutem, pa su trokuti koji tako nastanu pravokutni, što znači da možemo koristiti Pitagoru i trigonometriju pravokutnog trokuta.



$$P = av = \frac{ef}{2}$$

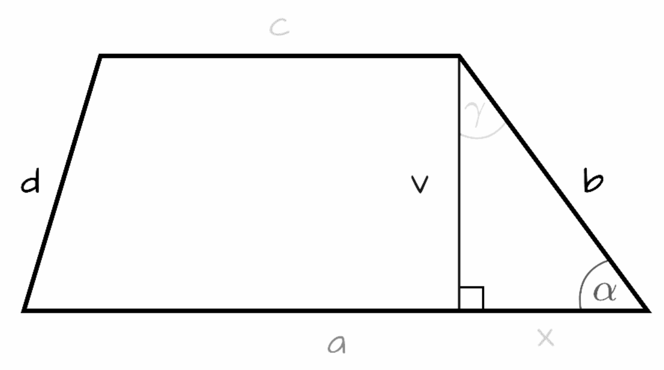
$$\sin\frac{\alpha}{2} = \cos\frac{\beta}{2} = \frac{e/2}{a} \quad ; \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \sin\frac{\beta}{2} = \frac{f/2}{a}$$

$$\left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2 = a^2$$

Trapez

Trapez je četverokut s dvije usporedne nasuprotne stranice. One se nazivaju osnovice, a druge dvije stranice su krakovi. Udaljenost između dviju osnovica zove se visina.

- Zbroj kuteva uz krak trapeza je $180°$. Zbroj svih unutarnjih kuteva trapeza je $360°$.
- Posebna vrsta trapeza je takozvani jednakokračni trapez. Njegovi krakovi su jednakih duljina, a kutevi uz osnovice jednakih veličina.
- Drugi posebni slučaj je pravokutni trapez koji ima dva prava kuta uz jedan od krakova. Onda je taj krak ujedno i visina trapeza.
- Spuštanjem visina iz krajeva kraće osnovice, trapez dijelimo na pravokutnik i jedan ili dva pravokutna trokuta.



$$P = \frac{a+c}{2} \cdot v$$

$$\sin\alpha = \cos\gamma = \frac{v}{b} \quad ; \quad \cos\alpha = \sin\gamma = \frac{x}{b}$$

$$v^2 + x^2 = b^2$$

$$v^2 + \left(\frac{a-c}{2}\right)^2 = b^2$$

MNOGOKUTI

Mnogokuti

Mnogokut je bilo koji geometrijski lik s 3 ili više vrhova, odnosno stranica.

Mnogokut se sastoji od jednakog broja vrhova, stranica i kutova.

Dijagonala mnogokuta je dužina koja spaja dva nesusjedna vrha mnogokuta. Imamo formulu za broj dijagonala iz jednog vrha i formulu za ukupni broj dijagonala u mnogokutu.

Broj dijagonala iz jednog vrha u mnogokutu s n vrhova, oznaka je d_n.

$$d_n = n - 3$$

Ukupan broj dijagonala u mnogokutu s n vrhova, oznaka je D_n.

$$D_n = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$$

Zbroj veličina unutarnjih kutova mnogokuta, oznaka je K_n. Zbroj veličina vanjskih kutova mnogokuta iznosi 360°.

$$K_n = (n-2) \cdot 180^\circ$$

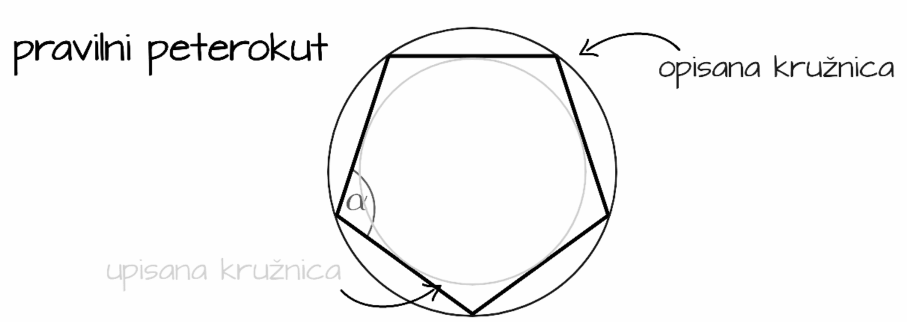
Pravilni mnogokuti

Pravilni mnogokut je mnogokut kojemu su sve stranice jednake duljine i svi kutovi jednake veličine.

Veličina unutarnjeg kuta α pravilnog mnogokuta računa se formulom:

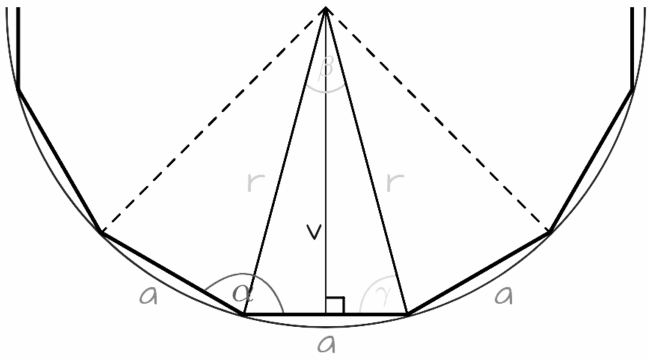
$$\alpha = \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$$

Pravilnim mnogokutima možemo opisati i upisati kružnicu. Opisana kružnica prolazi kroz sve vrhove mnogokuta, a upisana dodiruje "iznutra" sve stranice mnogokuta.



Karakteristični trokut

Karakteristični trokut pravilnog mnogokuta dobijemo tako da središte tog mnogokuta spojimo s dva susjedna vrha mnogokuta. Taj trokut je uvijek jednakokračan. Radijus (polumjer) opisane kružnice čini krakove, a stranica mnogokuta je ujedno i osnovica karakterističnog trokuta.



Kutovi karakterističnog trokuta

$$\alpha_n = 180° - \beta_{\mathrm{n}} = \frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$$

$$\beta_n = \frac{360°}{n}$$

$$\gamma_n = \frac{\alpha_n}{2}$$

Trigonometrija karakterističnog trokuta i Pitagorin poučak

$$\sin \gamma_n = \cos \frac{\beta_n}{2} = \frac{v}{r}$$

$$\cos \gamma_n = \sin \frac{\beta_n}{2} = \frac{a/2}{r}$$

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + v^2 = r^2$$

Opseg i površina pravilnog mnogokuta

$$O = n \cdot a$$

$$P = n \cdot \frac{a \cdot v}{2}$$

Prikazivanje i analiziranje podataka

Statistika je grana matematike koja prikuplja, analizira, tumači i prikazuje podatke.

Skup iz kojeg uzimamo podatke zove se populacija.

Frekvencija je broj pojavljivanja nekog podatka u promatranoj skupini (npr. broj učenika koji sviraju neki instrument). Udio podatka u cijeloj populaciji naziva se njegovom relativnom frekvencijom. Zbroj vrijednosti svih relativnih frekvencija u nekom skupu iznosi 1.

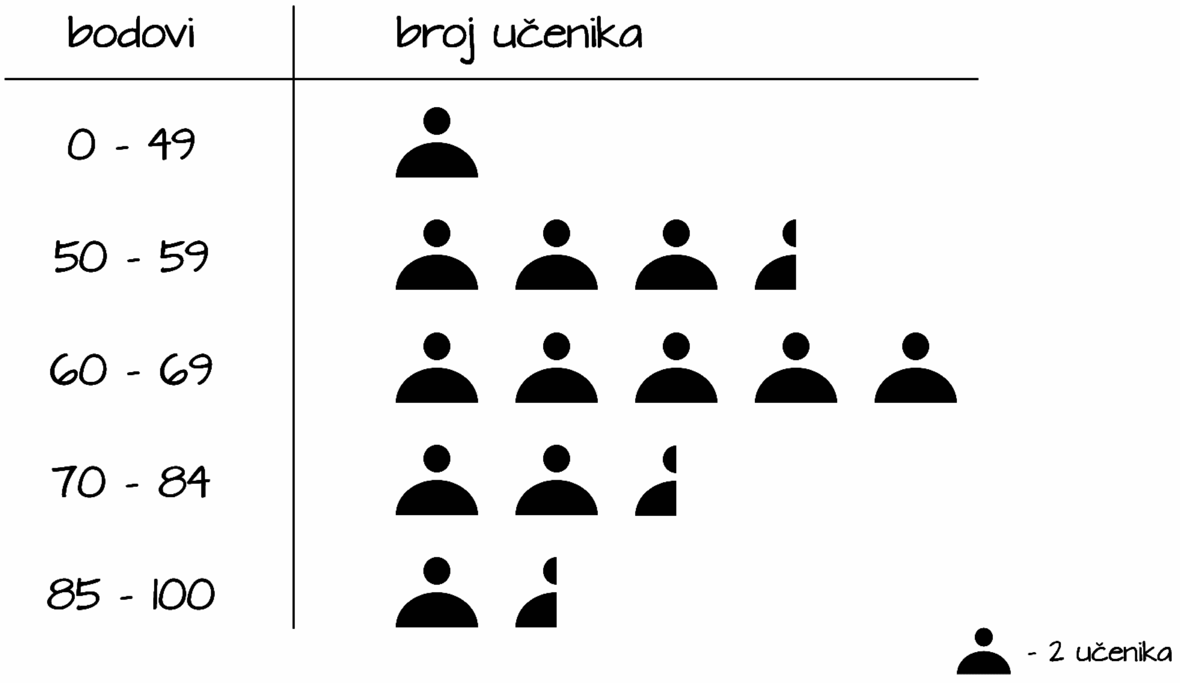
Prikaz podataka

Podatke možemo prikazivati:

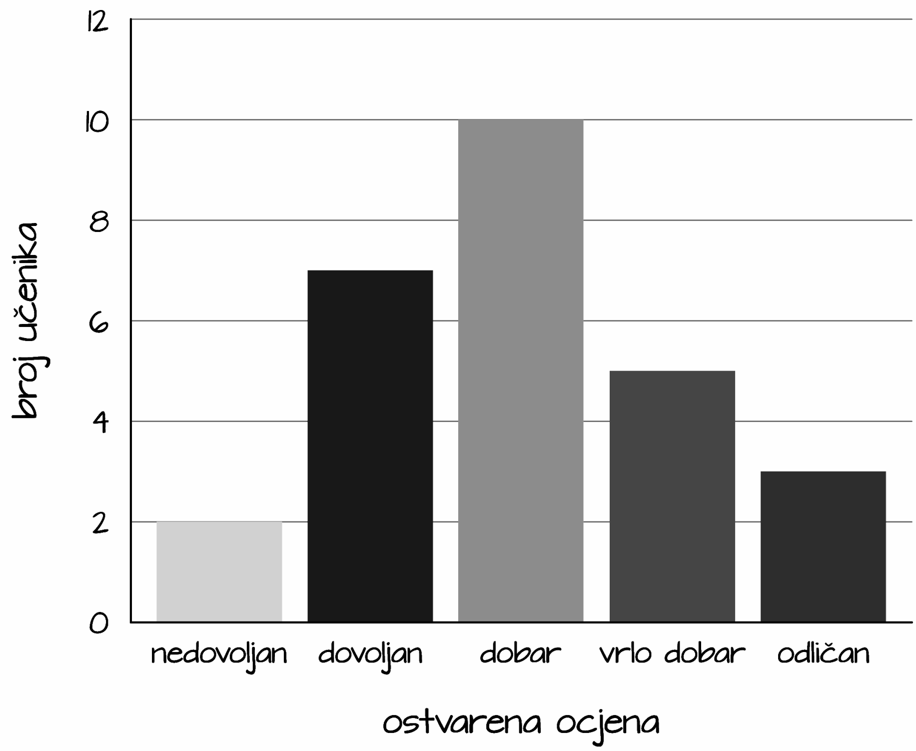
- tablicom (Prikazivanje podataka u obliku redaka i stupaca. Svaki redak predstavlja jedan podatak ili skup podataka, a svaki stupac kategoriju.)

ime i prezime	broj bodova	ocjena
Ante Starčević	50	2
Ljudevit Gaj	62	3
Nikola Šubić Zrinski	98	5
Ivana Brlić-Mažuranić	89	5
Marija Jurić Zagorka	55	2

- piktogramom (Prikaz podataka pomoću slika ili simbola, gdje svaki simbol predstavlja određenu količinu. Koristi se kad želimo prikazati podatke na vizualno jednostavan i razumljiv način.)



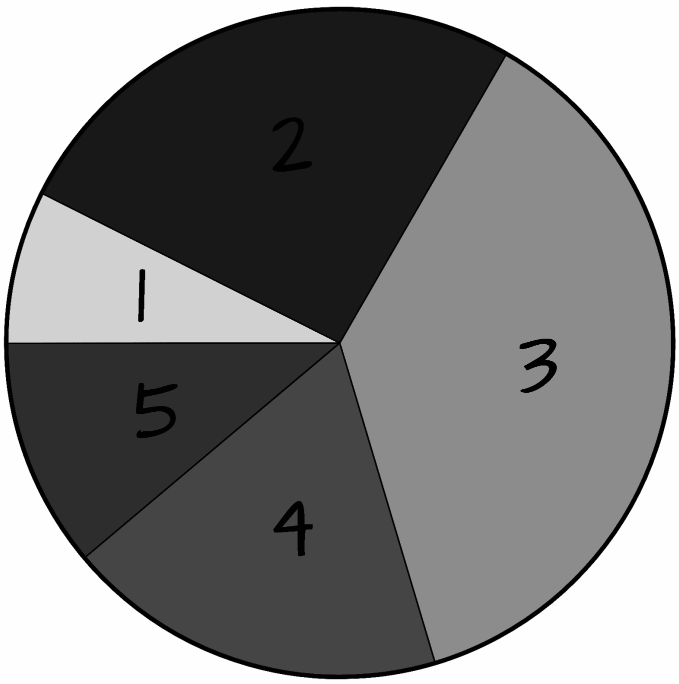
• stupičastim dijagramom (Prikaz podataka pomoću vertikalnih ili horizontalnih stupaca. Svaki stupac predstavlja jednu kategoriju ili skupinu, a visina ili dužina stupca pokazuje veličinu podataka. Često se koristi za usporedbu različitih skupina podataka.)



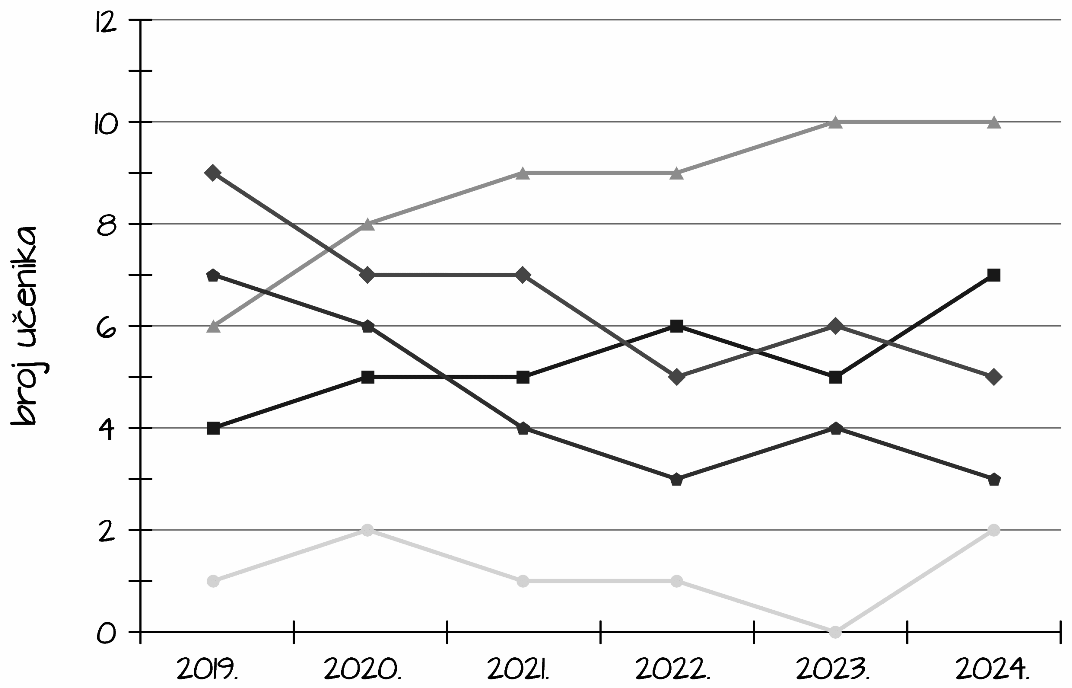
• dijagramom stablo - list (Grafički prikaz podataka koji se koristi za prikazivanje brojčanih podataka u formi stabla, gdje su listovi brojevi ili statistički podaci. Koristi se za organiziranje podataka u hijerarhiji i za prikazivanje odnosa među njima.)

stablo	list
1	7
3	8
5	0 3 3 5 5 7 9
6	1 2 2 4 4 5 6 7 8 9
7	3 5 6 7 8
8	9
9	3 8

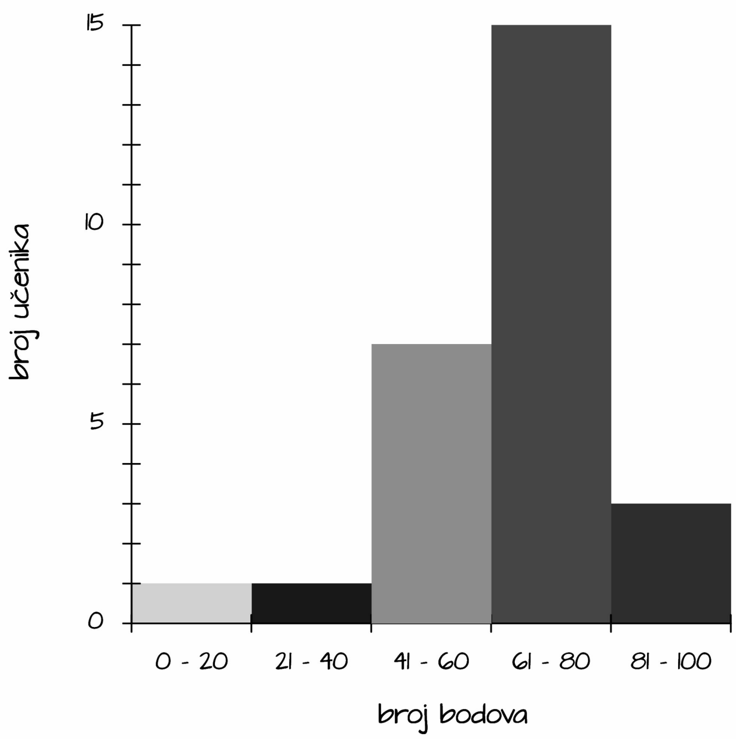
• kružnim dijagramom (Dijagram u obliku kruga koji je podijeljen na sektore, gdje svaki sektor predstavlja udio nekog dijela u odnosu na cijeli skup podataka. Koristi se za prikazivanje relativnih udjela.)



• linijskim dijagramom (Dijagram koji koristi linije povezane točkama za prikazivanje promjena podataka kroz vrijeme. Najčešće se koristi za prikazivanje trendova ili kretanja podataka tijekom vremena.)



- histogramom (Slično stupičastom dijagramu, ali koristi se za prikazivanje distribucije podataka unutar određenih intervala. Podaci se grupiraju u intervalima, a visina svakog stupca pokazuje koliko podataka spada u taj interval.)



Srednje vrijednosti

Neka su nam dani podatci: $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$.

Artimetička sredina ili prosječna vrijednost je zbroj svih podataka podijeljen s ukupnim brojem podataka. Oznaka je $\overline{x}$.

$$\overline{x} = \frac{x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n}{n}$$

Da bismo lakše shvatili pojmove u ovom poglavlju, koristit ćemo sljedeći niz podataka:

$$8, 7, 4, 3, 7, 6, 1, 2, 3, 7$$

Aritmetička sredina danog niza je:

$$\overline{x} = \frac{8+7+4+3+7+6+1+2+3+7}{10} = 4.8$$

Mod je najčešći podatak u nekom nizu podataka.
Mod danog niza je:

$$8, \underline{7}, 4, 3, \underline{7}, 6, 1, 2, 3, \underline{7} \Rightarrow 7$$

Medijan ili "srednji podatak" je broj koji sortirani niz brojeva dijeli na dva jednako duga podniza. Dakle, kada imamo neki niz podataka, podatke ćemo poredati po veličini. Ako je broj podataka neparan, medijan će biti točno srednji podatak u tom nizu, a ako je broj podataka paran, medijan će biti aritmetička sredina dvaju središnjih podataka. Oznaka za medijan je M_e.

Za navedeni niz podataka vrijedi:

$$1, 2, 3, 3, \underline{4}, \underline{6}, 7, 7, 7, 8$$

$$M_e = \frac{4+6}{2} = 5$$

Rekli smo da medijan dijeli niz podataka na dva jednakobrojna niza. Na taj način dobivamo i kvartile:

• prvi (donji) kvartil = medijan prve polovice niza odnosno "srednji" član tog dijela, Q_1

• drugi (srednji) kvartil = medijan početnog niza, Q_2

• treći (gornji) kvartil = medijan druge polovice niza podataka odnosno "srednji" član tog dijela, Q_3

Kvartili dijele niz podataka na četiri jednaka dijela.
Razlika između trećeg i prvog kvartila zove se interkvartilni raspon.

Brkata kutija

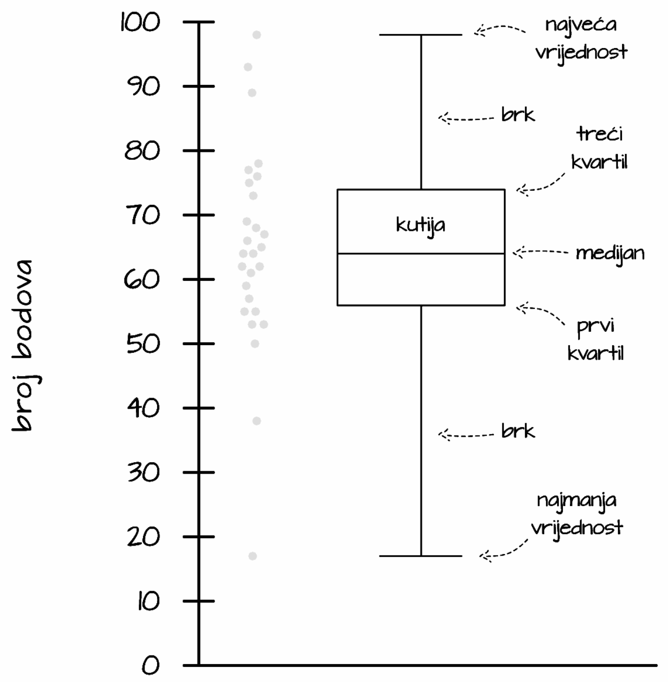
Ako želimo bolje prikazati skup podataka, možemo ih prikazati brkatom kutijom. Za to su nam potrebni sljedeći podatci:

• minimalna vrijednost svih podataka, X_{min}

• prvi kvartil, Q_1

• medijan (odnosno drugi kvartil), M_e (Q_2)

- treći kvartil, Q_3
- maksimalna vrijednost svih podataka, X_{max}



Mjere raspršenosti

Neka su nam dani podatci: $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$.

Raspon je razlika između najveće i najmanje vrijednosti u tom skupu podataka, tj. $R = x_{max} - x_{min}$.

Neka je aritmetička sredina danih podataka $\overline{x}$. Broj $x_i - \overline{x}$ je odstupanje vrijednosti podatka x_i od aritmetičke sredine.

Varijanca je mjera rasipanja podataka oko aritmetičke sredine te se definira kao prosječno kvadratno odstupanje od prosjeka. Oznaka je σ^2.

$$\sigma^2 = \frac{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+(x_3-\overline{x})^2+...+(x_n-\overline{x})^2}{n}$$

Standardna devijacija je korijen prosječnog kvadratnog odstupanja vrijednosti podataka od aritmetičke sredine. To je zapravo drugi korijen iz varijance. Oznaka je σ.

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+(x_3-\overline{x})^2+...+(x_n-\overline{x})^2}{n}}$$

Za dani niz podataka varijancu i standardnu devijaciju računamo kao:

$$\sigma^2 = \frac{(8 - 4.8)^2 + (7 - 4.8)^2 + \cdots + (7 - 4.8)^2}{10} = 6.1778$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = 2.4855$$

KVADRATNA FUNKCIJA

Kvadratna jednadžba

Kvadratna jednadžba

Kvadratna jednadžba je bilo koja jednadžba oblika $ax^2 + bx + c = 0$, gdje su a, b i c neki realni brojevi i $a \neq 0$.

ovo ju čini kvadratnom

$$ax^{2} + bx + c = 0$$

Brojeve a, b i c zovemo koeficijenti kvadratne jednadžbe. Redom, njihova imena su još vodeći, linearni i slobodni koeficijent.

$$\underline{2}x^2 + \underline{5}x \underline{-3} = 0$$

$$a = 2 \qquad b = 5 \qquad c = -3$$

Rješenja kvadratne jednadžbe

Za dobivanje rješenja kvadratne jednadžbe koristimo kalkulator ili formulu:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x^2 \underline{-3}x = 0$$

1

$$a = 1 \qquad b = -3 \qquad c = 0$$

Diskriminanta kvadratne jednadžbe

Diskriminanta je broj D kojeg računamo formulom:

$$D = b^2 - 4ac$$

Diskriminanta utječe na broj i vrstu rješenja kvadratne jednadžbe. Imamo 3 slučaja:

- $D > 0 \implies$ dva različita rješenja koja su realni brojevi
- $D = 0 \implies$ jedno dvostruko rješenje, realan broj
- $D < 0 \implies$ dva različita rješenja, kompleksno konjugirani brojevi

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Diskriminanta
$D = b^2 - 4ac$

Vietove formule

Ako sa x_1 i x_2 označimo rješenja kvadratne jednadžbe, a a, b i c su koeficijenti kvadratne jednadžbe kao prije, onda vrijedi:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad ; \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Ako su nam poznata rješenja x_1 i x_2 kvadratne jednadžbe $ax^2 + bx + c = 0$, tada svaki kvadratni trinom $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) možemo faktorizirati kao:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Bikvadratna jednadžba

Bikvadratna jednadžba je jednadžba oblika $ax^4 + bx^2 + c = 0$, gdje su a, b i c realni brojevi.

Rješavamo ju supstitucijom (zamjenom) $t = x^2$. Time dobivamo kvadratnu jednadžbu $at^2 + bt + c = 0$ kojoj znamo izračunati rješanja. Nakon što dobijemo t_1 i t_2, do rješenja početne jednadžbe dolazimo iz jednadžbi $x^2 = t_1$ i $x^2 = t_2$. Bikvadratna jednadžba može imati nula, dva ili četiri rješenja.

Kvadratna funkcija

Kvadratna funkcija ili polinom drugog stupnja je svaka funkcija oblika $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdje su a, b i c realni brojevi i $a \neq 0$.

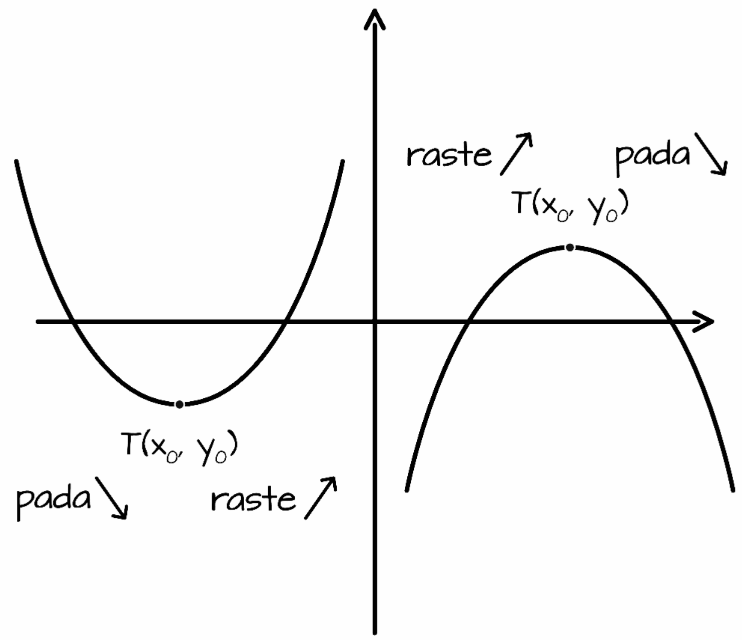
Parabola je ime za graf kvadratne funkcije.

Tjeme parabole T s koordinatama (x_0, y_0) je "najisturenija" točka parabole, a koordinate dobivamo formulom:

$$x_0 = -\frac{b}{2a} \quad i \quad y_0 = \frac{4ac-b^2}{4a}$$

Kažemo da kvadratna funkcija ima minimum/maksimum u x_0, a da je vrijednost tog minimuma/maksimuma broj y_0.

U slučaju minimuma, kvadratna funkcija će se prvo spuštati do tjemena, odnosno padati, a onda uspinjati, odnosno rasti. Kod maksimuma je obrnuto, prvo rastemo do tjemena, a onda padamo.

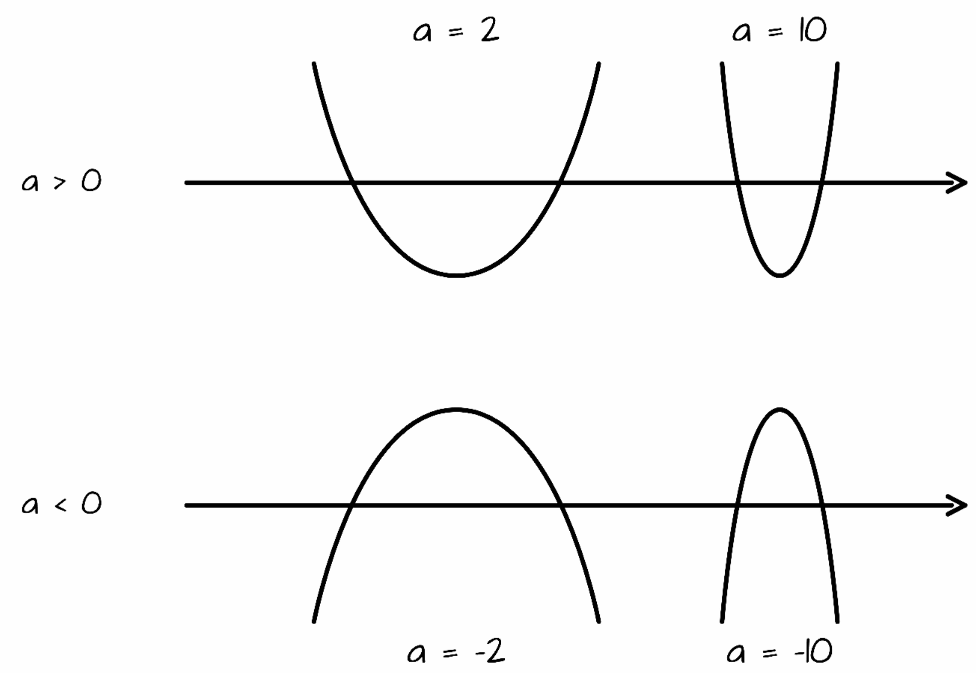


Vodeći koeficijent

Vodeći koeficijent, odnosno broj a koji se nalazi ispred x^2 određuje hoće li parabola biti okrenuta otvorom prema gore ili prema dolje.

- $a > 0 \implies$ otvor okrenut prema gore, tj. a je pozitivan pa se parabola "smije" :)
- $a < 0 \implies$ otvor okrenut prema dolje, tj. a je negativan pa je parabola "tužna" :(

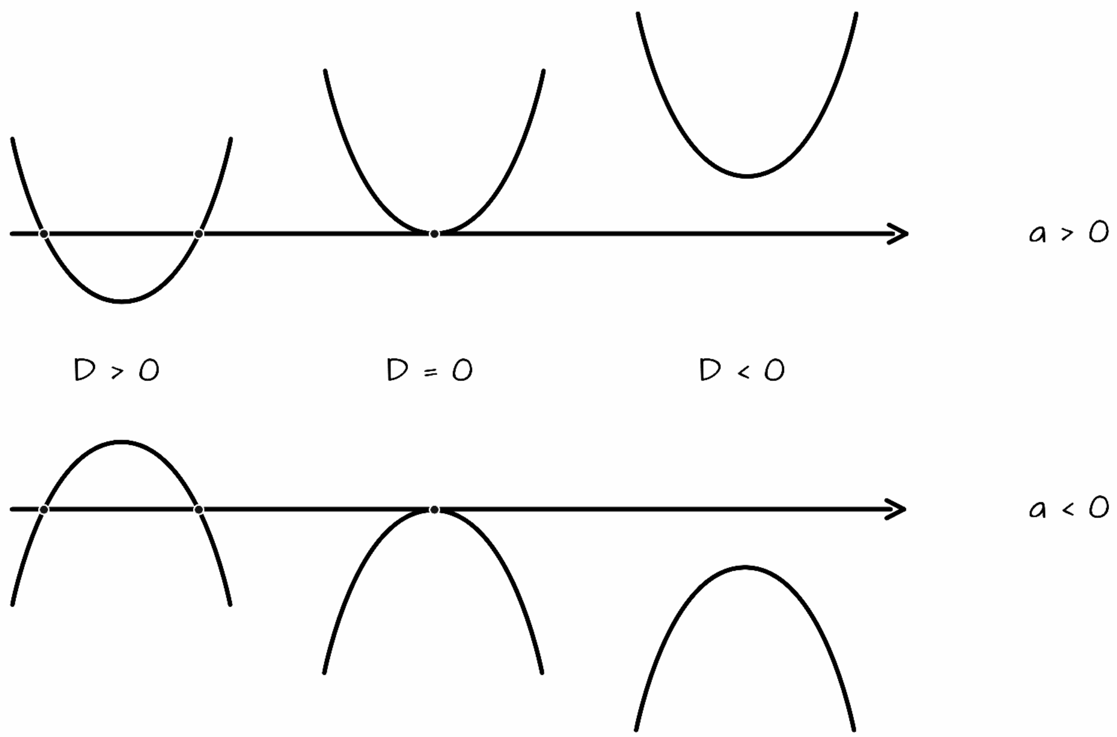
Druga stvar, ako ne gledamo predznak ispred broja a, što je on veći po svojoj vrijednosti, to je parabola uža.



Diskriminanta

Slično kao u prošloj lekciji, diskriminanta će nam govoriti koliko imamo nultočki na grafu kvadratne funckije. Formula je ista $D = b^2 - 4ac$.

Zajedno s vodećim koeficijentom, diskriminanta nam može dati jako dobro ideju o izgledu i položaju same parabole.



Nultočke kvadratne funkcije

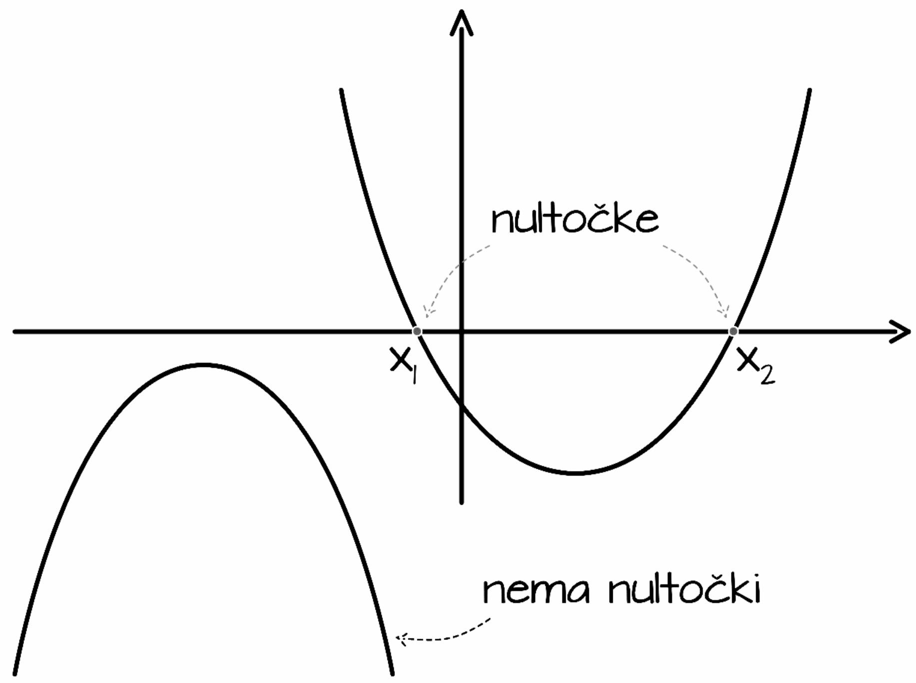
Nultočkama kvadratne funkcije $f(x) = ax^2 + bx + c$ ćemo zvati brojeve x_1 i x_2, ili samo jedan od njih, za koje vrijedi $f(x_1) = f(x_2) = 0$. Drugim riječima, nultočke će biti oni x-evi koji su rješenje kvadratne jednadžbe $ax^2 + bx + c = 0$.

Ako su nam poznata rješenja kvadratne jednadžbe, odnosno nultočke funkcije, pripadnu kvadratnu funkciju možemo zapisati i u drugom obliku: $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Kada crtamo, to će biti oni x-evi gdje graf siječe x-os.

Preko nultočki također možemo doći i do tjemena parabole $T(x_0, y_0)$.

$$x_0 = \frac{x_1+x_2}{2} \quad i \quad y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$$



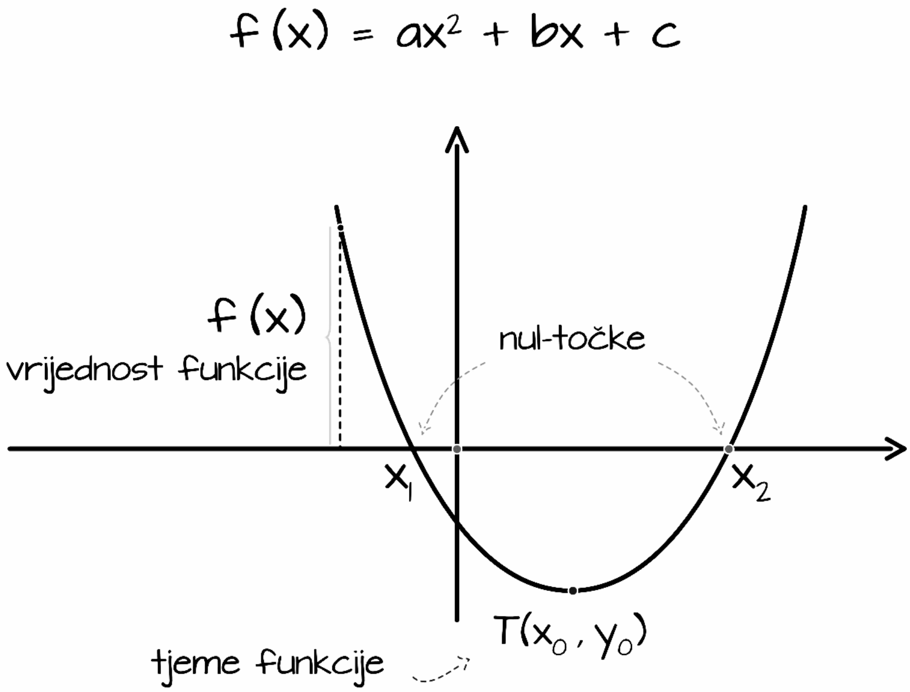
Crtanje grafa kvadratne funkcije

Parabolu ćemo crtati u 3 koraka.

1. Odredimo nultočke kvadratne funkcije.

2. Odredimo koordinate tjemena preko jedan od dva, gore spomenuta, načina.

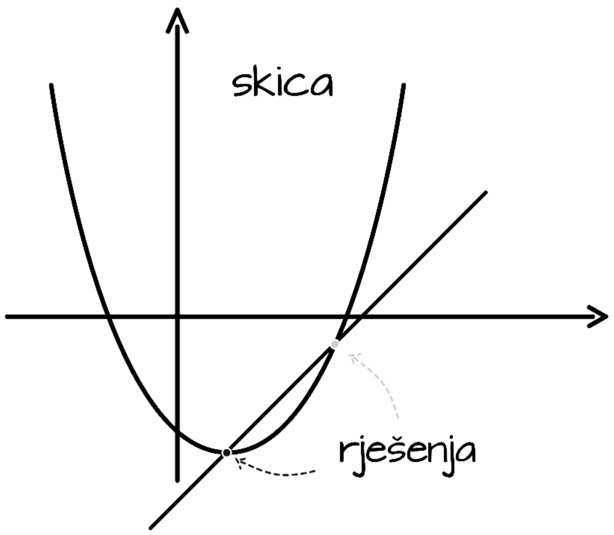
3. Povučemo parabolu tako da prolazi kroz jednu nultočku, zatim kroz tjeme i onda kroz drugu nultočku. Pazimo da je kod tjemena zaobljena, da nema "špic", i da nam parabola ne kreće/završava u nekoj nultočki, nego da prolazi barem malo kroz njih.



Presjek parabole i pravca

Parabola i pravac mogu se sijeći u dvije točke, dodirivati u jednoj točki ili uopće ne sijeći.

Izjednačimo kvadratnu funkciju $ax^2 + bx + c$ s pravcem $kx + l$ i prebacimo sve na lijevu stranu te sredimo. Diskriminanta novonastale kvadratne jednadžbe nam slično kao i prije govori koliko imamo sjecišta parabole i pravca, a rješenja ove, nove kvadratne jednadžbe su upravo prve koordinate sjecišta parabole s pravcem.



$$\left.\begin{aligned} y &= x^2 - x - 2 \\ y &= x - 2 \end{aligned}\right\} \text{izjednačimo}$$

$$x^2 - x - 2 = x - 2$$

$$x^2 - x - 2 - x + 2 = 0$$

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = 2$$

ubacimo u neku od početnih jednadžbi $\longrightarrow$ $\begin{aligned} y_1 &= 0 - 2 \\ y_2 &= 2 - 2 \end{aligned}$ $\longrightarrow$ $\begin{aligned} y_1 &= -2 \\ y_2 &= 0 \end{aligned}$

rješenja: $(0, -2)$ i $(2, 0)$

Ova skripta je free jer svi mi volimo besplatne stvari!
Ako želiš toga još, **skeniraj ovaj QR kod** i isprobaj besplatno ostale materijale na našoj stranici.

Kvadratne nejednadžbe

Kvadratna nejednadžba je nejednadžba oblika $ax^2 + bx + c > (\geq)\ 0$ ili $ax^2 + bx + c < (\leq)\ 0$.

Riješiti kvadratnu nejednadžbu znači odrediti sva njena rješenja, tj. odrediti sve brojeve x koji zadovoljavaju tu nejednadžbu.

Rješavanje kvadratne nejednadžbe

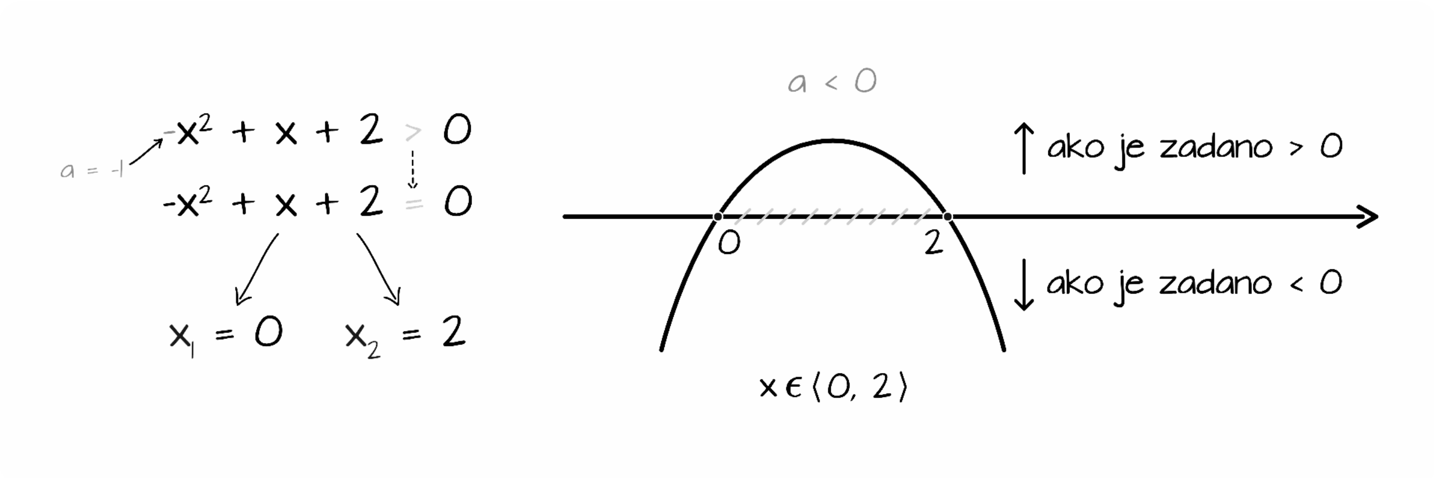
Postupak za rješavanje kvadratne nejednadžbe provodi se u 4 koraka.

1. Prebacimo sve na lijevu stranu, tako da desno od znaka nejednakosti ostane samo 0.

2. Pravimo se da umjesto znaka nejednakosti piše jednako pa riješimo tu kvadratnu jednadžbu.

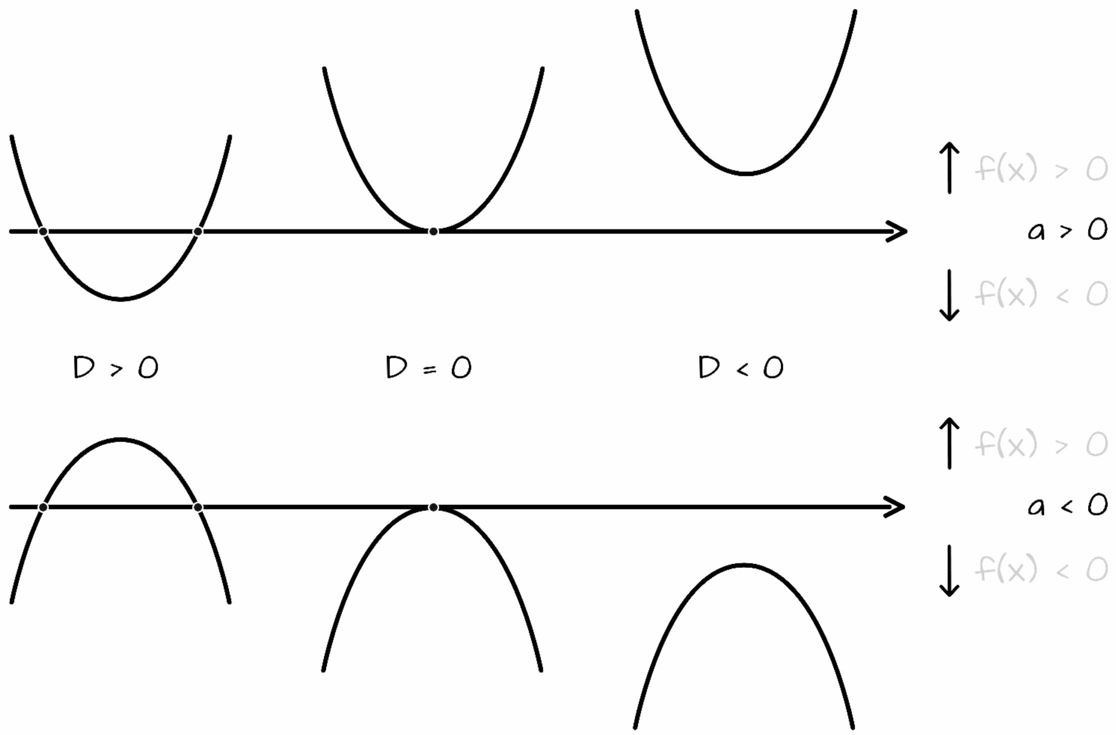
3. Nacrtamo skicu naše parabole - bitno je samo označiti nultočke i odrediti "smije" li se parabola ili je "tužna", odnosno je li otvor okrenut prema gore ili dolje. Ostali detalji su trenutno nebitni.

4. Ako je u nejednadžbi stajalo > 0, za rješenje uzimamo x-eve kada je parabola iznad x-osi. Ako je u nejednadžbi stajalo < 0, rješenja će biti oni x-evi gdje je parabola ispod x-osi. Samo u slučaju da su u nejednadžbi znakovi $\geq$ ili $\leq$, nultočke će biti uključene u rješenja nejednadžbe.



Vodeći koeficijent i diskriminanta

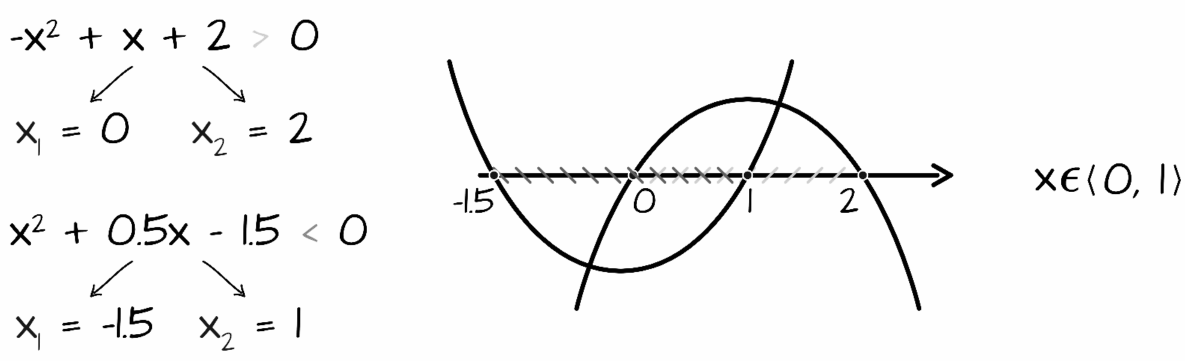
Slično kao i u prošlim lekcijama, vodeći koeficijent kvadratne funkcije a i diskriminanta D nam unaprijed, bez računanja, daju dobru ideju o rješenjima nejednadžbe.



Sustav kvadratnih nejednadžbi

Sustav kvadratnih nejednadžbi rješavamo tako da riješimo svaku nejednadžbu posebno. Konačno rješenje će biti presjek rješenja prve nejednadžbe s rješenjima druge nejednadžbe. Drugim riječima, tražimo gdje će se rješenja poklapati, koji su to brojevi koji zadovoljavaju i jednu i drugu nejednadžbu.

Kod samog postupka, najbolje je na istoj slici nacrtati skice obje parabole, a njihova rješenja označiti različitim bojama ili iscrtkati crticama u suprotnim smjerovima. Konačno rješenje će biti onaj dio gdje se boje ili crtice preklapaju.



Sviđa ti se što vidiš? E pa ima toga još! **Skeniraj QR kod** pored i pretplati se na pripreme za maturu koje su ti uvijek dostupne, u neograničenim količinama!

Trigonometrija trokuta

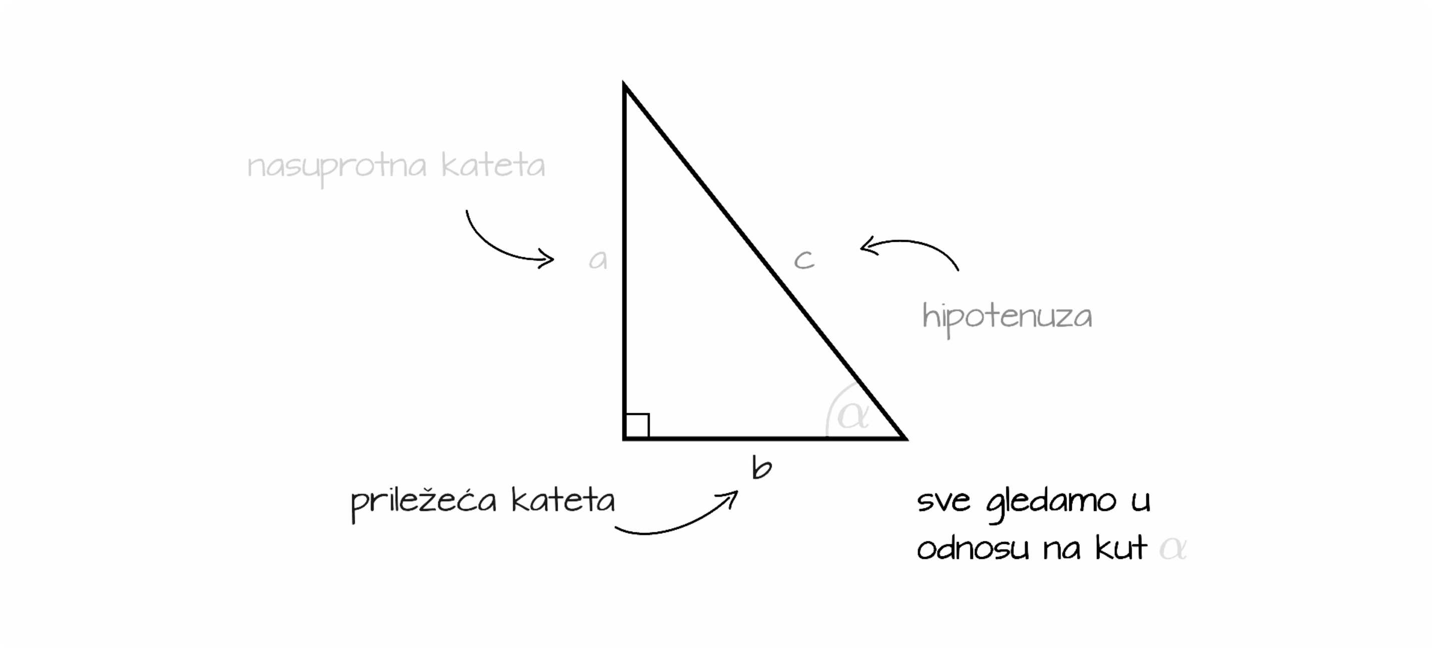
Prisjetimo se najprije trigonometrijskih omjera u pravokutnom trokutu koje smo radili u prvom razredu.

Trigonometrijske omjere u pravokutnom trokutu ćemo raditi uzimajući u obzir položaj stranica u odnosu na neki šiljasti kut, dakle nikad ne gledamo u odnosu na pravi kut.

Hipotenuza je najduža stranica u trokutu, nalazi se nasuprot pravom kutu.

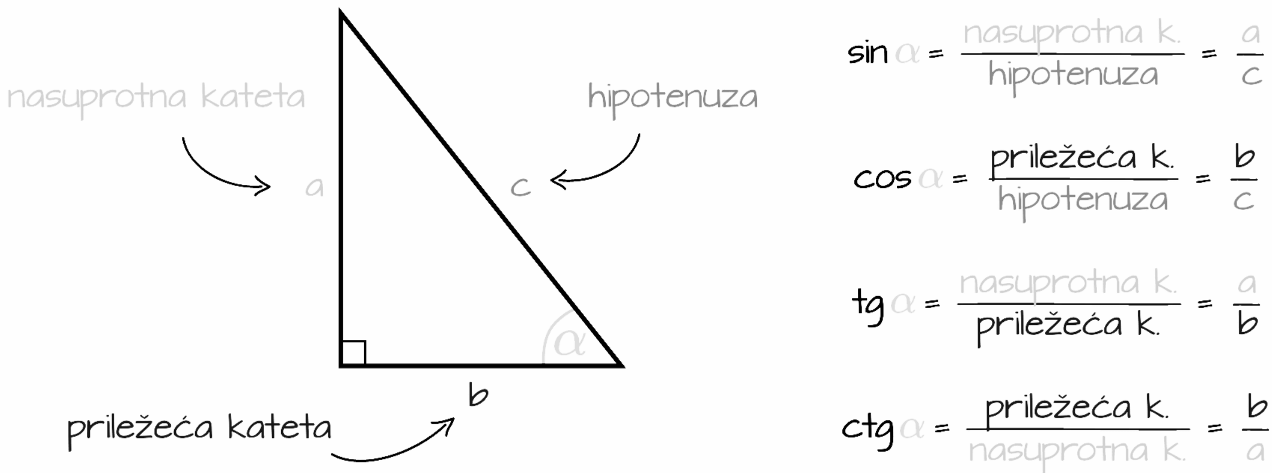
Priležeća kateta je ona koja se nalazi uz kut, a da nije hipotenuza.

Nasuprotna kateta je stranica nasuprot kutu kojeg gledamo, ona i kut se nikako "ne dodiruju".



Trigonometrijski omjeri

Sinus je omjer duljina nasuprotne katete i hipotenuze. Za kut α, oznaka je $sin\alpha$.
Kosinus je omjer duljina priležeće katete i hipotenuze. Za kut α, oznaka je $cos\alpha$.
Tangens je omjer duljina nasuprotne i priležeće katete. Za kut α, oznaka je $tg\alpha$.
Kotangens je omjer duljina priležeće i nasuprotne katete. Za kut α, oznaka je $ctg\alpha$.



$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$$

Tablica najčešćih kuteva i vrijednosti trigonometrijskih funkcija za njih.

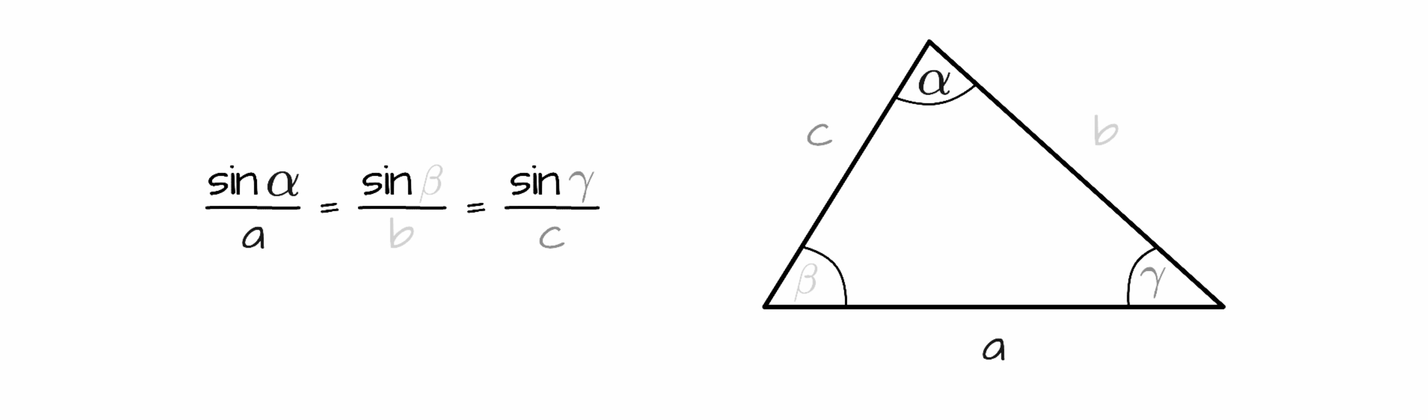
	30°	45°	60°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
ctg	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Sada ćemo spomenuti trigonometriju koja vrijedi za sve trokute, ne samo za pravokutan.

Poučak o sinusima

Poučak o sinusima možemo primijeniti **u bilo kojem trokutu**, ne mora nužno biti pravokutni. Koristimo ga kada kada imamo dvije stranice i kut nasuprot jedne od njih, ili dva kuta i stranicu nasuprot jednom od tih dvaju kutova. Preko poučka možemo izračunati veličinu koja nedostaje. Također, omjer koji daje poučak je jednak $2R$, gdje je R radijus opisane kružnice trokutu.

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$



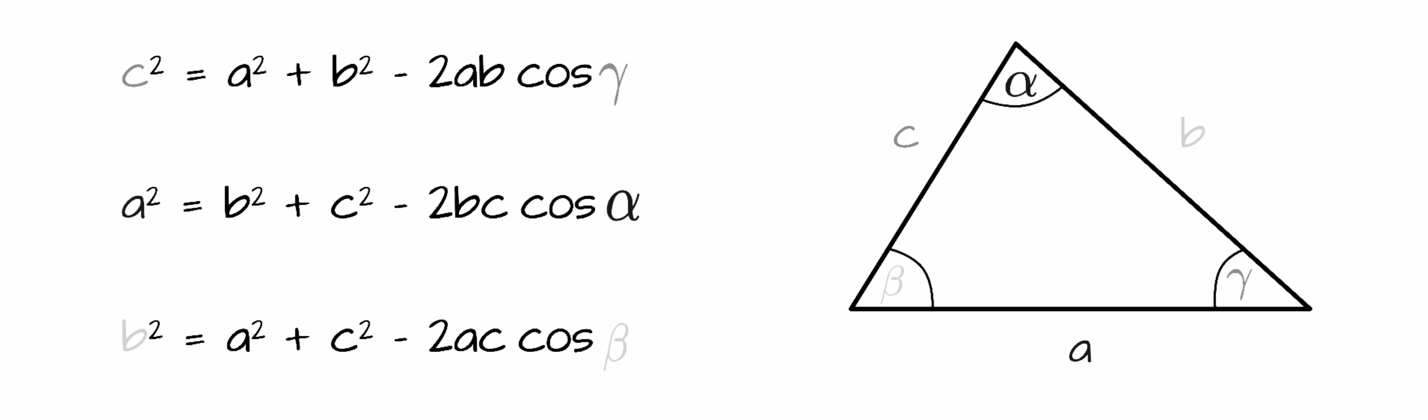
Poučak o kosinusu

Poučak o kosinusu možemo primijeniti **u bilo kojem trokutu**, ne mora nužno biti pravokutni. Primjenjiv je na bilo koju kombinaciju stranica pa zato izgleda kao da imamo tri formule. Bitno je zapamtiti da za računanje stranice koja je sama na lijevoj strani, trebaju druge dvije stranice i kut nasuprot nje.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$



Formule za površinu trokuta

Površina **bilo kojeg trokuta** može se izračunati kao polovica umnoška bilo koje dvije stranice i sinusa kuta **između njih**.

$$P = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\sin\beta$$

Heronova formula daje površinu trokuta ako znamo duljine svih stranica trokuta. Veličinu s nazivamo i **poluopseg**.

$$P = \sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)}, s = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

Postoje i formule za površinu trokuta koje koriste radijus opisane kružnice (R) i radijus upisane kružnice (r) tog trokuta.
U drugoj formuli, s ponovno predstavlja poluopseg.

$$P = \frac{abc}{4R}$$

$$P = rs$$

Visine trokuta

Visine trokuta obrnuto su proporcionalne duljinama odgovarajućih stranica tj. vrijedi:

$$a : b = v_b : v_a; \quad b : c = v_c : v_b, \quad c : a = v_a : v_c$$

Simetrale kutova

Poučak o simetrali kuta: Simetrala unutarnjeg kuta trokuta dijeli nasuprotnu stranicu u omjeru jednakom omjeru duljina stranica što zatvaraju taj kut.

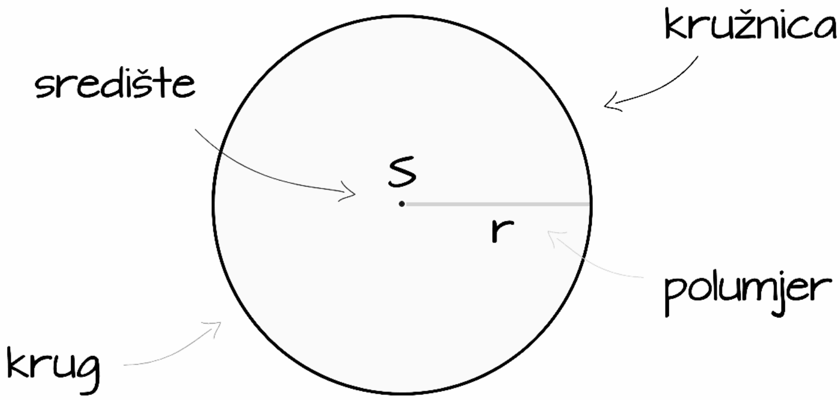
Težišnice trokuta

Kružnica i krug

Kružnica je skup svih točaka koje su jednako udaljene od neke fiksne točke. Oznaka je $k(S, r)$.
Točka S predstavlja tu fiksnu točku i koju zovemo središte.
Polumjer (radijus) kružnice je r i to je udaljenost od središta do bilo koje točke na kružnici.

Krug je dio ravnine omeđen kružnicom. Drugim riječima, to su sve točke koje se nalaze na kružnici i unutar nje, odnosno koje su od njezinog središta udaljene za manje ili jednako od radijusa. Oznaka je $K(S, r)$.

Dakle, jednostavnim riječima: kružnica je samo linija koja ide izvana oko središta, a krug je onaj dio prostora koji se nalazi unutar te linije (uključujući i tu liniju, odnosno kružnicu).



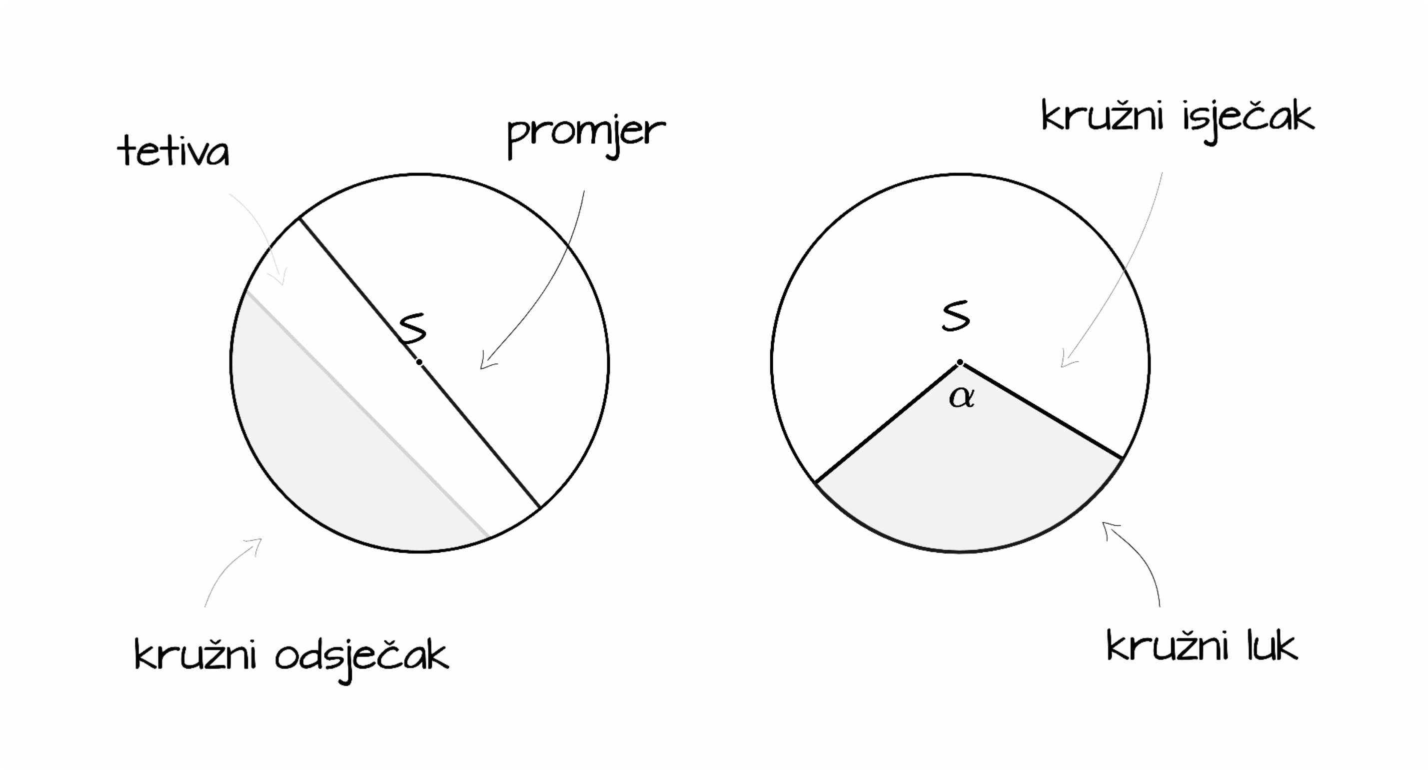
Tetiva je dužina koja spaja svije točke na kružnici.

Najduža tetiva je ona koja prolazi kroz središte i zove se promjer (dijametar). Duljina mu je dva polumjera.

Kružni luk je dio kružnice između neke dvije točke. Primijetimo da dvije točke uvijek određuju dva kružna luka.

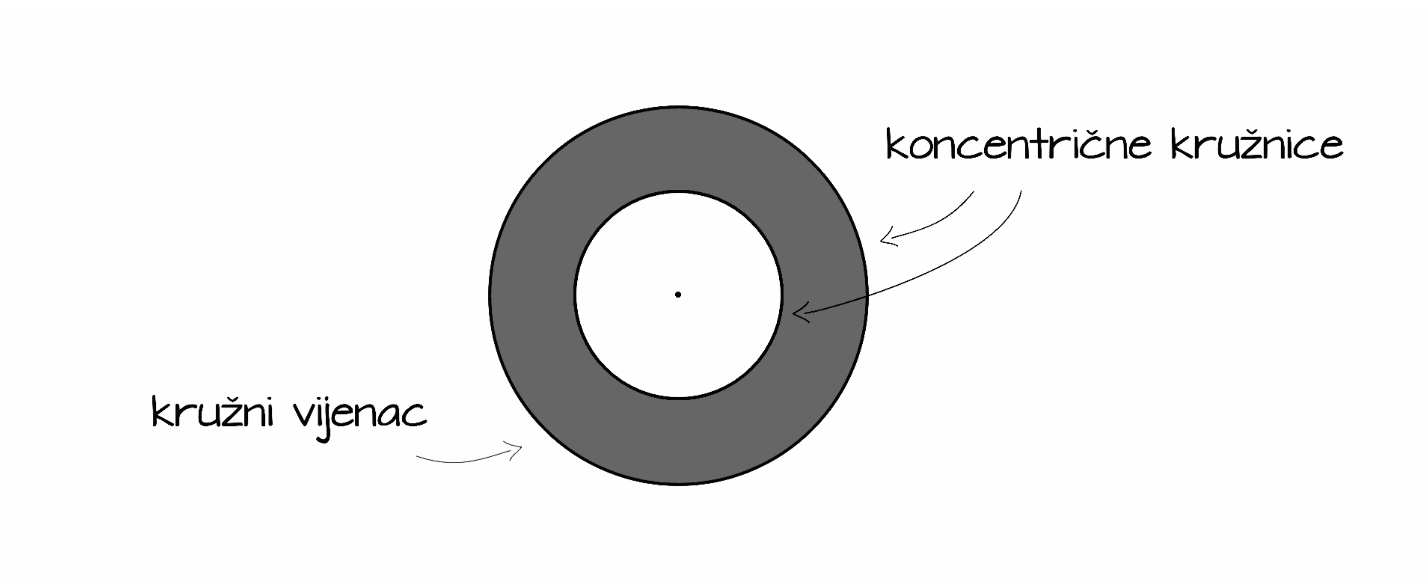
Kružni odsječak je dio kruga nastao kada ga presiječemo tetivom. Ponovno, na ovaj način nastaju dva kružna odsječka, ovisno s koje strane gledamo.

Kružni isječak je dio kruga omeđen s dva polumjera i odgovarajućim kružnim lukom.



Koncentrične kružnice su kružnice koje imaju isto središte, a različit radijus.

Dio kruga između dvije koncentrične kružnice je kružni vijenac.



Formule

Opseg i površina kruga.

$$O = 2r\pi$$

$$P = r^2\pi$$

Formule za duljinu kružnog luka i površinu kružnog isječka koriste kut koji zatvaraju radijusi u središtu. Označava se s α (pogledaj gornju sliku).

$$l = \frac{r\pi\alpha}{180}$$

$$P = \frac{r^2\pi\alpha}{360} = \frac{rl}{2}$$

Imamo i formulu za površinu kružnog vijenca. Veliko R je polumjer većeg kruga, a malo r manjeg kruga.

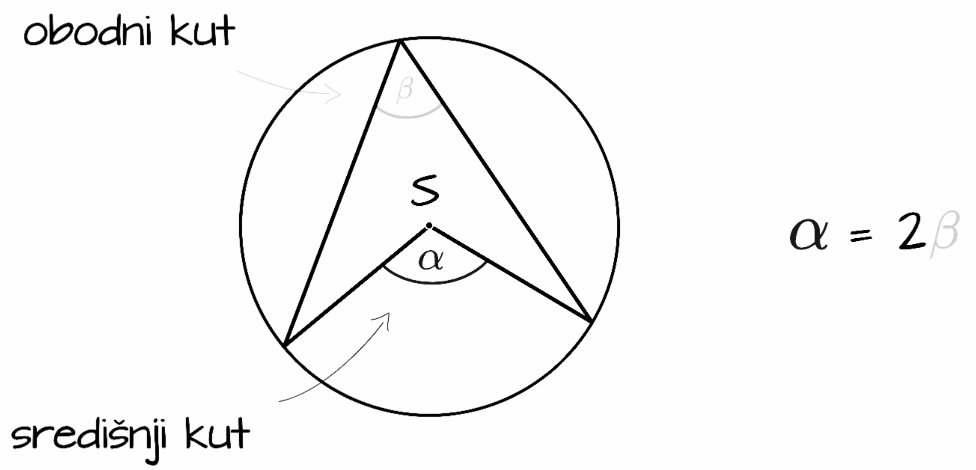
$$P = \left(R^2 - r^2\right) \cdot \pi$$

Središnji i obodni kut

Obodni kut je kut koji ima vrh negdje na kružnici, a krakovi mu sijeku kružnicu (odnosno krakovi prolaze kroz neke druge dvije točke na kružnici).

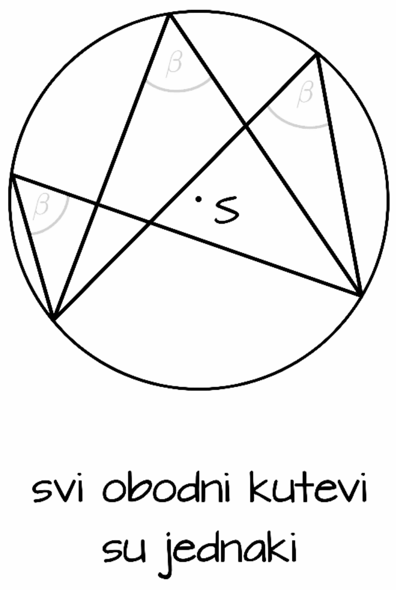
Središnji kut ima vrh u središtu, a krakovi mu isto sijeku kružnicu (odnosno krakovi prolaze kroz neke druge dvije točke na kružnici).

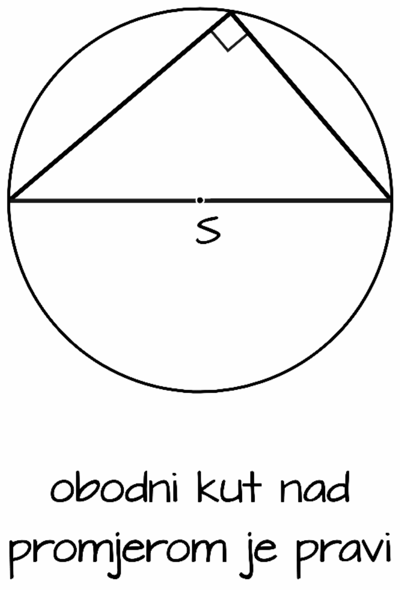
Poučak o obodnom kutu: Središnji kut je **dva puta veći** od obodnog kuta nad istim kružnim lukom.



Svi obodni kutovi nad istim kružnim lukom su jednako veliki.

Talesov poučak: Obodni kut nad promjerom je uvijek pravi kut.

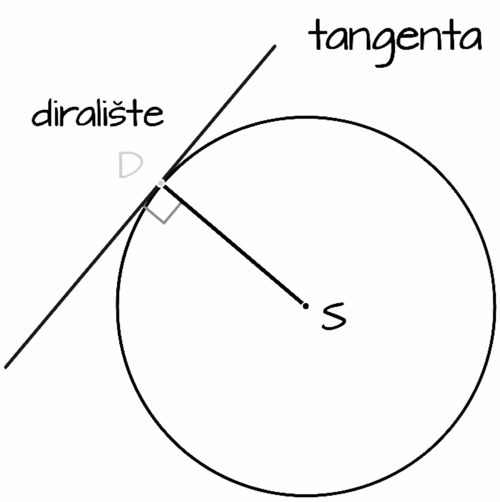


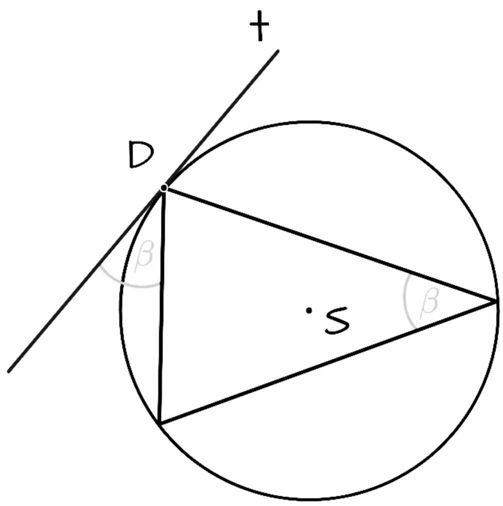


Tangenta kružnice

Tangenta kružnice je pravac koji dodiruje kružnicu u jednoj točki. Tu točku zovemo diralište i najčešće se označava sa slovom D. Radijus na diralište i tangenta uvijek zatvaraju pravi kut.

Obodni kut nad nekom tetivom jednak je kutu koji zatvaraju ta tetiva i tangenta kroz jednu krajnju točku te tetive.

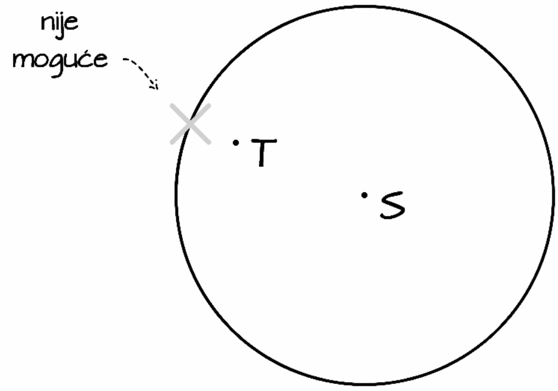




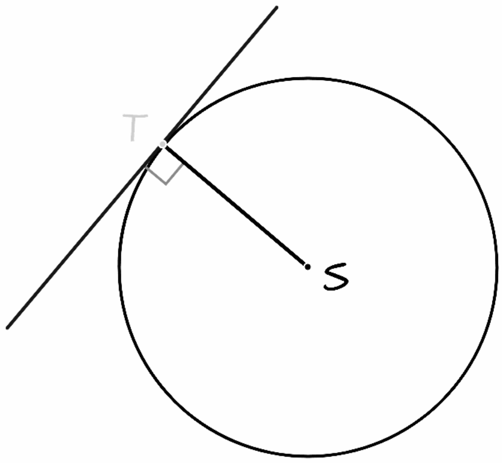
Konstrukcija tangente na kružnicu

Želimo konstruirati tangentu na kružnicu iz neke točke. Postoje tri slučaja:

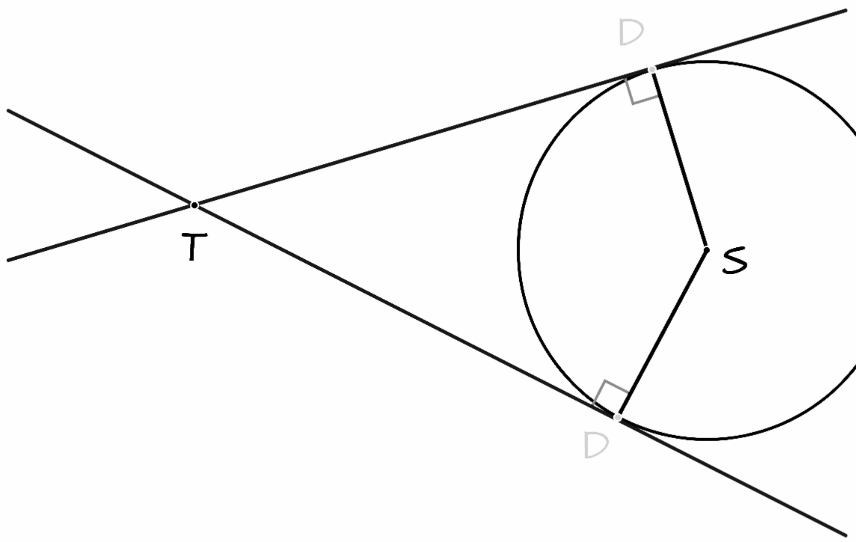
- Točka T se nalazi unutar kružnice - iz nje ne možemo povući tangentu.



- Točka T se nalazi na kružnici - postoji jedna tangenta i ta točka je njezino dralište. S obzirom da je tangenta okomita na polumjer, jednostavno spojimo polumjer do te točke T te kroz nju povučemo okomicu na polumjer.



- Točka T se nalazi izvan kružnice - postoje dvije tangente iz te točke na kružnicu. Spojimo središte kružnice S s tom točkom T i pronađemo polovište P te dužine. Konstruiramo kružnicu sa središtem u polovištu i polumjerom duljine $|PS|$. Sjecišta te kružnice s početnom kružnicom su dirališta tangenti te jednostavno povučemo tangente iz točke T kroz dirališta i dobijemo dvije tangente.


D
T
S
D

POLIEDRI

Prizme

Prizma je geometrijsko tijelo koje nastaje tako da dužinama spojimo dva ista mnogokuta koji se nalaze na paralelnim ravninama.

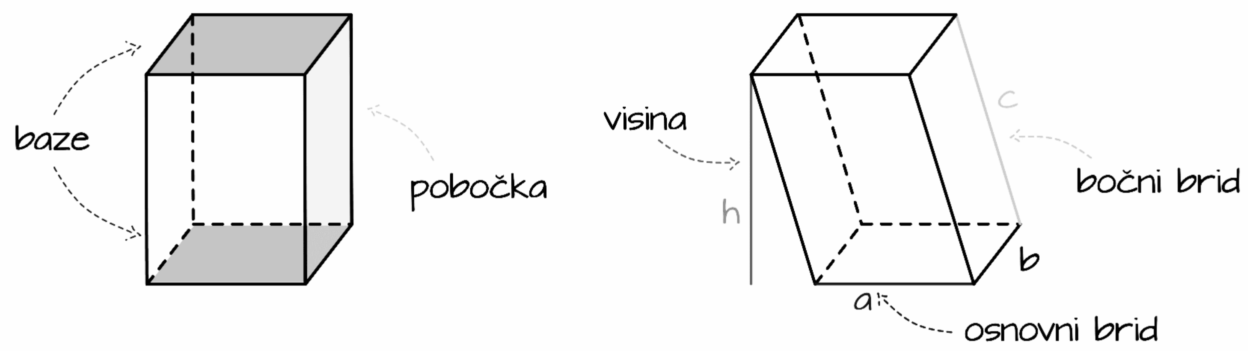
Mnogokute nazivamo bazama, a pobočke su vanjski paralelogrami koje dobijemo spajanjem odgovarajućih vrhova baza. Pobočje je naziv za sve pobočke skupa.

Prizme nazivamo prema vrsti mnogokuta koji je baza. Ako je baza trokut, prizma se zove trostrana, ako je čeverokut, onda je četverostrana itd. Za općenitu oznaku koristimo izraz n-terostrana prizma, što znači da je baza n-terokut, odnosno mnogokut s n vrhova.

Stranice baze zovu se osnovni bridovi, a dužine koje spajaju odgovarajuće vrhove gornje i donje baze bočni bridovi.

Visina prizme je udaljenost između dvije baze. Ako je visina jednaka bočnom bridu prizme, onda je prizma uspravna. Pobočke uspravnih prizmi su pravokutnici. Sve druge prizme se zovu kose.

Ako je baza uspravne prizme neki pravilni mnogokut, onda je prizma pravilna.



Broj vrhova, bridova i stranica

Za prizmu kojoj je baza n-terokut (mnogokut s n vrhova), vrijedi sljedeće:

- broj vrhova na cijeloj prizmi je jednak $2 \cdot n$
- broj bridova na cijeloj prizmi je jednak $3 \cdot n$
- broj pobočki je jednak n
- broj strana (baze + pobočke) je jednak $n + 2$
- Eulerova formula: vrhovi + strana - bridovi = 2

Oplošje i obujam

Oplošje je površina svih likova koji ograđuju prizmu. Računa se kao zbroj površina svih strana prizme, dakle zbroj dvostruke površine baze B i površine pobočja P.

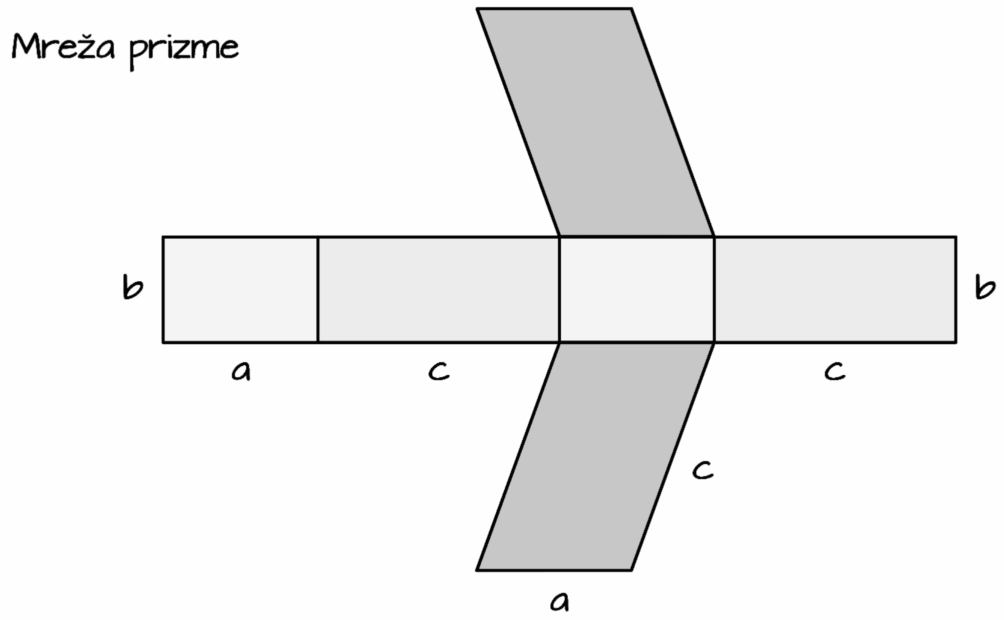
$$O = 2B + P$$

Obujam (volumen) prizme je veličina kojom mjerimo koliki dio prostora obuhvaća prizma. Računa se kao umnožak površine baze B i visine prizme h.

$$V = B \cdot h$$

Mreža prizme

Ako prizmu razrežemo duž njezinih bridova i takvu je položimo u ravninu, dobit ćemo mrežu prizme.
Na sljedećoj slici prikazana je mreža jedne kose četverostrane prizme.

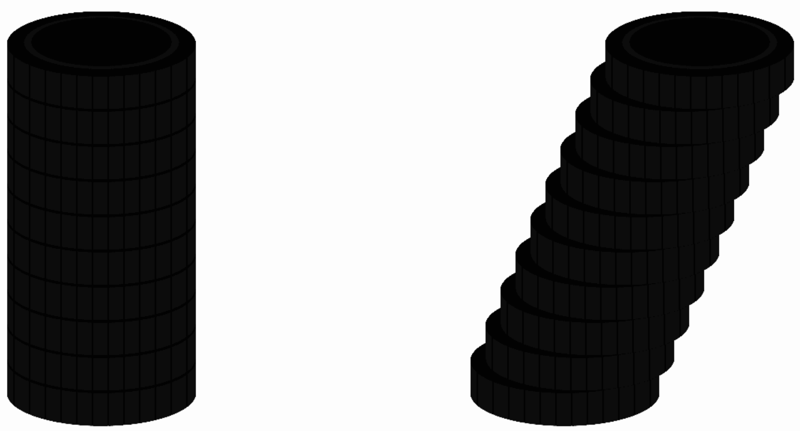


Cavalierijev princip za tijela

Ako se dva geometrijska tijela nalaze između dviju paralelnih ravnina i svaka ravnina paralelna tim ravninama siječe tijela tako da presjeci imaju istu površinu, tada tijela imaju jednake volumene.

Najbolji primjer za to je snop žetona. Pogledajmo sliku.

Određen broj žetona možemo posložiti na različite načine te tako dobiti različite oblike, ali broj žetona se ne mijenja odnosno obujam žetona i dalje ostaje isti.



Kocka i kvadar

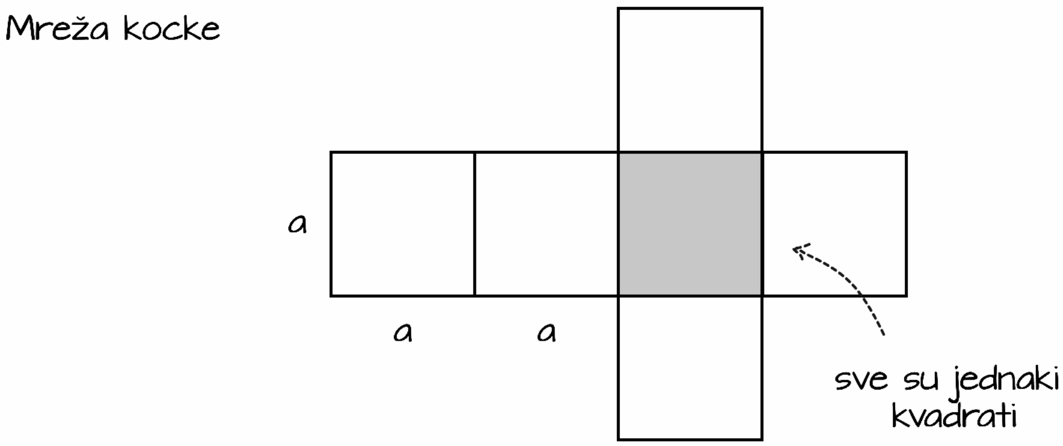
Kocka

Kocka je uspravna pravilna četverostrana prizma kojoj su svi bridovi iste duljine. Dakle, baze i pobočke su isti kvadrati.

Prisjetimo se formule za dijagonalu kvadrata d preko koje onda možemo doći i do formule za prostornu dijagonalu kocke D. Dijagonalu d još zovemo plošna dijagonala kocke.

$$d = a\sqrt{2}$$

$$D = a\sqrt{3}$$



Oplošje i obujam kocke

Formule za oplošje i obujam kocke s bridom duljine a:

$$O = 6a^2$$

$$V = a^3$$

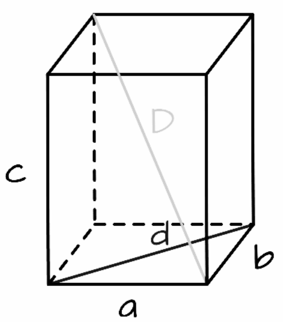
Presjeci kocke

Kvadar

Kvadar je četverostrana prizma kojoj su baze i pobočke pravokutnici. Nasuprotni pravokutnici su jednaki i paralelni.

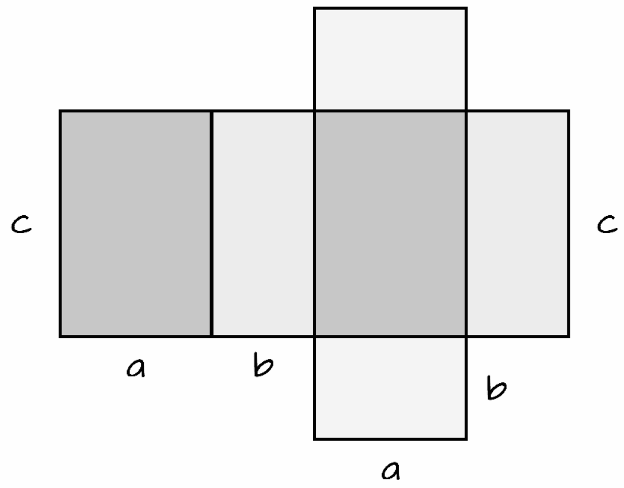
Dijagonalu pravokutnika d računamo preko Pitagorina poučka te preko nje onda možemo doći i do formule za prostornu dijagonalu kvadra D. Dijagonalu d još zovemo plošnom dijagonalom te kvadar ima tri različite plošne dijagonale, ovisno koju stranu kvadra promatramo.

$$D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$



d - dijagonala baze (pravokutnika)
D - prostorna dijagonala

Mreža kvadra



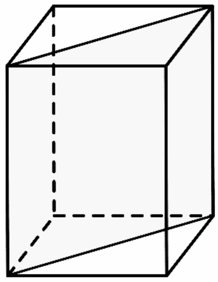
Oplošje i obujam kvadra

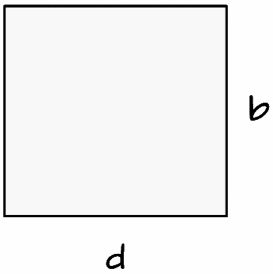
Formule za oplošje i obujam kvadra s duljinama bridova a, b i c:

$$O = 2ab + 2ac + 2bc$$

$$V = abc$$

Presjeci kvadra




b
d

Piramide

Piramida je geometrijsko tijelo nastalo tako da svaku točku mnogokuta spojimo s nekom točkom koja ne pripada tom mnogokutu.

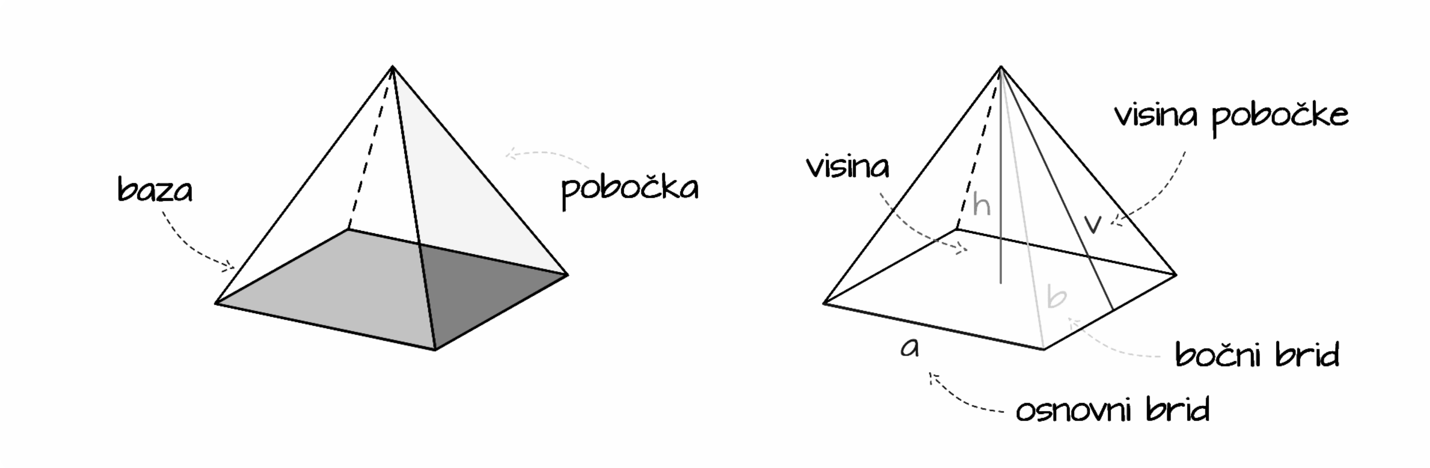
Mnogokut ćemo kao i kod prizmi zvati baza, a nastale trokute spojene na njega pobočke. Sve pobočke skupa zovemo pobočje.

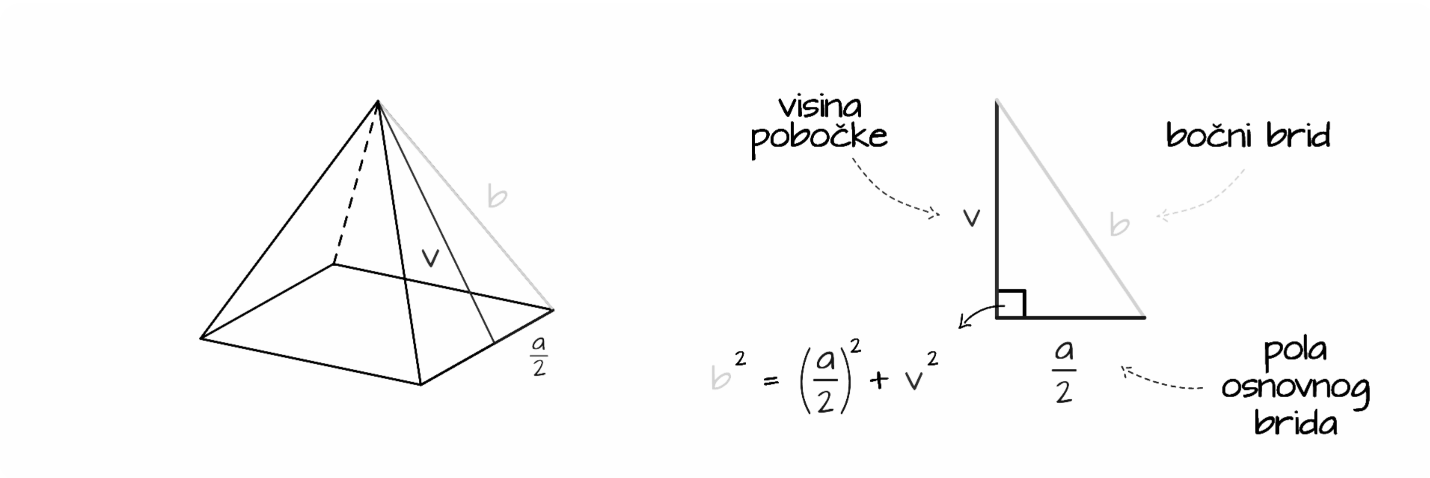
Piramide nazivamo prema vrsti mnogokuta koji je baza. Ako je baza trokut, piramida se zove trostrana, ako je četverokut, onda je četverostrana itd. Za općenitu oznaku koristimo izraz n-terostrana piramida, što znači da je baza n-terokut, odnosno mnogokut s n vrhova.

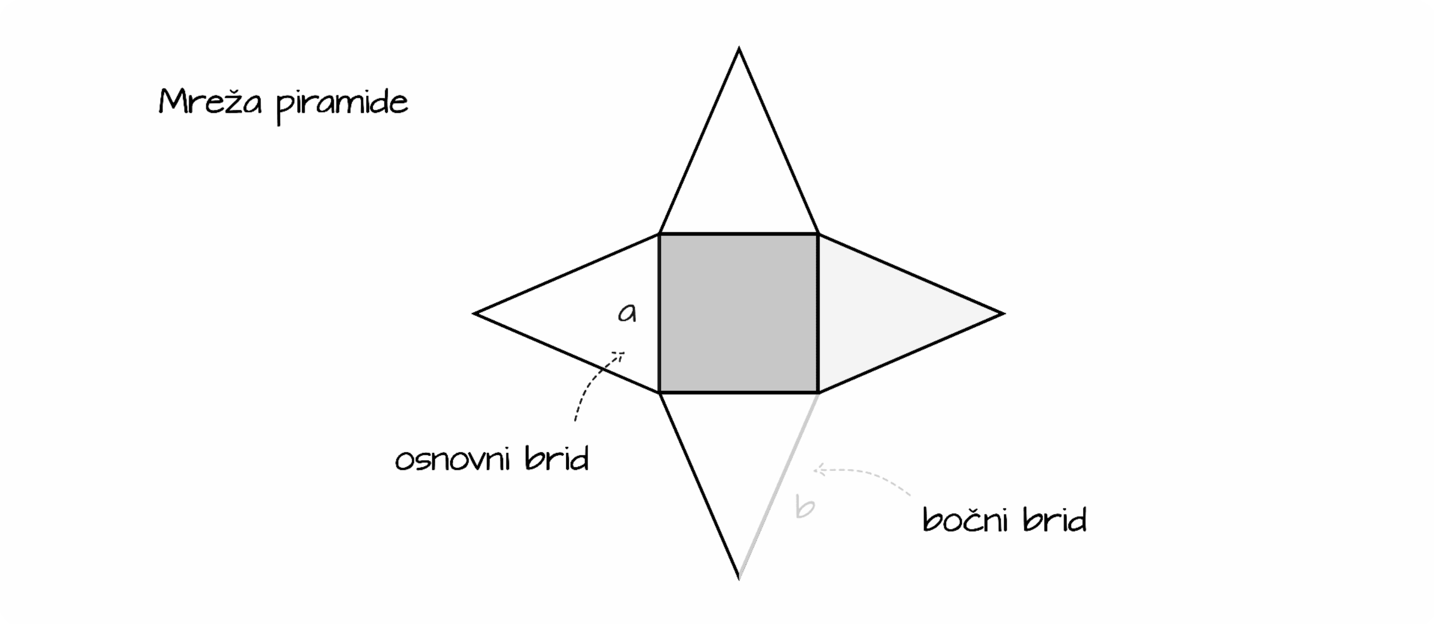
Točku van mnogokuta s kojom ga spajamo zovemo vrhom piramide. Dužine koje spajaju vrh mnogokuta s vrhom piramide su bočni bridovi, a stranice mnogokuta su osnovni bridovi.

Visina piramide je udaljenost od vrha piramide do njene baze. Visina pobočke je visina trokuta koji je pobočka piramide.

Piramida je uspravna ako se njezin vrh nalazi točno iznad središta mnogokuta koji je baza. Ako je baza pravilni mnogokut, onda će i piramida bit pravilna. Svi pobočni bridovi uspravnih piramida su jednakih duljina, dakle sve pobočke su jednakokračni trokuti. Ako piramida nije uspravna, onda ju zovemo kosom piramidom.







Broj vrhova, bridova i stranica

Za prizmu kojoj je baza n-terokut (mnogokut s n vrhova), vrijedi sljedeće:

- broj vrhova piramide je $n+1$
- broj bridova piramide je $2 \cdot n$
- broj pobočki piramide je n
- broj stranica (baza + pobočke) je $n+1$
- Eulerova formula: vrhovi + strane - bridovi = 2

Oplošje i obujam

Oplošje je površina svih likova koji ograđuju piramidu. Računa se kao zbroj površina svih strana piramide, dakle zbroj površine baze B i površine pobočja P.

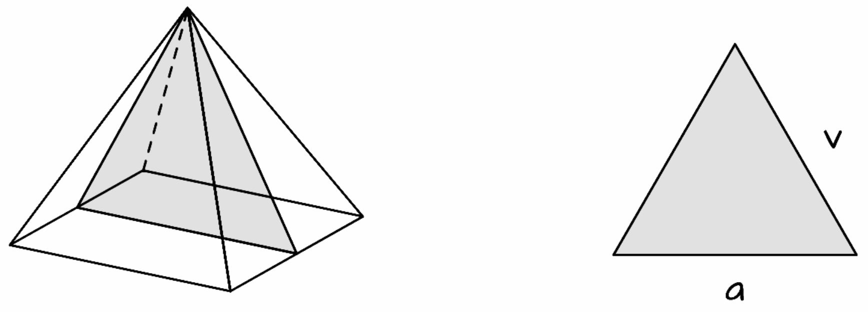
$$O = B + P$$

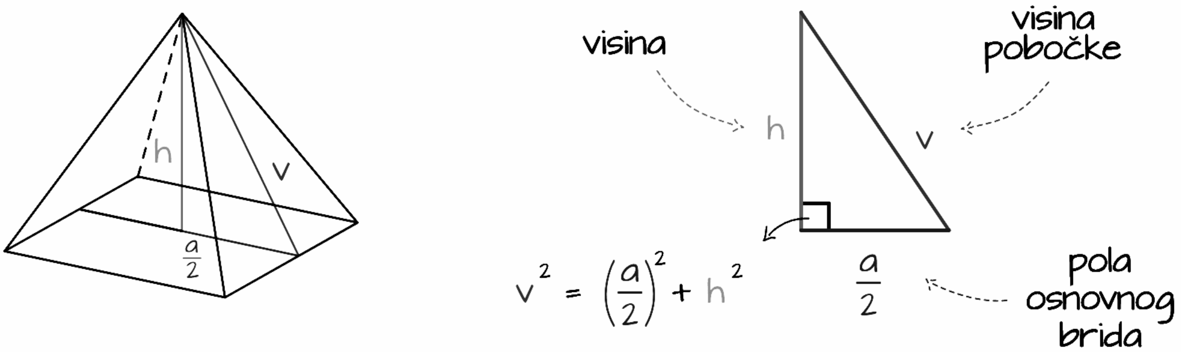
Obujam (volumen) piramide je veličina kojom mjerimo koliki dio prostora obuhvaća piramida. Računa se kao umnožak površine baze B i visine piramide h podijeljen s 3.

$$V = \frac{B \cdot h}{3}$$

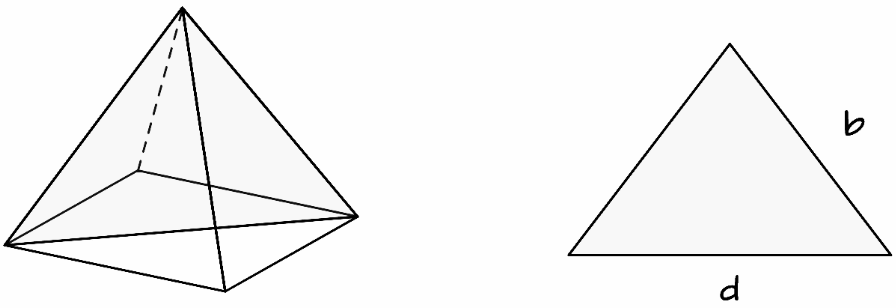
Presjeci piramide

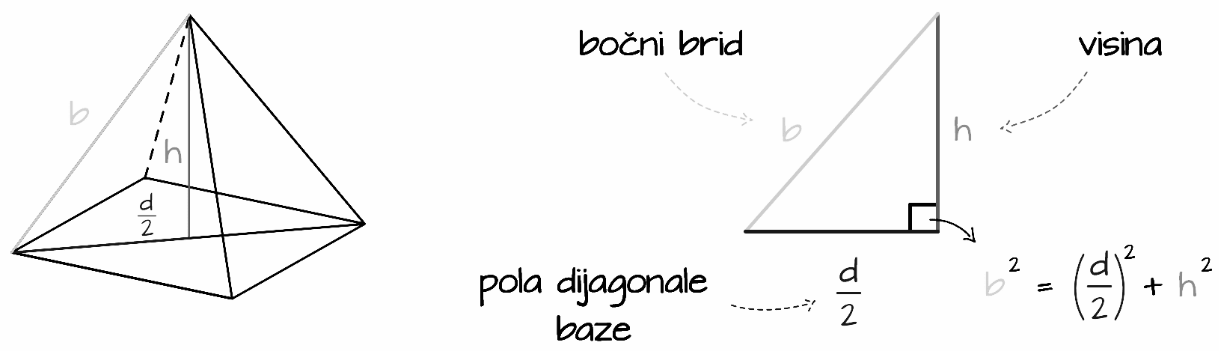
Piramidu možemo presjeći različitim ravninama koje će sadržavati različite elemente piramide. Pokazat ćemo najčešće presjeke četverostrane piramide te karakteristične trokute koji nastaju tim presjecima.





$$v^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2$$





Ova skripta je free jer svi mi volimo besplatne stvari!
Ako želiš toga još, **skeniraj ovaj QR kod** i isprobaj besplatno ostale materijale na našoj stranici.

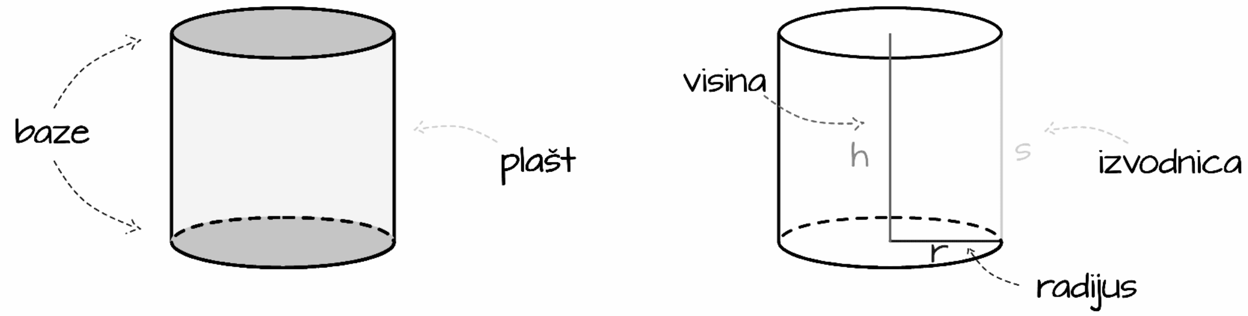
ROTACIJSKA TIJELA

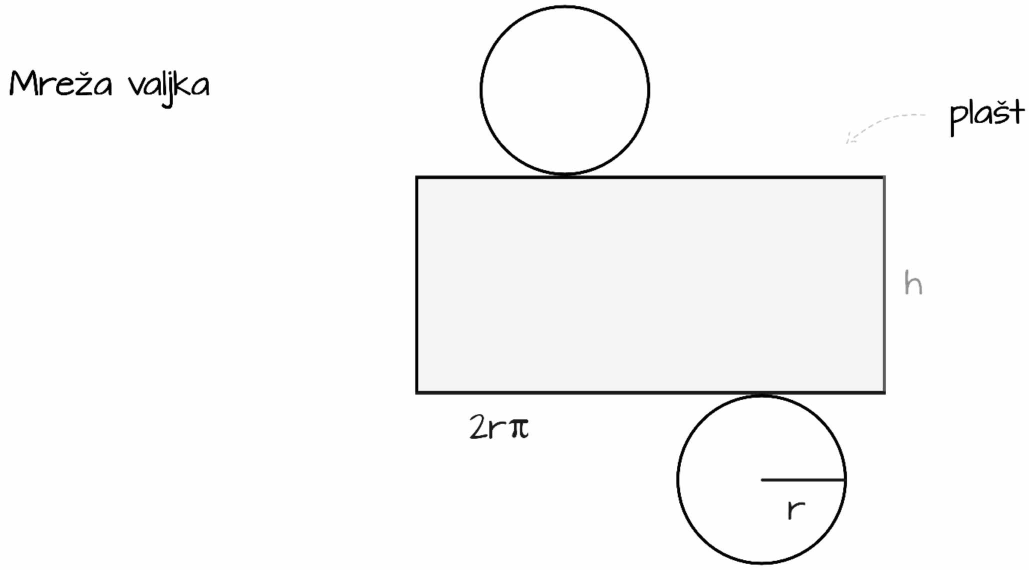
Valjak

Valjak je geometrijsko tijelo koji nastaje tako da dužinama spojimo dva ista kruga koji se nalaze na paralelnim ravninama.

Krugovi su baze, a vanjski dio koji ih spaja, što je kod prizmi bilo pobočje, je plašt.

Os valjka je pravac koji prolazi kroz središta gornje i donje baze. Izvodnica je dužina koja spaja rub gornje i donje baze i paralelna je s osi valjka. Udaljenost baza je visina valjka. Valjak je uspravan ako mu je visina jednaka izvodnici, tj. ako mu se baze nalaze točno jedna iznad druge. U suprotnom slučaju, valjak je kos.





Oplošje i obujam

Oplošje je površina svih likova koji ograđuju valjak. Računa se kao zbroj dvostruke površine baze B i površine plašta P. Plašt je zapravo pravokutnik s jednom stranicom dugačkom kao opseg kruga (baze) polumjera r, a druga stranica je visina valjka h.

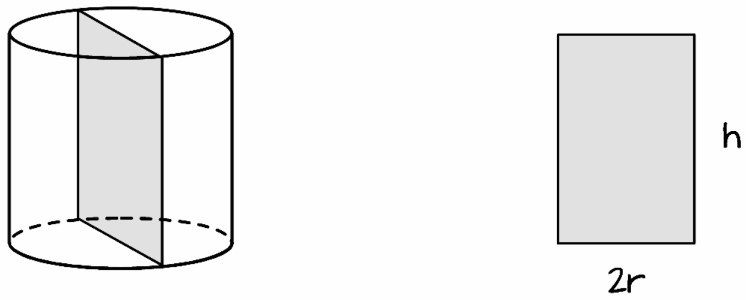
$$O = 2B + P = 2r^2\pi + 2r\pi h = 2r\pi(r+h)$$

Obujam (volumen) valjka je veličina kojom mjerimo koliki dio prostora obuhvaća valjak. Računa se kao umnožak površine baze B polumjera r i visine valjka h.

$$V = B \cdot h = r^2 \pi h$$

Presjeci valjka

Osni presjek valjka je pravokutnik koji nastaje presjekom ravnine koja sadrži os valjka i dva međusobno usporedna promjera njegovih baza. Površina tog presjeka (pravokutnika) je $P = 2r \cdot h$.



Valjak također možemo presjeći ravninom koja je usporedna s bazama valjka te na taj način opet dobivamo krug sukladan bazama valjka.

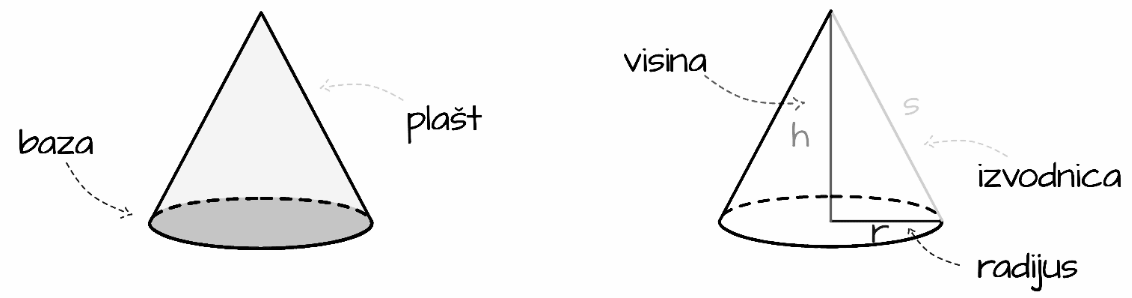
Stožac

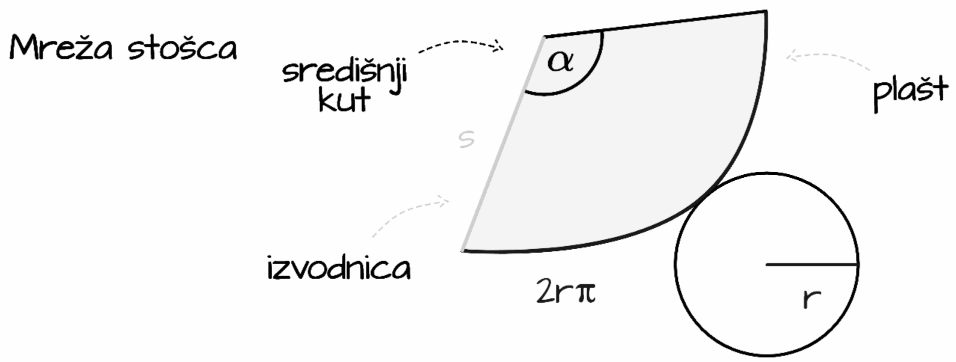
Stožac je geometrijsko tijelo nastalo tako da svaku točku kruga spojimo s nekom točkom koja se nalazi u ravnini u kojoj nije taj krug.

Krug ćemo zvati baza, a točku izvan njega vrh stošca. Vanjski dio koji spaja krug s vrhom stošca zovemo plašt, kao što je bio i kod valjka.

Dužine koje spajaju vrh stošca s bilo kojom točkom na rubu kruga su izvodnice.

Os stošca je pravac koji prolazi kroz vrh stošca i središte baze. Visina stošca je udaljenost od vrha stošca do njene baze. Stožac je uspravan ako se njegov vrh nalazi točno iznad središta kruga koji je baza, tj. ako je visina baš ta dužina. Ako stožac nije uspravan, onda ga zovemo kosim stošcem.





Oplošje i obujam

Oplošje je površina svih likova koji ograđuju stožac. Računa se kao zbroj površine baze B i površine plašta P. Plašt je zakrivljena površina kojoj površinu računamo kao umnožak polumjera kruga r, konstante π i izvodnice s.

$$O = B + P = r^2\pi + r\pi s = r\pi(r + s)$$

Obujam (volumen) stošca je veličina kojom mjerimo koliki dio prostora obuhvaća stožac. Računa se kao umnožak površine baze B polumjera r i visine stošca h, podijeljen s 3.

$$V = \frac{B \cdot h}{3} = \frac{r^2\pi h}{3}$$

Presjeci stošca

Osni presjek stošca je jednakokračan trokut s osnovicom duljine $2r$ i krakom duljine s.

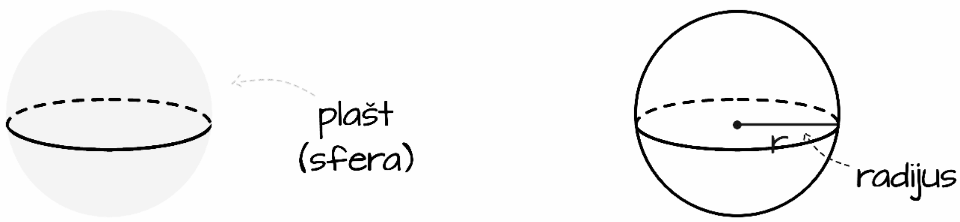
Njegova površina je $P = r \cdot h$.

Ova skripta je free jer svi mi volimo besplatne stvari!
Ako želiš toga još, **skeniraj ovaj QR kod** i isprobaj besplatno ostale materijale na našoj stranici.

Kugla

Kugla je geometrijsko tijelo koje obuhvaća sve točke koje su od njena središta S udaljene manje ili jednako nekoj vrijednosti R, koju zovemo polumjer (radijus) kugle.

Sfera je "rub" kugle, ono što ju obavija izvana, skup točaka koje su od središta S udaljene točno za R.



Oplošje i obujam

Oplošje je površina lika koji ograđuje kuglu. Drugim riječima, to je površina sfere. Računa se kao četverostruki umnožak kvadriranog kuglinog radijusa R i broja π.

$$O = 4R^2\pi$$

Obujam (volumen) kugle je veličina kojom mjerimo koliki dio prostora obuhvaća kugla. Računa se kao četiri trećine kubiranog radijusa kugle R puta π.

$$V = \frac{4}{3}R^3\pi$$

Korijeni

n-ti korijen

Neka je n prirodan broj i neka je $a^n = b$. Kažemo da je a n-ti korijen iz b. Oznaka je $a = \sqrt[n]{b}$.

Ako je n neparan broj, onda je korijen jedinstven i on može biti ili pozitivan ili negativan.
Ako je n paran broj, onda je n-ti korijen uvijek pozitivan. U tom slučaju i b, odnosno broj iz kojeg vadimo korijen, isto mora biti pozitivan.

Naravno, ako vadimo bilo koji korijen iz nule, rezultat će uvijek biti nula.

Pravila za računanje

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, b \neq 0$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = (a^m)^{\frac{1}{n}}$$

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$$

Pravila za računanje (potencije)

Ova pravila smo učili prije, ali svakako i dalje vrijede i bit će nam potrebna. Vrijede neovisno o tome je li u eksponentu razlomak ili ne.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{-m} = \left(\frac{y}{x}\right)^m$$

$$a \cdot x^n \pm b \cdot x^n = (a \pm b) \cdot x^n$$

$$x^n \cdot x^m = x^{n+m}$$

$$\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$$

$$x^n \cdot y^n = (xy)^n$$

$$\frac{x^n}{y^n} = (\frac{x}{y})^n$$

$$(x^n)^m = x^{nm}$$

Racionalizacija nazivnika

Racionalizirati nazivnik znači maknuti korijen iz donjeg dijela razlomka.

Radimo isto kao u slučaju drugog i trećeg korijena. Prvo pogledamo s čime bi trebali pomnožiti nazivnik tako da se on nadopuni do pune potencije. Dakle, ako imamo n-ti korijen, trebamo dobiti taj korijen na n-tu. To nam je bitno jer na taj način možemo poništiti korijen. Napravimo novi razlomak koji gore i dolje ima to što smo odabrali i pomnožimo ga s početnim razlomkom.

Ako u nazivniku imamo neki izraz, racionaliziramo koristeći druge formule.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{5}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5}} \cdot \frac{(\sqrt[3]{5})^2}{(\sqrt[3]{5})^2} = \frac{(\sqrt[3]{5})^2}{\cancel{(\sqrt[3]{5})^3}} = \frac{(\sqrt[3]{5})^2}{5}$$

da poništimo treći korijen, fali nam ih još dva

$$\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}}_{\text{razlika kvadrata } = \sqrt{a}^2 - \sqrt{b}^2} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$$

Ova skripta je free jer svi mi volimo besplatne stvari!
Ako želiš toga još, **skeniraj ovaj QR kod** i isprobaj besplatno ostale materijale na našoj stranici.

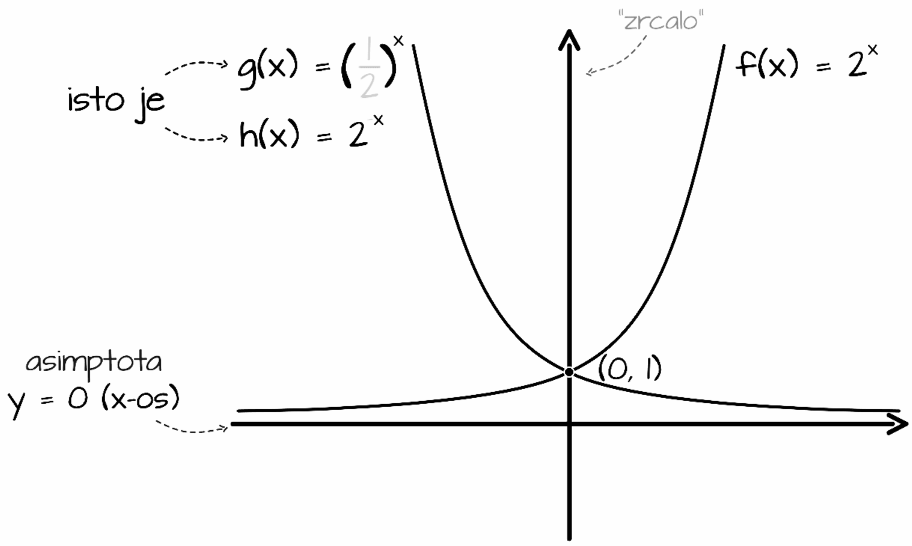
Eksponencijalna funkcija

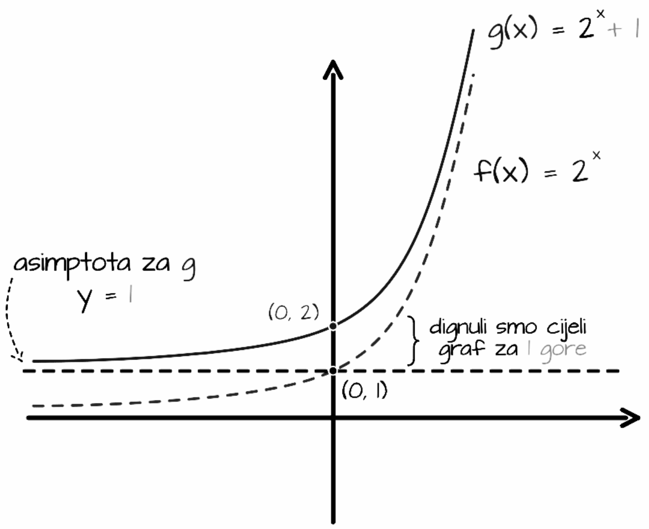
Eksponencijalna funkcija je funkcija $f(x) = a^x$, gdje je $a > 0$ i $a \neq 1$. Kao i inače, x je argument funkcije (ono što mijenjamo) te može biti bilo koji realan broj.

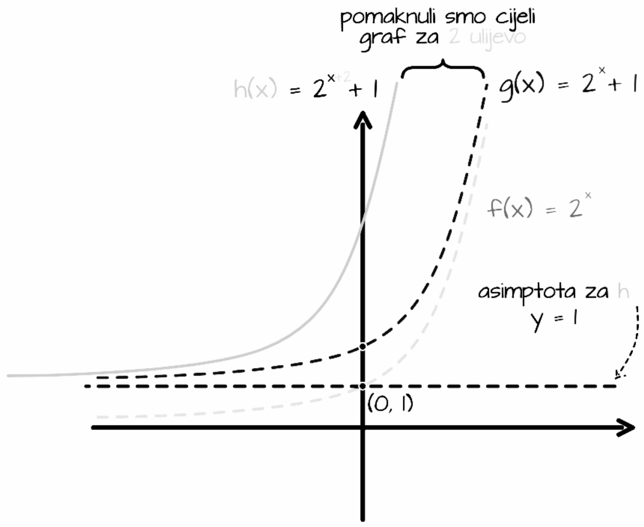
Za računanje s potencijama vrijede sva pravila koja smo prošli u prvom razredu, u lekciji "Potencije".

Graf eksponencijalne funkcije

- Graf svake eksponencijalne funkcije oblika $f(x) = a^x$ siječe y-os u točki $(0, 1)$.
- Pomak funkcije po y-osi, tj. gore-dolje, događa se kada funkciji dodamo ili oduzmemo neki broj. Tako će graf funkcije $f(x) = a^x + b$ izgledati isto kao i obični graf, samo pomaknut za b prema gore ako je b pozitivan ili dolje ako je b negativan.
- Pomak funkcije po x-osi, tj. lijevo-desno, događa se kada eksponentu dodamo ili oduzmemo neki broj. Tako će graf funkcije $f(x) = a^{x+b}$ izgledati isto kao i obični graf, samo pomaknut za b prema lijevo ako je b pozitivan ili desno ako je b negativan.
- Ako je $a > 1$, funkcija raste (kada gledamo s lijeva na desno). Što je a veći, funkcija je strmija.
- Ako je $0 < a < 1$, funkcija pada (opet, kada gledamo s lijeva na desno). Što je a manji, funkcija je strmija.
- Grafovi eksponencijalnih funkcija gdje su baze a i $\frac{1}{a}$, simetrični su obzirom na y-os.
- Grafovi eksponencijalnih funkcija s eksponentima x i $-x$, simetrični su obzirom na y-os.
- Asimptota (pravac kojem se funkcija približava, ali ga nikad ne siječe) eksponencijalne funkcije $f(x) = a^x$ je x-os, odnosno pravac $y = 0$
- Za x možemo uzeti bilo koji realni broj, odnosno kažemo da je funkcija definirana za sve realne brojeve x.
- Funkcija može postići sve pozitivne brojeve, odnosno kažemo da su svi pozitivni realni brojevi slika funkcije.







Sviđa ti se što vidiš? E pa ima toga još! **Skeniraj QR kod** pored i pretplati se na pripreme za maturu koje su ti uvijek dostupne, u neograničenim količinama!

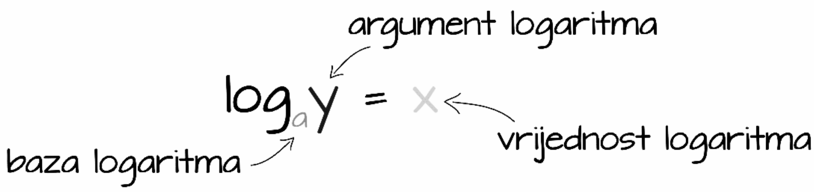
Logaritamska funkcija

Logaritam po bazi a broja y je eksponent kojim trebamo potencirati bazu a da bi dobili y. Oznaka je $\log_a y$.

$$a^x = y \quad i \quad \log_a y = x$$

Gornju vezu, između eksponencijalne funkcije i logaritma, možemo pamtiti po pravilu "lijevi, desni, srednji". U eksponencijalnoj funkciji, lijevo je a, u sredini je x, a desno y. Kada prelazimo u logaritam, samo ćemo ih posložiti drugim redoslijedom. Primijenimo "lijevi, desni, srednji". Pišemo logaritam, baza je "lijevi" broj, tj. a, zatim ide "desni", to je y i na kraju sve mora biti jednako "srednjem", a to je x. Isti metodu možemo primijeniti i u drugu stranu, kada želimo iz logaritma prijeći u eksponencijalnu funkciju.

Oprez! Jedino na što trebamo paziti kada koristimo ovaj trik je da nam lijevo od znaka jednako uvijek stoji potencija, odnosno logaritam. Ako to zadovoljimo, ostalo je lagano!

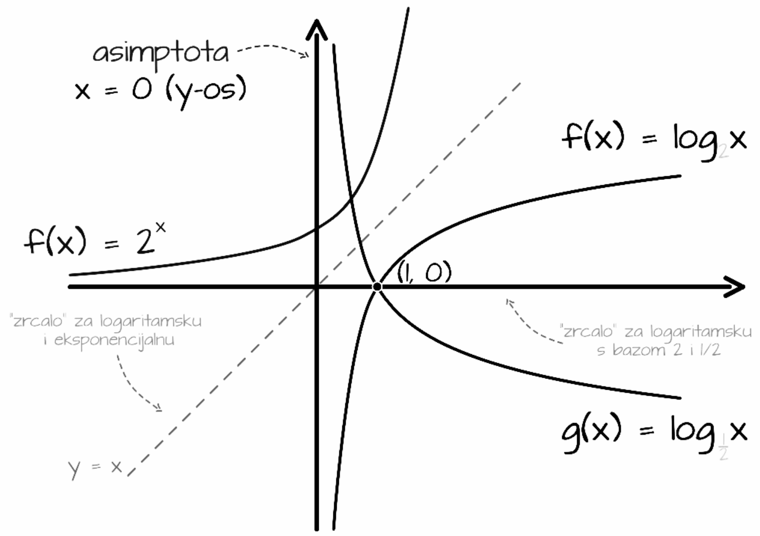


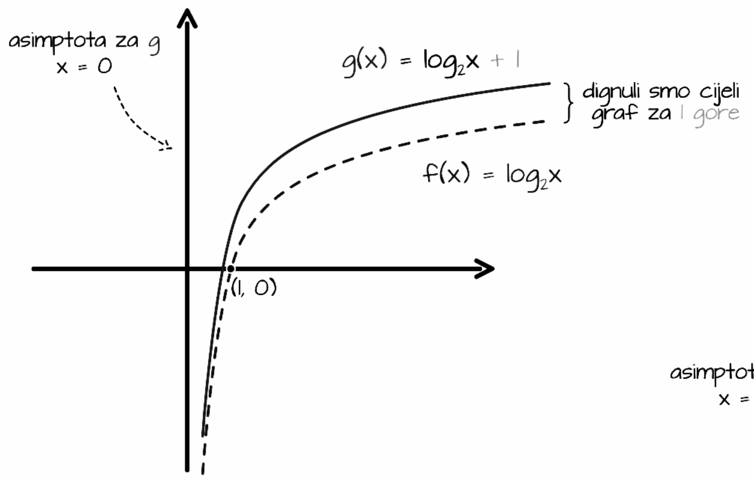
Logaritamska funkcija po bazi a je funkcija $f(x) = \log_a = x$, gdje su x-evi pozitivni realni brojevi i $a > 0, a \neq 1$.

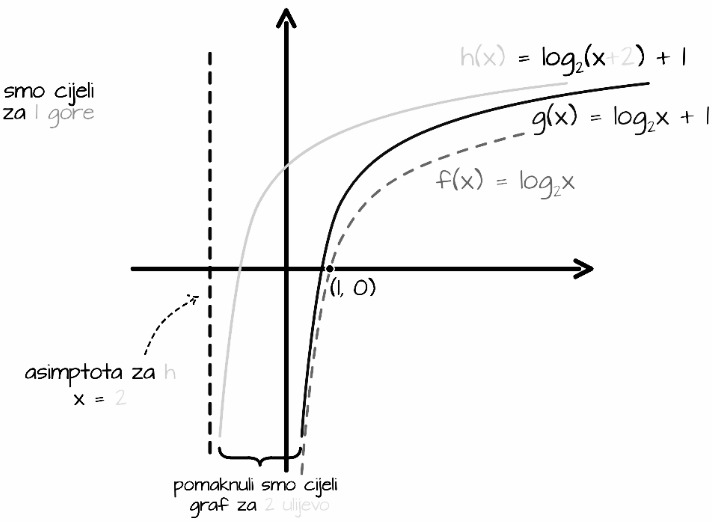
Graf logaritamske funkcije

Logaritamska funkcija je inverzna funkcija eksponencijalnoj. Na to možemo gledati kao da je "obrnuta", kao što su recimo kvadriranje i korjenovanje. U koordinatnom sustavu to znači da su im grafovi simetrični obzirom na pravac $y = x$.

- Graf svake logaritamske funkcije oblika $f(x) = \log_a x$ siječe x-os u točki $(1, 0)$.
- Pomak funkcije po y-osi, tj. gore-dolje, događa se kada funkciji dodamo ili oduzmemo neki broj. Tako će graf funkcije $f(x) = \log_a x + b$ izgledati isto kao i obični graf, samo pomaknut za b prema gore ako je b pozitivan ili dolje ako je b negativan.
- Pomak funkcije po x-osi, tj. lijevo-desno, događa se kada x-u dodamo ili oduzmemo neki broj. Tako će graf funkcije $f(x) = \log_a(x + b)$ izgledati isto kao i obični graf, samo pomaknut za b prema lijevo ako je b pozitivan ili desno ako je b negativan.
- Ako je $a > 1$, funkcija raste (kada gledamo s lijeva na desno).
- Ako je $0 < a < 1$, funkcija pada (opet, kada gledamo s lijeva na desno).
- Grafovi logaritamskih funkcija gdje su baze a i $\frac{1}{a}$, simetrični su obzirom na x-os.
- Grafovi logaritamskih funkcija s argumentima x i $-x$, simetrični su obzirom na y-os.
- Asimptota (pravac kojem se funkcija približava, ali ga nikad ne siječe) logaritamske funkcije $f(x) = \log_a x$ je y-os, odnosno pravac $x = 0$
- Za x možemo uzeti samo pozitivne realne brojeve, odnosno kažemo da je funkcija definirana za sve pozitivne realne brojeve x.
- Funkcija može postići sve realne brojeve, odnosno kažemo da su svi realni brojevi slika funkcije.







Važni logaritmi

Dekadski logaritam je logaritam s bazom 10. Oznaka za logaritam po bazi 10 od x je $\log x$.

Prirodni logaritam je logaritam s bazom e, gdje je e konstanta koja iznosi $2.71828\ldots$. Oznaka za logaritam po bazi e od x je $\ln$.

Računanje s logaritmima

Logaritam po bazi a broja y je eksponent kojim trebamo potencirati bazu a da bi dobili y. Oznaka je $\log_a y$.

$$a^x = y \Longleftrightarrow \log_a y = x$$

Gornju vezu, između eksponencijalne funkcije i logaritma, možemo pamtiti po pravilu "lijevi, desni, srednji". U eksponencijalnoj funkciji, lijevo je a, u sredini je x, a desno y. Kada prelazimo u logaritam, samo ćemo ih posložiti drugim redoslijedom. Primijenimo "lijevi, desni, srednji". Pišemo logaritam, baza je "lijevi" broj, tj. a, zatim ide "desni", to je y i na kraju sve mora biti jednako "srednjem", a to je x. Isti metodu možemo primijeniti i u drugu stranu, kada želimo iz logaritma prijeći u eksponencijalnu funkciju.

Oprez! Jedino na što trebamo paziti kada koristimo ovaj trik je da nam lijevo od znaka jednako uvijek stoji potencija, odnosno logaritam. Ako to zadovoljimo, ostalo je lagano!

Pravila logaritmiranja

$$a^{\log_a x} = x$$

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a x + \log_a y = \log_a xy$$

$$\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$$

$$\log_a x^y = y \cdot \log_a x$$

$$\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_a x$$

$$\log_{a^n} x = \frac{1}{n} \cdot \log_a x$$

$$\log_a x = \frac{1}{\log_x a}$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

$$\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y$$

Eksponencijalne i logaritamske jednadžbe

Eksponencijalna jednadžba

Eksponencijalna jednadžba je jednadžba kojoj je nepoznanica u eksponentu. Drugim riječima, to je jednadžba oblika $a^x = b$, gdje je $a > 0$.

Ako je $b > 0$, jednadžba ima jedno rješenje, a za $b \leq 0$ nema rješenja.

Eksponencijalne jednadžbe u kojima se pojavljuje samo jedna potencija s nepoznanicom u eksponentu rješavamo tako da tu potenciju dovedemo na lijevu stranu, a broj na desnu. Logaritmiramo obje strane, primijenimo vezu između eksponencijalne i logaritamske funkcije ili pravilo "lijevi, desni, srednji" kako bismo došli do rješenja - sve radi!

$$5 \cdot 10^x = 0.5 \quad /:5$$
$$10^x = 0.1$$

lijevi = 10
srednji = x
desni = 0.1

L D S

$$\log_{10} 0.1 = x$$
$$x = -1$$

Ako imamo dvije ili više potencija koje u eksponentu imaju nepoznanicu sređujemo jednadžbu dok na lijevoj strani ne bude samo jedna potencija s nepoznanicom u eksponentu, a na desnoj druga. Cilj je da s obje strane jednakosti bude ista baza te u tom trenutku možemo ispustiti baze i rješavati jednadžbu koju dobijemo kada izjednačimo eksponente.

$$3 \cdot 10^x = 0.3 \cdot 10^x \quad /:3$$
$$10^x = 0.1 \cdot 10^{2x}$$
$$10^x = 10^{-1} \cdot 10^{2x}$$

izjednačimo eksponente

$$\cancel{10}^x = \cancel{10}^{2x-1}$$
$$x = 2x - 1$$
$$x = 1$$

Logaritamske jednadžbe

Logaritamska jednadžba je jednadžba kojoj je nepoznanica u logaritmu. Drugim riječima, to je jednadžba oblika $\log_a x = b$, gdje je $a > 0$ i $a \neq 1$.

Prije rješavanja same logaritamske jednadžbe, **moramo provjeriti uvjete**. Pazimo da argument logaritma (sve što piše u njemu) bude veće od 0, a baza logaritma veća od 0 i različita od 1.

$$\log_2(x + 3) = 2$$

uzimamo sve što ovdje piše u uvjet

uvjet: $x + 3 > 0$

$$x > -3$$

Logaritamske jednadžbe rješavamo tako da logaritam dovedemo na lijevu stranu, a broj na desnu. Ako imamo više logaritama, uz pomoć formula ih se riješimo dok sve ne svedemo na samo jedan logaritam. Primijenimo vezu između logaritamske i eksponencijalne jednadžbe, odnosno pravilo "lijevi, desni, srednji" kako bismo došli do rješenja.

$\log_2 x = 1 - \log_2(x+1)$

$\log_2 x + \log_2(x+1) = 1$

$\log_2(x \cdot (x+1)) = 1$

uvjeti: $x > 0$ i $x + 1 > 0$

$x > -1$

lijevi = 2

srednji = $x \cdot (x+1)$

desni = 1

L D S

$2^1 = x \cdot (x+1)$

$2 = x^2 + x$

$x_1 = 1$ $\quad$ $\cancel{x_2 = -2}$

x_2 ne zadovoljava uvjet

rješenje je samo $x_1 = 1$

Ova skripta je free jer svi mi volimo besplatne stvari!
Ako želiš toga još, **skeniraj ovaj QR kod** i isprobaj besplatno ostale materijale na našoj stranici.

Vektori i skalari

Vektor

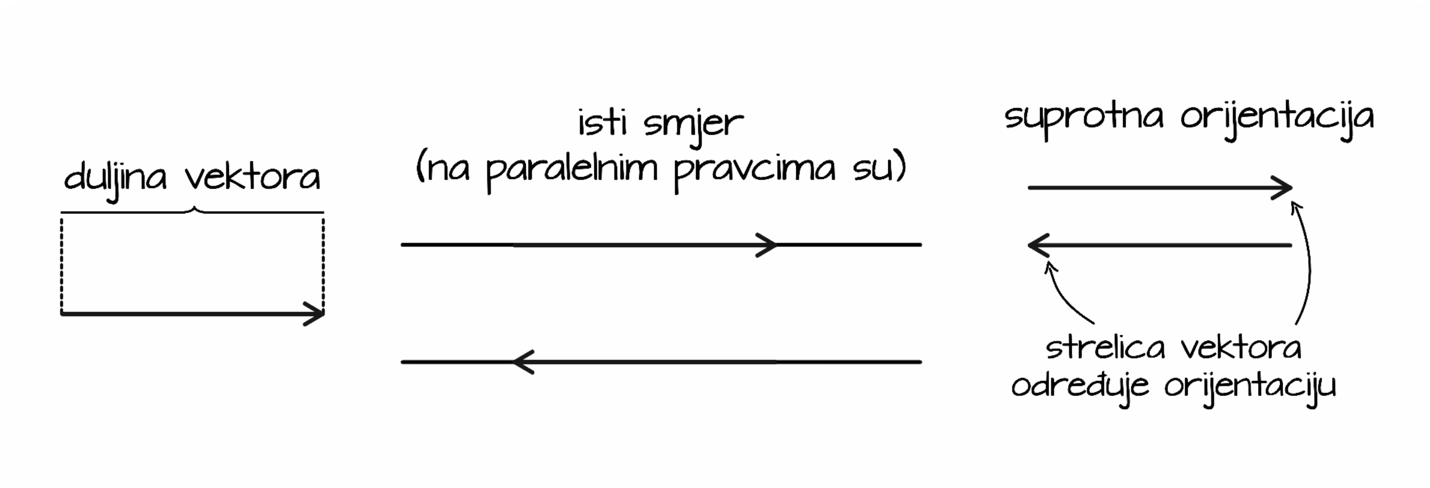
Vektor je usmjerena dužina u kojoj razlikujemo početnu (A) i krajnju točku (B), oznaka $\vec{AB}$.

Duljina (iznos) vektora je duljina dužine $\overline{AB}$, odnosno udaljenost točaka A i B.

Smjer vektora je određen pravcem na kojem leži vektor. Kolinearni su oni vektori koji leže na paralelnim pravcima.

Orijentacija vektora je određena strelicom na kraju vektora. Orijentaciju je smisleno gledati samo kod vektora koji imaju isti smjer. Ako im strelice pokazuju u istu stranu, onda su jednake orijentacije, a ako pokazuju u različite, onda su suprotne orijentacije.

Nul-vektor je vektor kojem se podudaraju početna i krajnja točka. To je zapravo samo jedna točka.



Dva vektora su jednaka ako su im iste sve tri komponente, duljina, smjer i orijentacija. Ako su im duljina i smjer isti, a orijentacija suprotna onda i za vektore kažemo da su suprotni.

Da bi u potpunosti razumjeli vektore, moramo si pojasniti jednu stvar. Svi vektori u prostoru koji imaju istu duljinu, isti smjer i istu orijentaciju su zapravo isti vektori. Iako su možda određeni drugim točkama, oni su isti. Znači da jednom kada imamo vektor, možemo ga micati po prostoru kako želimo, samo pazimo da stoji takav kakav je, i sve će to biti isti vektori!

Razlika između vektora i skalara

Vektori	Skalari
• Iznos • Smjer • Orijentacija	• Iznos

Sviđa ti se što vidiš? E pa ima toga još! **Skeniraj QR kod** pored i pretplati se na pripreme za maturu koje su ti uvijek dostupne, u neograničenim količinama!

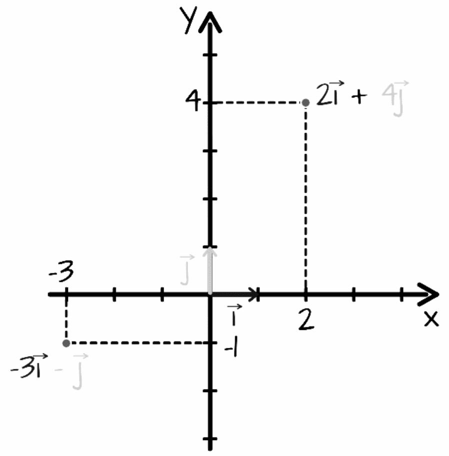
Vektori u koordinatnom sustavu

U koordinatnom sustavu u ravnini istaknimo dva vektora duljine 1 preko kojih ćemo prikazivati sve druge vektore:

- $\vec{i}$ je jedinični vektor koji se nalazi na x-osi
- $\vec{j}$ je jedinični vektor koji se nalazi na y-osi

Radijvektor točke $A(x, y)$ prikazujemo u obliku $x\vec{i} + y\vec{j}$. Vektor $\vec{AB}$ s početkom u točki $A(x_1, y_1)$ i krajem u točki $B(x_2, y_2)$ prikazujemo u obliku:

$$(x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}$$

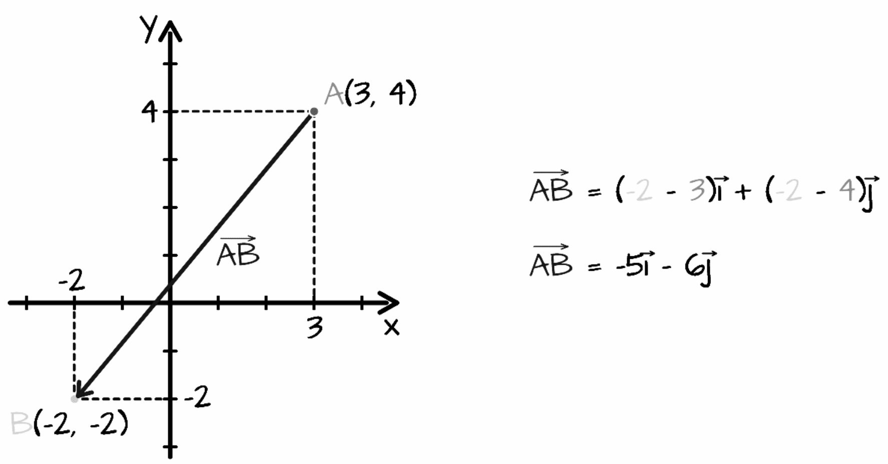


Za radijvektor $a = x\vec{i} + y\vec{j}$, duljinu (modul) računamo kao:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Duljina vektora (modul) $\vec{AB}$, gdje je $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$, se računa formulom:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



Jedinični vektor je vektor duljine 1, a iz bilo kojeg vektora $\vec{a}$ ga možemo dobiti kao $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$. Označavamo ga s nulom u indeksu, a_0.

Suprotne vektore u koordinatnom sustavu prepoznajemo tako što imaju suprotne brojeve ispred $\vec{i}$ i $\vec{j}$.

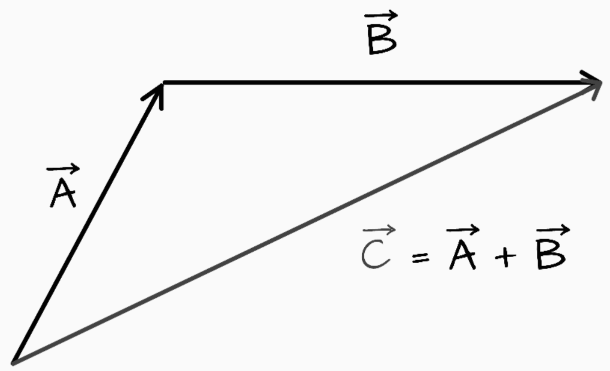
Vektori $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ i $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$ su jednaki ako vrijedi: $x_1 = x_2$ i $y_1 = y_2$.

Kolinearni vektori su u ravnini prikazani paralelnim usmjerenim dužinama. Vektori $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ i $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$ su kolinearni ako su koeficijenti odgovarajućih jediničnih vektora proporcionalni odnosno ako vrijedi:
$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$.

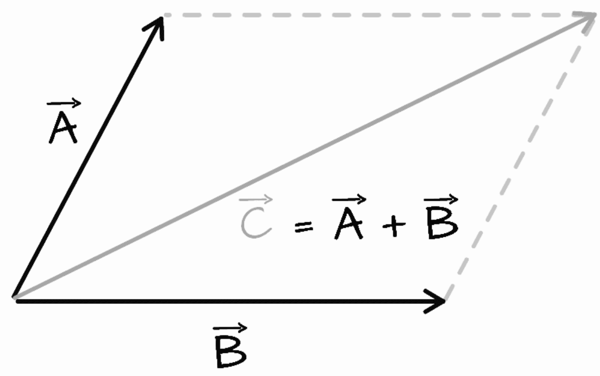
Računanje s vektorima

Zbroj vektora

Pravilo trokuta: Vektore $\vec{A}$ i $\vec{B}$ koji se ne nalaze na istom pravcu zbrajamo tako da najprije početak vektora $\vec{B}$ dovedemo na kraj vektora $\vec{A}$, ili obrnuto. Nakon toga spojimo početak vektora $\vec{A}$ s krajem vektora $\vec{B}$, ili u drugom slučaju obrnuto.



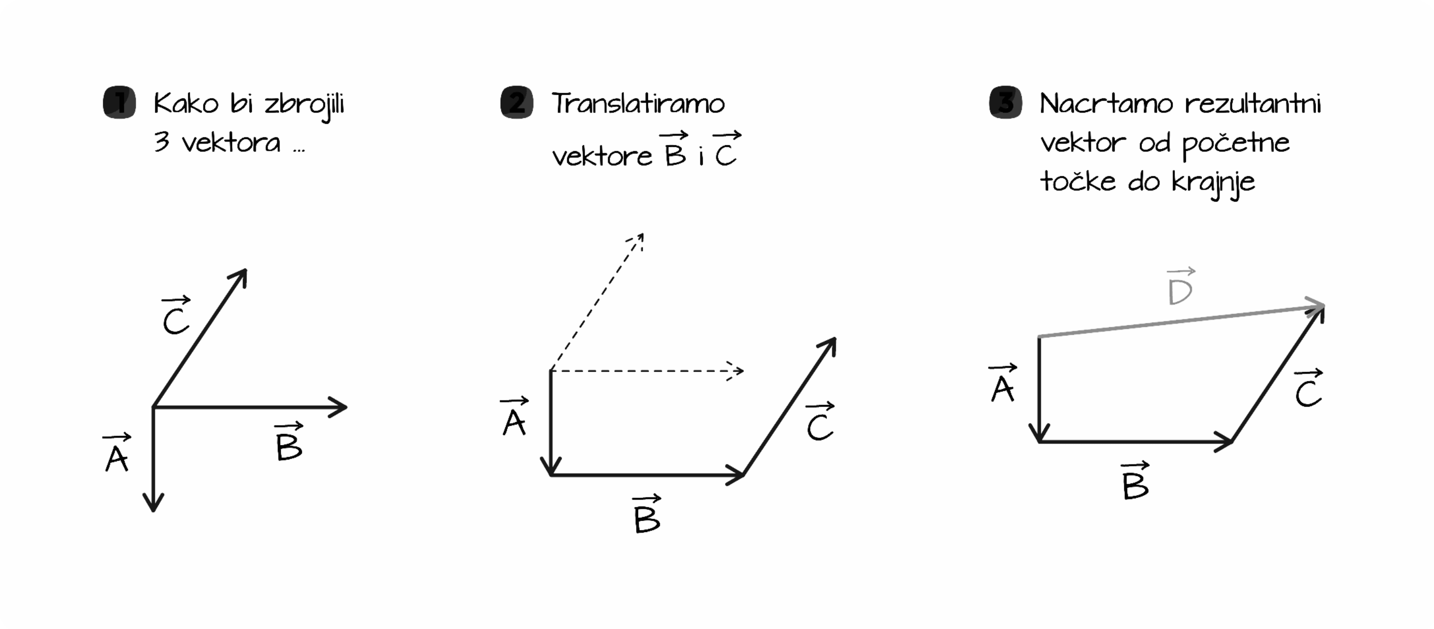
Pravilo paralelograma: Vektore $\vec{A}$ i $\vec{B}$ koji se ne nalaze na istom pravcu zbrajamo tako da najprije početak vektora $\vec{A}$ i početak vektora $\vec{B}$ dovedemo u istu točku. Zatim nacrtamo paralelogram kojemu su dvije stranice vekotor $\vec{A}$ i vektor $\vec{B}$. Zbroj vektora će biti vektor koji čini dijagonala tog paralelograma s istom početnom točkom kao vektori $\vec{A}$ i $\vec{B}$.



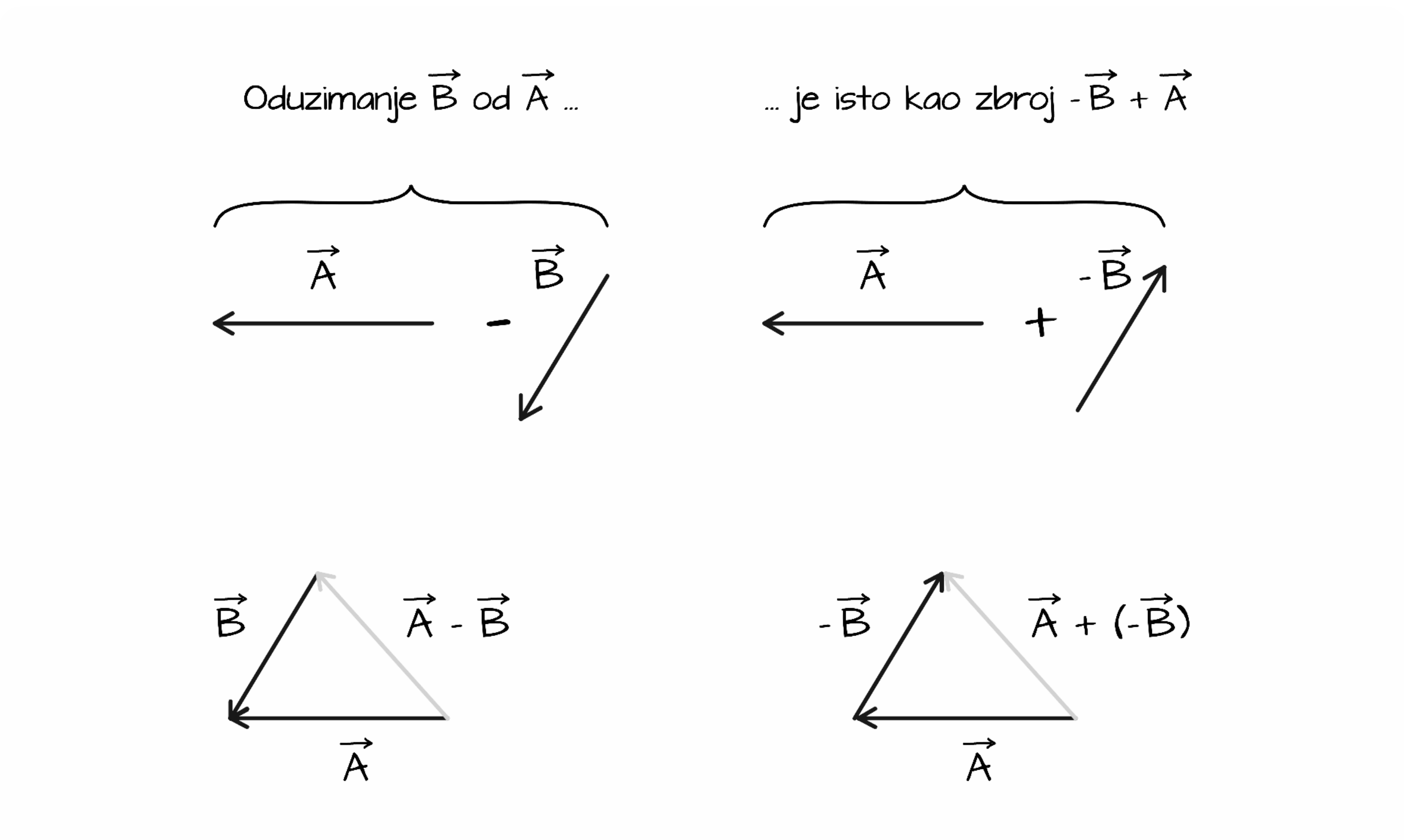
Zbroj vektora na istom pravcu

Zbroj tri vektora

Zbrajanje 3 ili više vektora se svodi na uzastopno dodavanje novih vektora na kraj prethodnog kao što je prikazano na slici. Kao i kod zbrajanja 2 vektora, na kraju spajamo početak prvog i kraj zadnjeg vektora.

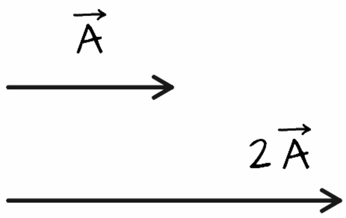


Oduzimanje vektora

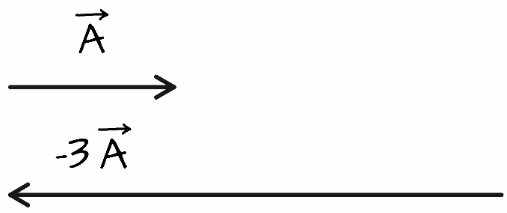


Množenje vektora skalarom

Ako pomnožimo vektor $\vec{a}$ skalarom k dobit ćemo vektor $k\vec{a}$ za koji vrijedi:
- duljina mu je umnožak apsolutne vrijednosti broja k i duljine vektora $\vec{a}$ tj. $|k\vec{a}| = |k||\vec{a}|$, odnosno reći ćemo da mu se duljina produljila $|k|$ puta
- ako je $k > 0$ onda mu je orijentacija jednaka orijentaciji vektora $\vec{a}$, a ako je $k < 0$ onda mu je orijentacija suprotna orijentaciji vektora $\vec{a}$



a) Množenjem vektora s 2 njegova se duljina produlji dva puta



b) Množenjem vektora s negativnim brojem smjer vektora se promijeni, a duljina mu se produlji (u ovom slučaju 3 puta)

Zbrajanje u koordinatnom sustavu

Vektore $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ i $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$ zbrajamo tako da posebno zbrojimo brojeve uz $\vec{i}$, a posebno brojeve uz $\vec{j}$. Oduzimanje je zbrajanje sa suprotnim vektorom.

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j}$$

$\vec{a} = -2\vec{i} + 4\vec{j}$

$\vec{b} = 5\vec{i} - 8\vec{j}$

$\vec{a} + \vec{b} = (-2 + 5)\vec{i} + (4 + (-8))\vec{j}$

$\vec{a} + \vec{b} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$

Skalarni umnožak vektora

Skalarni umnožak vektora dan je sljedećom formulom, gdje su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ neki vektori, a φ kut između njih.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\varphi$$

Skalarni umnožak neka dva vektora $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ i $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$ u koordinatnom sustavu dan je prvom formulom, a druga formula je za računanje kuta između istih vektora

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\varphi$$

$$cos\varphi = \frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$$

Skalarni umnožak okomitih vektora jednak je 0.

PRAVAC

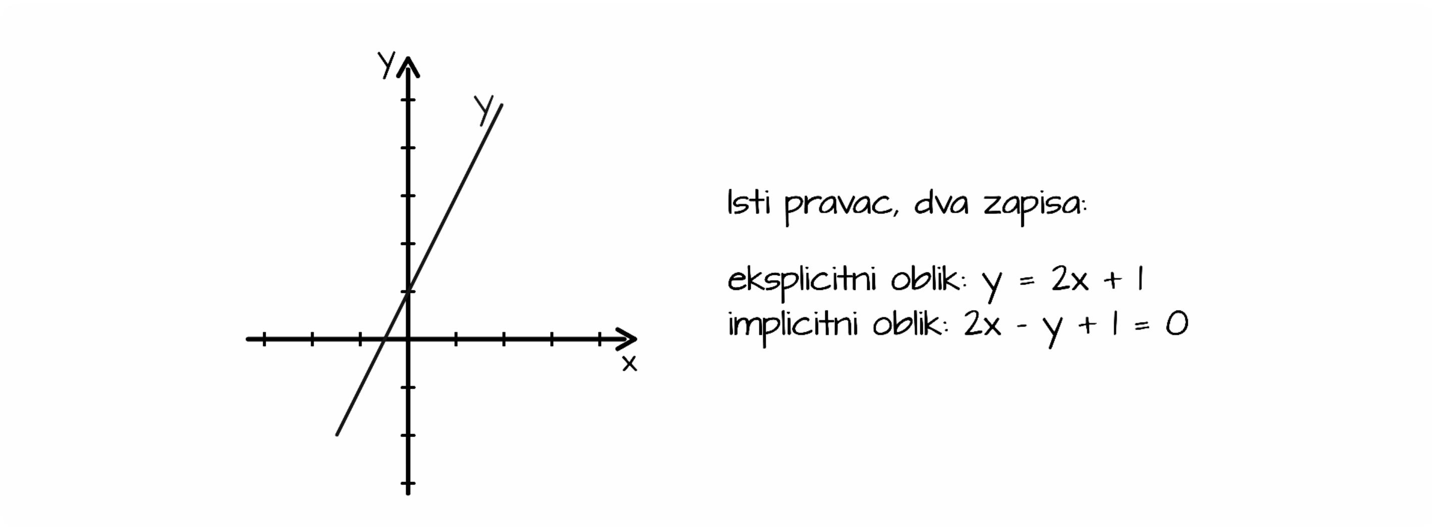
Jednadžba pravca

Pravac je skup svih točaka (x, y) u ravnini koji zadovoljavaju jednadžbu $y = kx + l$. Ovaj oblik jednadžbe pravca se zove eksplicitni. Broj k zovemo koeficijent smjera (nagib pravca), a broj l je odsječak na osi y.

$$y = kx + l$$

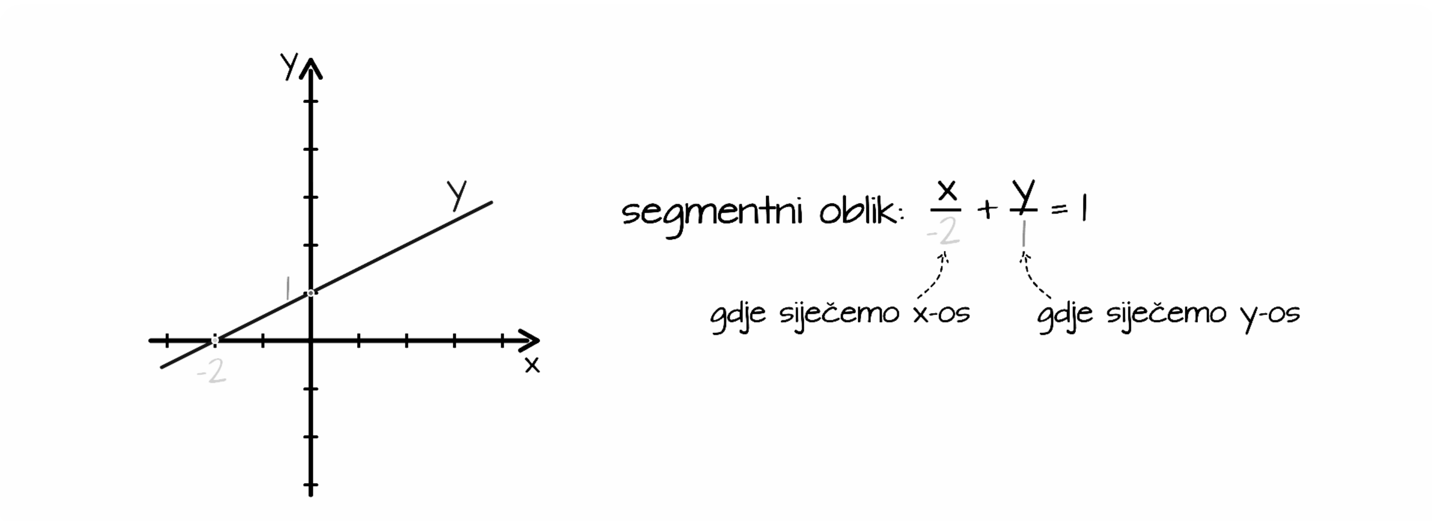
Drugi oblik na koji možemo napisati pravac je implicitni.

$$Ax + By + C = 0$$



Treći oblik je segmentni. Broj m je mjesto gdje pravac siječe x-os, a n je mjesto gdje siječe y-os. Drugim riječima, pravac siječe koordinatne osi u točkama $(m, 0)$ i $(0, n)$.

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$$



Jednadžbu pravca kojem znamo koeficijent smjera k i jednu točku kroz koju prolazi, recimo $A(x_1, y_1)$, zapisujemo na sljedeći način.

$$y - y_1 = k\left(x - x_1\right)$$

Zadnji oblik je jednadžba pravca kroz dvije točke. Neka su $A\left(x_1, y_1\right)$ i $B\left(x_2, y_2\right)$ te točke koje se nalaze na pravcu.

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\left(x - x_1\right)$$

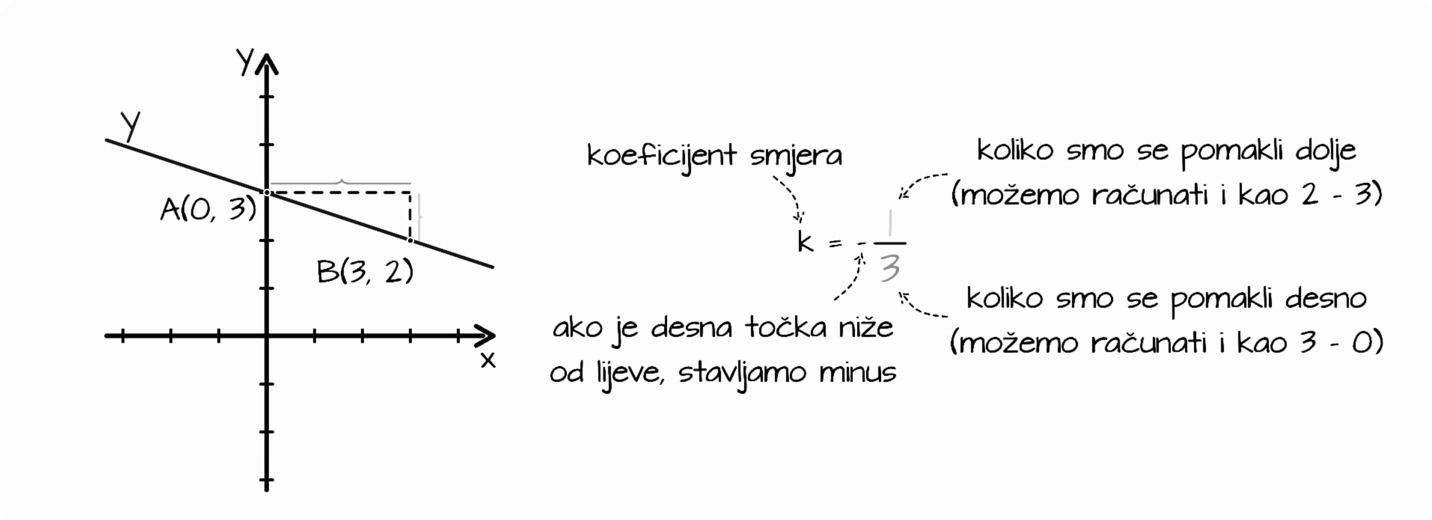
Koeficijent smjera

Koeficijent smjera ili nagib pravca možemo računati na dva načina.

1. Ako imamo zadane dvije točke $A\left(x_1, y_1\right)$ i $B\left(x_2, y_2\right)$.

2. Ako imamo kut φ koji pravac zatvara s pozitivnim (desnim) dijelom x-osi.

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = tg\varphi$$

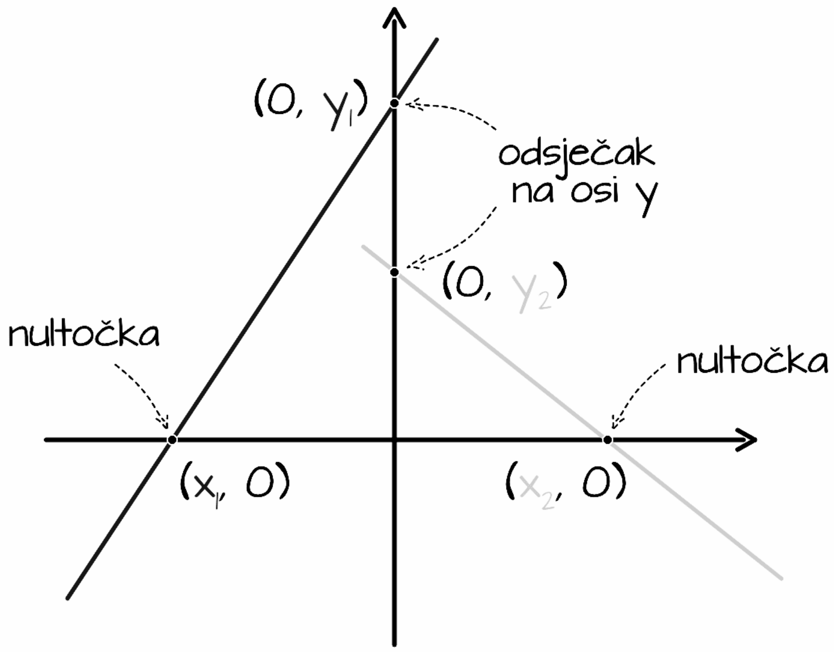


Nultočka i odsječak na osi y

Neke posebne točke na pravcu u koordinatnom sustavu su one u kojima pravac siječe osi x i y.

Nultočka je broj x u kojem graf siječe os x. Možemo ga dobiti i rješavanjem jednadžbe $kx + l = 0$. Zato što se nalazi na osi x, druga koordinata točke koja na prvom mjestu ima nultočku x je uvijek 0.

Odsječak na osi y je broj y u kojem graf siječe os y. Iz jednadžbe pravca već znamo da će on iznositi l. Slično kao kod nultočke, zato što se odsječak nalazi na osi y, prva koordinata točke koja na drugom mjestu ima broj l je uvijek 0.



Ova skripta je free jer svi mi volimo besplatne stvari!
Ako želiš toga još, **skeniraj ovaj QR kod** i isprobaj besplatno ostale materijale na našoj stranici.

Svojstva pravca

Udaljenost točke od pravca

Udaljenost točke $A(x_0, y_0)$ od pravca $Ax + By + C$ računamo:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Ako je pravac zadan u obliku $y = kx + l$, formula glasi:

$$d = \frac{|kx_0 + l - y_0|}{\sqrt{1 + k^2}}$$

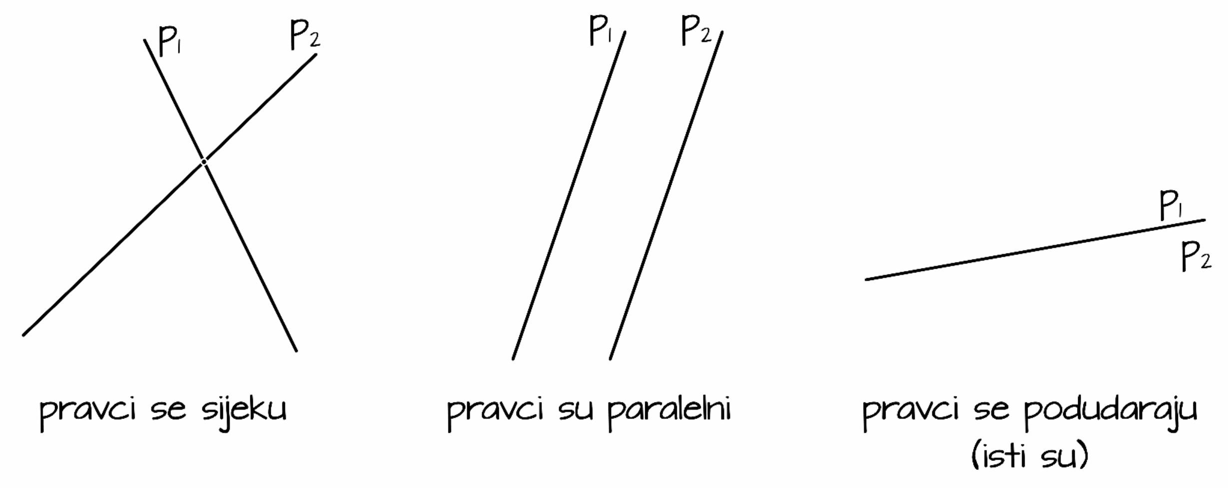
Međusobni položaj dvaju pravaca

Dva pravca mogu se:

- sjeći u jednoj točki
- uopće se ne sjeći (paralelni su)
- preklapati.

Do svakog od ovih slučajeva dođemo rješavanjem sustava jednadžbi koji je nastao od jednadžbi ta dva pravca.

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$$



Kut između dva pravca

Kada pričamo o kutu između pravaca, uvijek mislimo na onaj manji.

Ako s α označimo taj kut, za pravce $y = k_1x + l_2$ i $y = k_2x + l_2$ vrijedi:

$$tg\alpha = \left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|$$

Paralelnost i okomitost

Pravci su paralelni ako vrijedi sljedeće (imamo dvije formule, ovisno zapišemo li pravce u obliku $y = k_1x + l_2$ i $y = k_2x + l_2$ ili $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ i $A_2x + B_2y + C_2 = 0$):

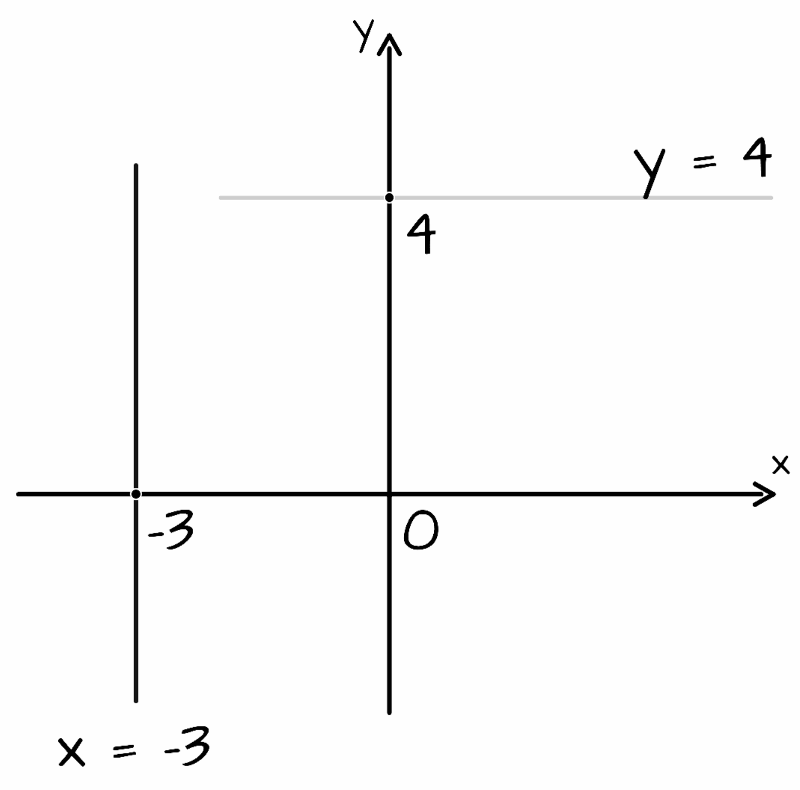
$$k_1 = k_2 \quad \text{ili} \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$$

Pravci su okomiti ako vrijedi sljedeće (imamo dvije formule, ovisno zapišemo li pravce u obliku $y = k_1x + l_2$ i $y = k_2x + l_2$ ili $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ i $A_2x + B_2y + C_2 = 0$):

$$k_1k_2 = -1 \quad \text{ili} \quad A_1A_2 + B_1B_2 = 0$$

Pravci paralelni s koordinatnim osima

- pravac paralelan s x-osi je oblika $y = l$, gdje je l neki broj
- pravac paralelan s y-osi je oblika $x = b$, gdje je b neki broj



NIZOVI

Pojam niza

Niz realnih brojeva je svaka funckija koja svakom prirodnom broju pridruži neki realni. Matematički zapisano, to je funkcija $a:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$. Niz a označavamo s $(a_n)_n$ ili samo (a_n), $n\in\mathbb{N}$.

Dakle, prvi član niza je onaj broj koji je pridružen jedinici. Označavamo a_1 umjesto $a(1)$.

Drugi član niza je a_2, treći a_3 i tako dalje za sve prirodne brojeve.

Opći član niza je element a_n, odnosno broj koji se nalazi na n-tom mjestu u nizu. Niz ima beskonačno mnogo članova, a članove odvajamo zarezom.

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

Zadavanje nizova

- preko općeg člana: zadan je opći član a_n, a onda do bilo kojeg drugog člana dođemo tako da u zapisu i formuli općeg člana zamijenimo n s brojem koji nas zanima
- rekurzivno: zadano je prvih nekoliko članova niza, npr a_1 i a_2, a svi sljedeći su onda zadani korištenjem prethodnih članova
- riječima: samo dobro pročitamo kakav nas niz traže, npr. niz neparnih brojeva bi bio $1, 3, 5, \ldots$

Niz zadan preko općeg člana

Opći član:

$$a_n = \frac{1}{n}$$

$$a_1 = \frac{1}{1} = 1$$

$$a_2 = \frac{1}{2} \quad \ldots\ldots \quad a_{43} = \frac{1}{43} \quad \ldots\ldots$$

$$a_3 = \frac{1}{3}$$

konačni niz: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$

Fibonaccijev niz

primjer rekurzivno zadanog niza

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \end{cases}$$

$$a_3 = a_1 + a_2 = 1 + 1 = 2$$

$$a_4 = a_2 + a_3 = 1 + 2 = 3$$

$$a_5 = a_3 + a_4 = 2 + 3 = 5$$

$$a_6 = a_4 + a_5 = 3 + 5 = 8$$

$$\vdots$$

konačni niz: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$

Monotonost niza

Niz (a_n) je **rastući** ako za svaki n vrijedi $a_n \leqslant a_{n+1}$, odnosno ako je svaki sljedeći član niza veći od prethodnog.

Niz (a_n) je **padajući** ako za svaki n vrijedi $a_n \geqslant a_{n+1}$, odnosno ako je svaki sljedeći član niza manji od prethodnog.

Ako je niz rastući ili padajući, kažemo da je on monoton.

Omeđenost niza

Niz (a_n) je ograničen (omeđen) ako postoje brojevi m i M takvi da vrijedi $m \leqslant a_n \leqslant M$ za svaki broj n.

Drugim riječima, niz je **ograničen odozdo** ako postoji neki broj m od kojeg niti jedan član niza nije manji. Još kažemo da je m donja međa niza.

Niz je **ograničen odozgo** ako postoji neki broj M od kojeg niti jedan član niza nije veći. Još kažemo da je M gornja međa niza.

Aritmetički niz

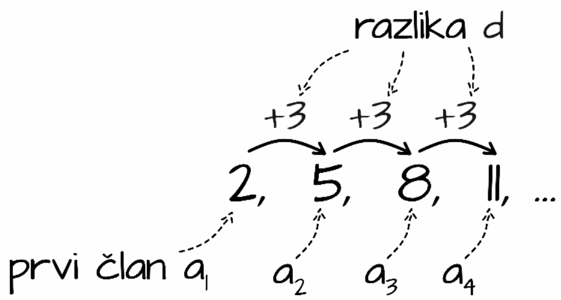
Niz je aritmetički ako je razlika bilo koja dva susjedna člana stalna i jednaka nekom realnom broju d. Drugim riječima, ako za svaki prirodni broj n (osim broja 1) vrijedi

$$a_n - a_{n-1} = d$$

Broj d se zove razlika (diferencija) aritmetičkog niza.

Aritmetički niz još možemo zamišljati kao niz koji ima početak i onda samo na taj prvi broj dodajemo uvijek isti broj kako bi došli do ostalih članova niza.

Ako je prvi član a_1, onda je drugi $a_1 + d$, treći $a_1 + 2d$ i tako dalje.



Po tome možemo napraviti i formulu za opći član aritmetičkog niza:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

Naziv aritmetičkog niza dolazi upravo od aritmetičkog sredine jer svaki član niza možemo dobiti kao aritmetičku sredinu njegovog prethodnika i njegovog sljedbenika:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

Imamo i formulu (zapravo dvije) za zbroj prvih n članova aritmetičkog niza. To je dakle formula za računanje: prvi član + drugi član + . . . + n-ti član, gdje je n taj član do kojeg želimo računati zbroj.

$$S_n = \frac{n}{2}\left(a_1 + a_n\right) = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$$

Geometrijski niz

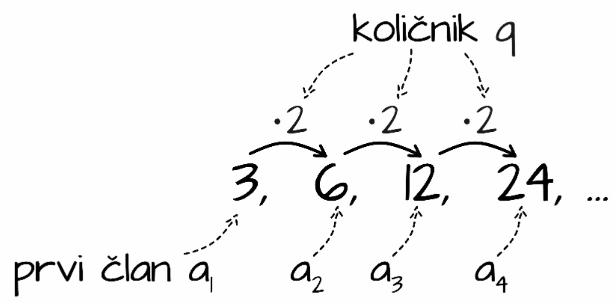
Niz je geometrijski ako je omjer (količnik) bilo koja dva susjedna člana stalan i jednak nekom realnom broju q. Drugim riječima, ako za svaki prirodni broj n (osim broja 1) vrijedi

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q$$

Broj q se zove količnik (kvocijent) geometrijskog niza.

Geometrijski niz još možemo zamišljati kao niz koji ima početak i onda samo taj prvi broj množimo uvijek istim brojem kako bi došli do ostalih članova niza.

Ako je prvi član a_1, onda je drugi $a_1 \cdot q$, treći $a_1 \cdot q^2$ i tako dalje. Primijetimo da smo kod aritmetičkog niza imali zbrajanje, a sada množenje. Samo u tome je razlika!



Sada možemo napraviti i formulu za opći član geometrijskog niza:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Kao što smo imali aritmetičku sredinu, sada imamo i geometrijsku. Naziv geometrijski niz dolazi upravo od geometrijske sredine. Svaki član geometrijskog niza možemo dobiti kao korijen umnoška njegovog prethodnika i sljedbenika:

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$$

Imamo i formulu za zbroj prvih n članova geometrijskog niza. To je dakle formula za računanje: prvi član + drugi čan + $\ldots$ + n-ti član, gdje je n taj član do kojeg želimo računati zbroj.

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

FUNKCIJE

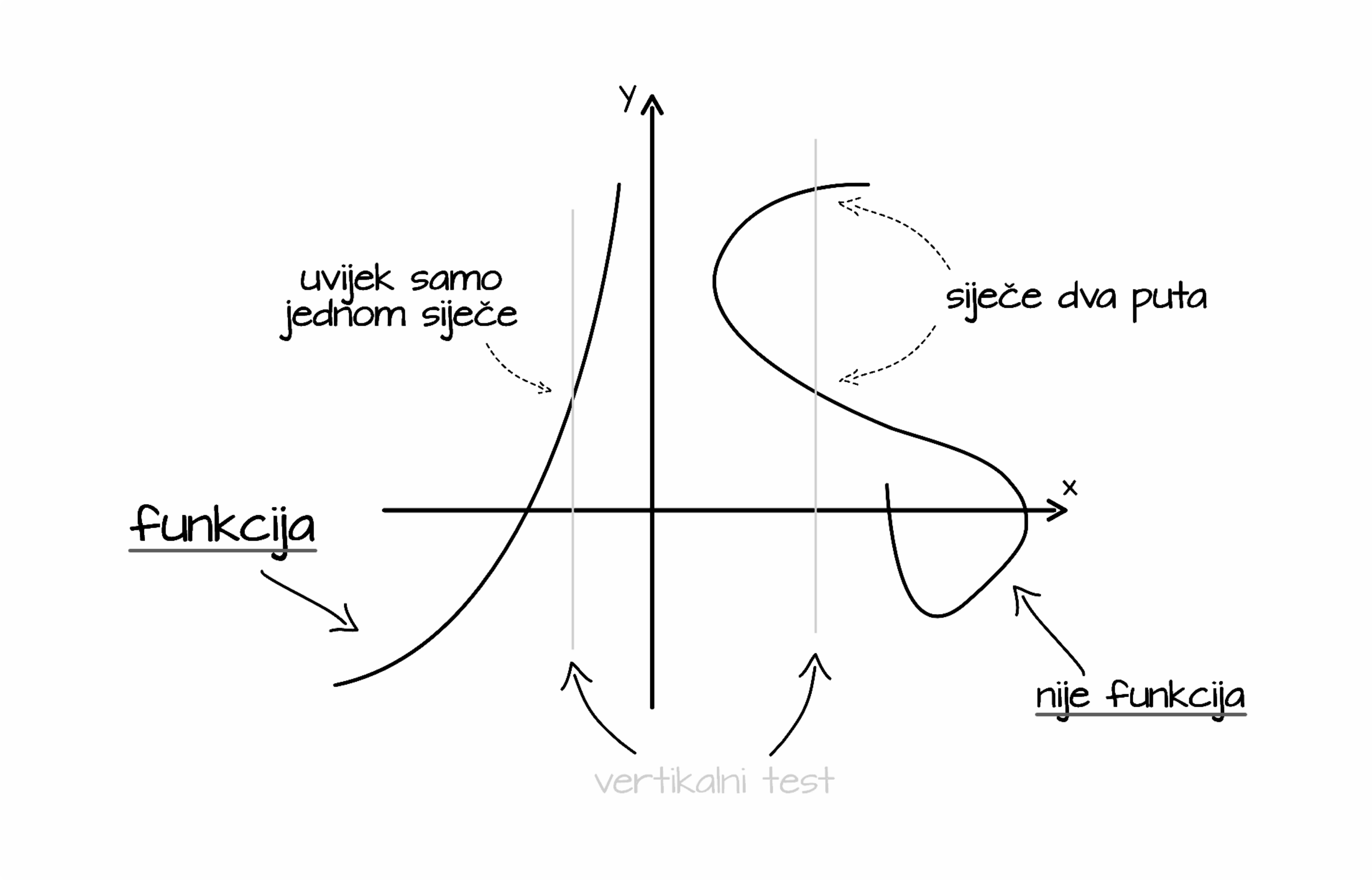
Pojam funkcije

Funkcija je pridruživanje, preslikavanje elemenata iz jednog skupa u drugi. Bitno je da svakom elementu prvog skupa pridružimo točno jedan element drugog skupa - inače nije funkcija.

Funkciju također možemo zamisliti i kao "crnu kutiju" u koju nešto ubacimo, a onda nam ona po nekom pravilu izbaci nešto van.

Graf funkcije je ono što dobijemo kada funkciju nacrtamo u koordinatnom sustavu. Formalno, to je skup točaka $(x, f(x))$, za sve x koje funkcija može primiti.

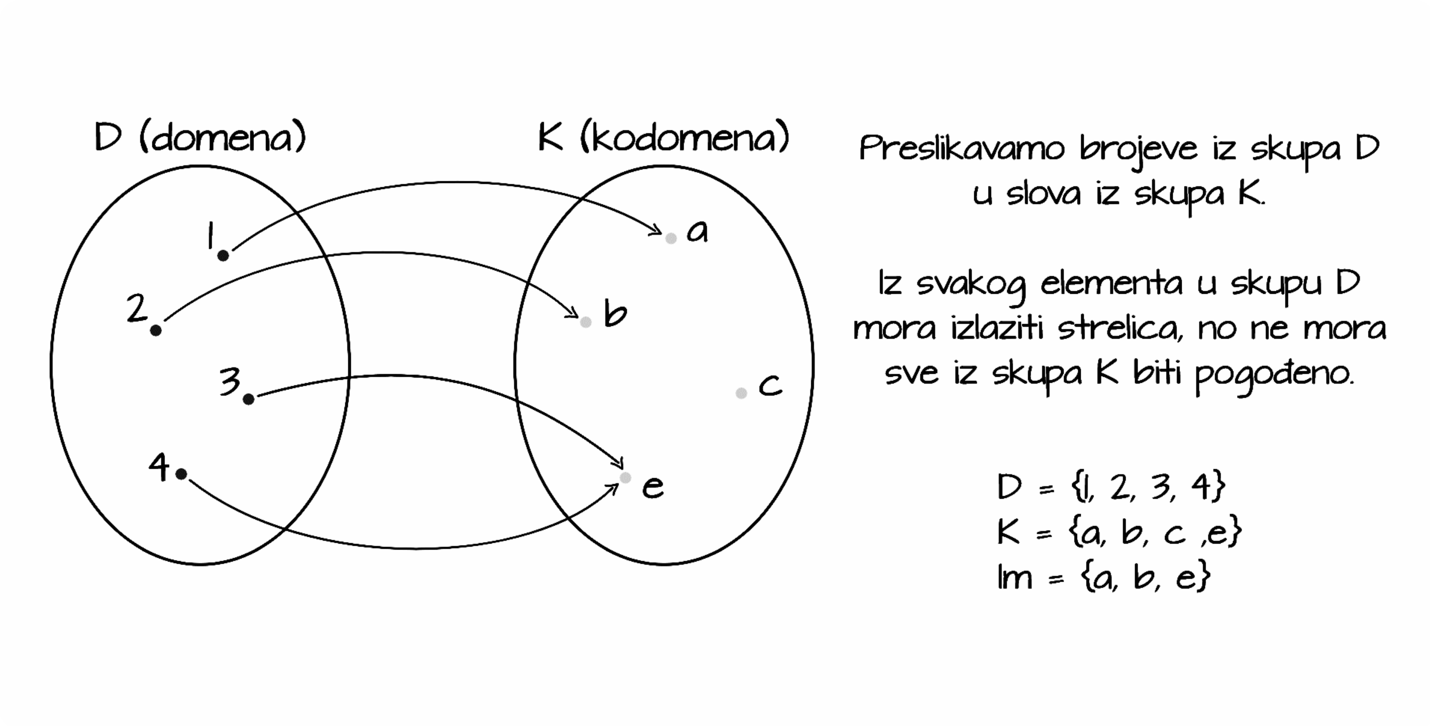
Je li neki graf funkcija možemo provjeriti vertikalnim testom. Ako vertikalni pravac siječe funkciju u dvije ili više točaka, nije funkcija, a u suprotnom jest.



Funkciju označavamo s $f : D \to K$, gdje je f ime same funkcije, D onaj prvi skup iz kojeg uzimamo elemente, a K je skup gdje se nalaze sve moguće vrijednosti koje funkcija može vratiti.

Skup D se zove domena (područje definicije), a K je kodomena (područje vrijednosti). Elemente domene, što je najčešće naš x, zovemo argument (nezavisna varijabla) funkcije, a elemente kodomene y vrijednosti (zavisne varijable) funkcije.

Slika funkcije je skup svih mogućih vrijednosti koje funkcija može poprimiti. Ne mora nužno biti isto što i kodomena. Kodomena može sadržavati još neke elemente koje funkcija nikad neće pogoditi. Oznaka za sliku je Im.

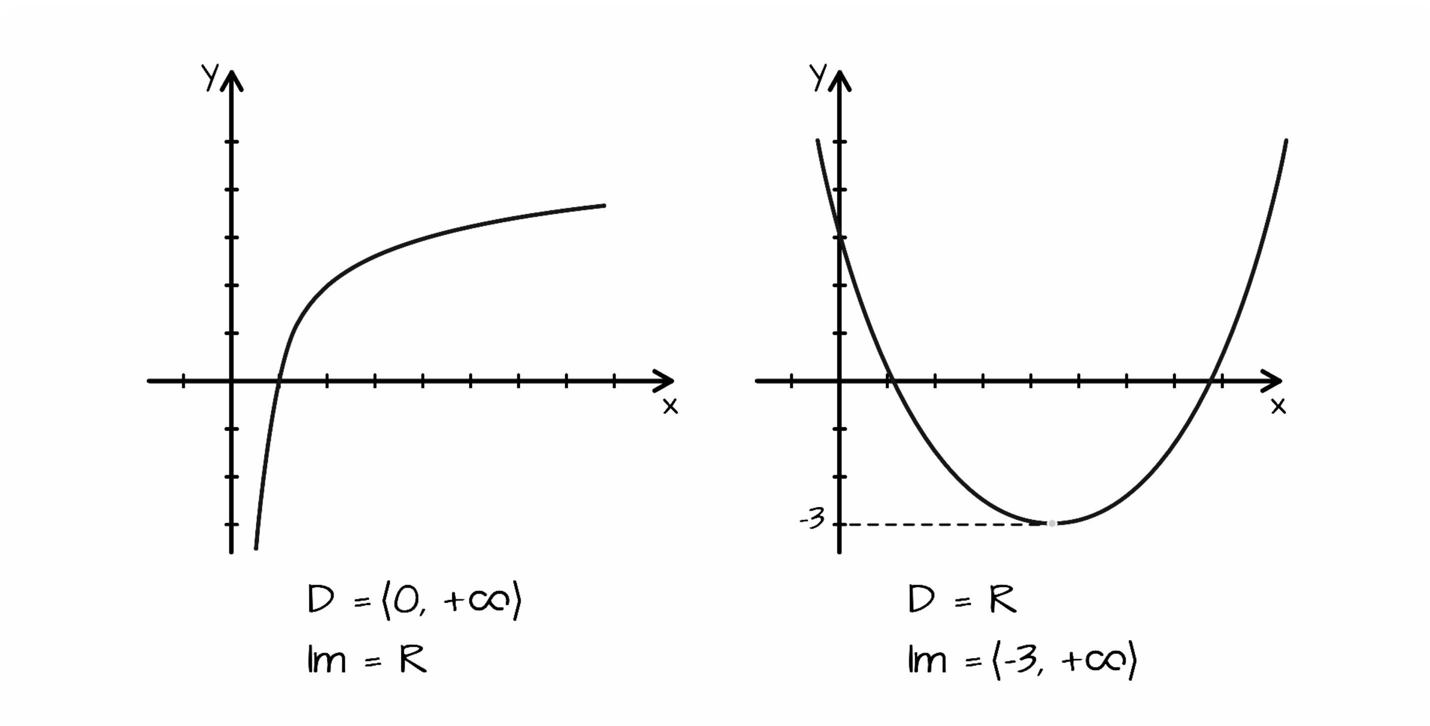


Domena i slika funkcije

Pogledajmo kako se određuju domena i slika funkcije ako ju imamo nacrtano u koordinatnom sustavu.

Domenu gledamo na x-osi, odnosno koji su to sve x-evi koji će davati neku vrijednost funkcije. Npr. logaritamska funkcija na prvoj slici, ne izbacuje nikakvu vrijednost za $x=-1$ jer iznad tog x-a nema ničega. Ali recimo za $x=2$, vidimo da je iznad njega točno jedna točka pa je on u domeni.

Sliku određujemo na isti način, samo gledamo po y-osi. Dakle pitamo se, koji su to sve y-i koje funkcija može postići? Zamislimo si kao da spljoštimo graf na y-os i pogledamo što je sve taj graf pogodio. To će nam upravo biti slika. Za domenu smo mogli razmišljati na isti način, samo bi graf morali spljoštiti na x-os.



Postoje tri pravila za određivanje domene funkcije, ovisno o kojoj se funkciji radi.

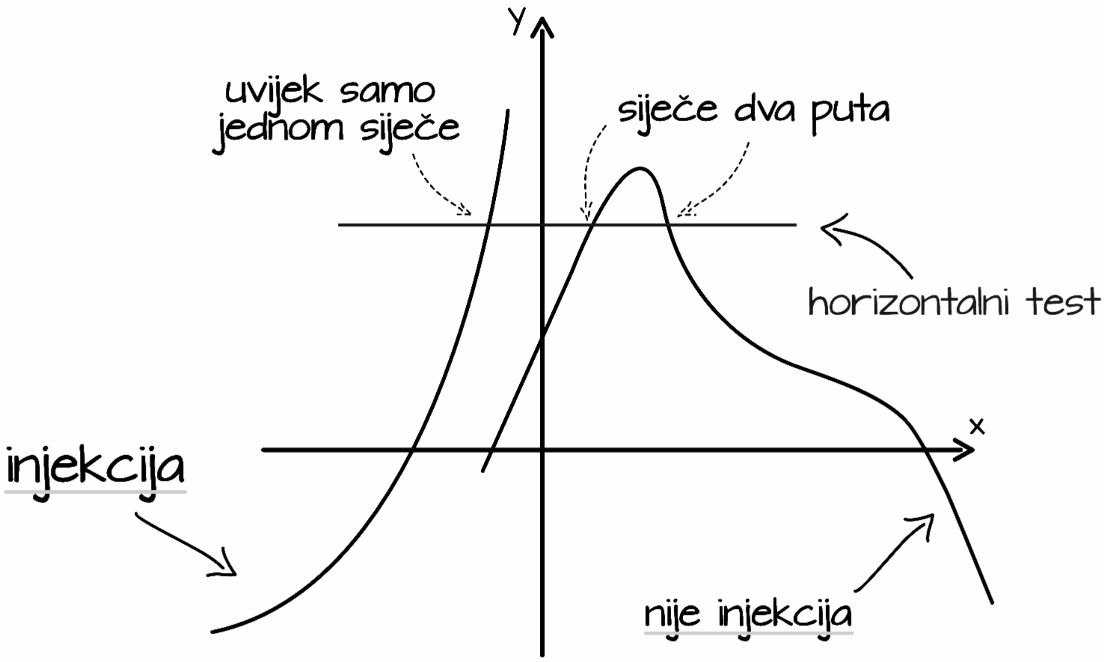
- ako u funkciji imamo razlomak, bitno je da nazivnik bude različit od 0

• ako u funkciji imamo korijen, bitno je da veličina pod korijenom bude veća ili jednaka 0

• ako u funkciji imamo logaritam, moramo paziti na dvije stvari:
1) baza logaritma mora biti veća od 0 i različita od 1
2) veličina pod logaritmom mora biti veća od 0

Injekcija, surjekcija i bijekcija

Funkcija je injekcija ako se svaki x preslika u svoj, drugačiji y tj. ako ne postoje dva x-a za koja će funkcija izbaciti istu vrijednost. Injektivnost se provjerava horizontalnim testom. Slično kao i vertikalni test, ako vodoravni pravac siječe funkciju u dvije ili više točke, nije injekcija, a u suprotnom jest.



Funkcija je surjekcija ako je slika funkcije jednaka kodomeni funkcije. Drugim riječima, ako je svaki element kodomene pogođen.

Funkcija je bijekcija ako je injekcija i surjekcija.

Vrijednost funkcije

Kada želimo izračunati vrijednost neke funkcije u nekoj točki x, sve što trebamo napraviti je zamijeniti svako pojavljivanje varijable x u funkciji s brojem koji mu je pridružen. Izraz koji dobijemo bi trebao imati samo brojeve, njega izračunamo i rezultat će biti ono što zovemo vrijednost funkcije.

$$f(x) = x^2 + 10^x + x + 2 \qquad f(3) = 3^2 + 10^3 + 3 + 2$$

$$x = 3 \qquad f(3) = 1014$$

Kompozicija funkcija

Kompozicija funkcija je operacija među funkcijama koja označava djelovanje jedne funkcije na drugu. Preciznije, jedna funkcija djeluje normalno, kao što smo navikli, na argument x, a druga funkcija djeluje na rezultat koji izbaci prva funkcija za taj x.

Za funkcije f i g, kompozicija funkcija f i g se označava s $g \circ f$.

Kompoziciju možemo računati na dva načina. Prvi je da izračunamo kako izgleda baš funkcija koja je nastala kao kompozicija, a onda uvrstimo broj koji nas zanima. U drugom načinu prvo izračunamo vrijednost unutarnje funkcije u broju koji je zadan, a onda za dobivenu vrijednost izračunamo vrijednost druge, vanjske funkcije.

Oprez! $g \circ f \neq f \circ g$

$$f(x) = x + 1$$
$$g(x) = 2x - 1$$
$$x = 3$$

$$g \circ f = g(f(x)) = g(x+1) =$$
$$= 2 \cdot (x+1) - 1 = 2x + 1$$
$$(g \circ f)(3) = 2 \cdot 3 + 1 = 7$$

$$f(x) = x + 1$$
$$g(x) = 2x - 1$$
$$x = 3$$

$$g \circ f = g(f(x))$$
$$f(3) = 3 + 1 = 4$$
$$g(4) = 2 \cdot 4 - 1 = 7$$

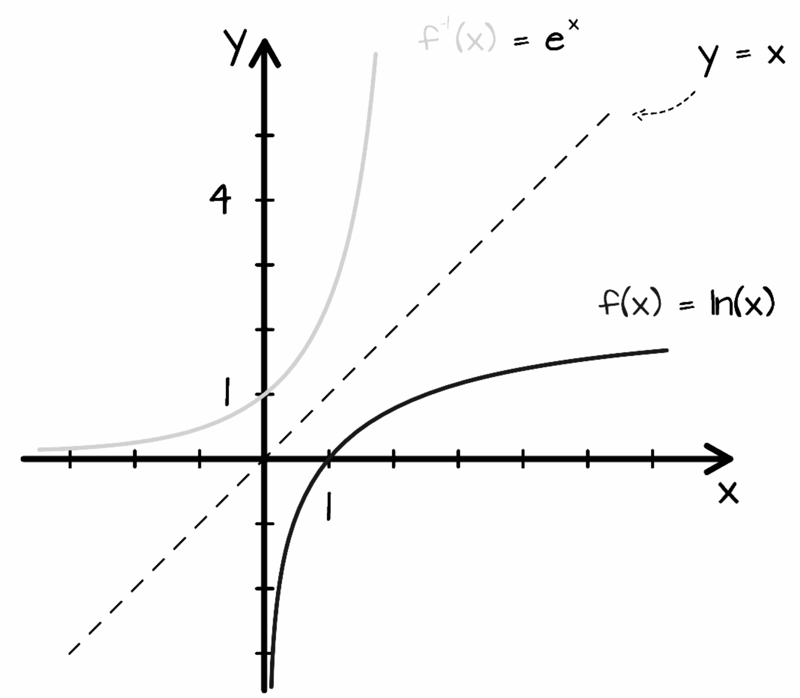
Inverzna funkcija

Funkcije g inverzna je funkciji f ako vrijedi:

- $g(f(x)) = x$ za svaki $x \in D_f$
- $f(g(y)) = y$ za svaki $y \in D_g$.

Pišemo $g = f^{-1}$. U isto vrijeme je funkcija f inverzna funkciji g te pišemo $f = g^{-1}$.

Grafovi inverznih funkcija f i g simetrični su s obzirom na pravac $y = x$.



Postupak za traženje inverzne funkcije funkciji $f(x)$:

1. zapišemo $y = f(x)$
2. jednadžbu $y = f(x)$ riješimo po nepoznanici x
3. ako postoji jedinstveno rješenje te jednadžbe, tada je inverzna funkcija $x = f^{-1}(y)$
4. na kraju samo zamijenimo imena nepoznanica, gdje piše x stavit ćemo y i obrnuto te dobijemo zapis $y = f^{-1}(x)$

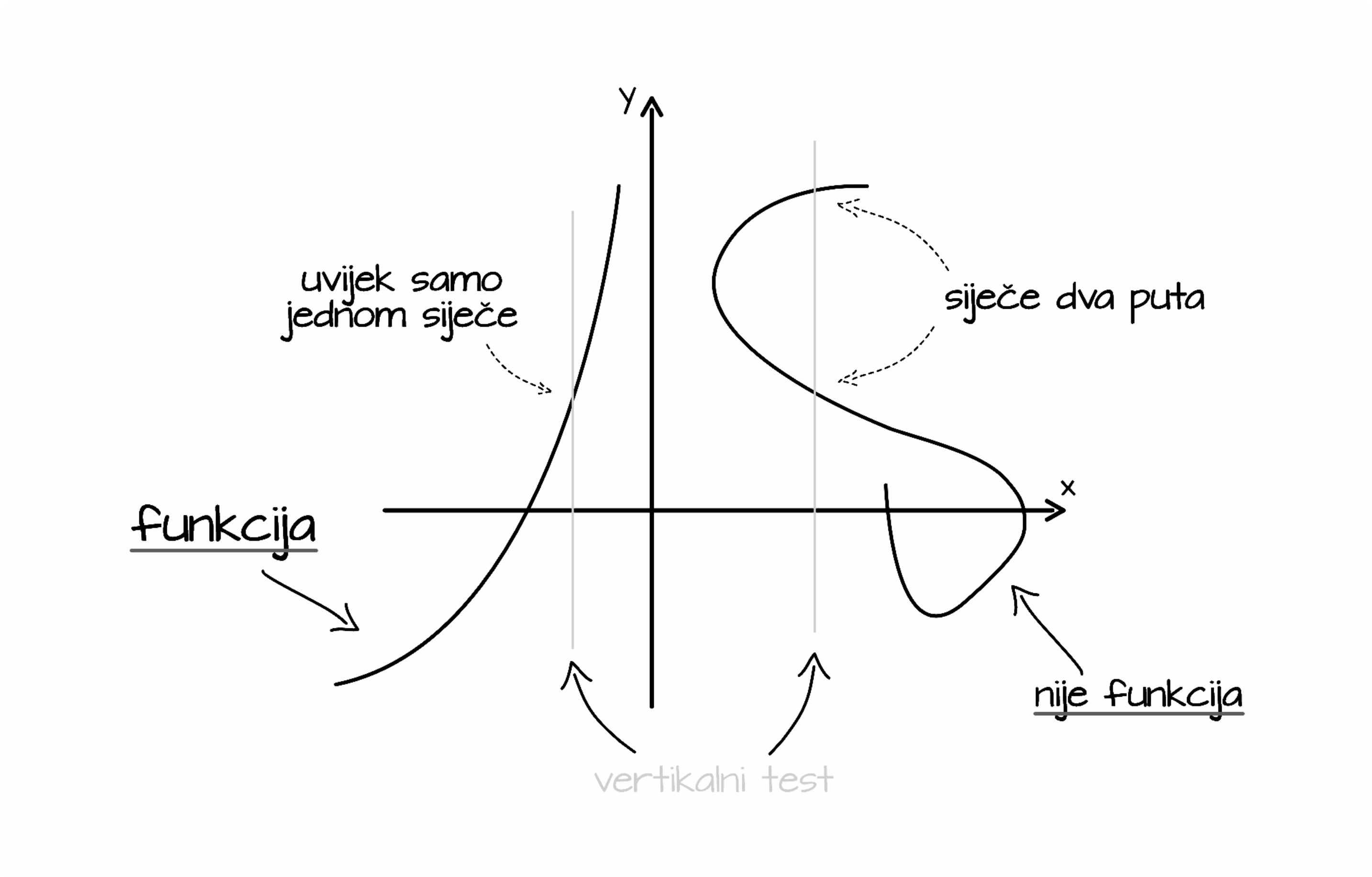
Napomena: Funkcija ima inverznu funkciju onda i samo onda ako je ona bijekcija.

Svojstva funkcija

Graf funkcije

Graf funkcije je ono što dobijemo kada funkciju nacrtamo u koordinatnom sustavu. Formalno, to je skup točaka $(x, f(x))$, za sve x koje funkcija može primiti.

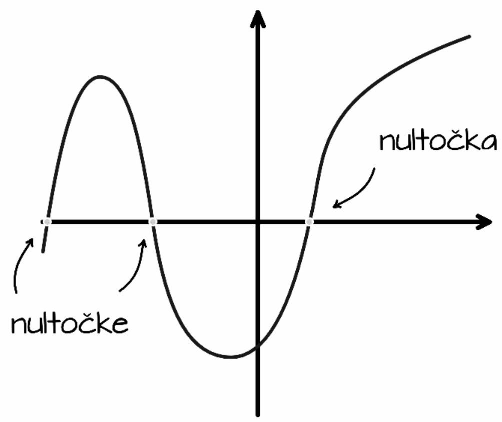
Ne mora svaki graf biti funkcija. Međutim, za bilo koji graf lako možemo provjeriti je li funkcija ili ne, takozvanim vertikalnim testom. Ako negdje na grafu možemo povući ravnu, uspravnu liniju tako da siječe graf u dvije ili više točke, onda to nije funkcija. U suprotnom je!



Nultočke funkcije

Nultočka je broj x u kojem graf siječe os x. Možemo ga dobiti i rješavanjem jednadžbe koju dobijemo kada funkciju izjednačimo s 0. Zato što se nalazi na osi x, druga koordinata točke koja na prvom mjestu ima nultočku x je uvijek 0.

Funkcija može imati nula nultočaka, ali može ih imati i puno.

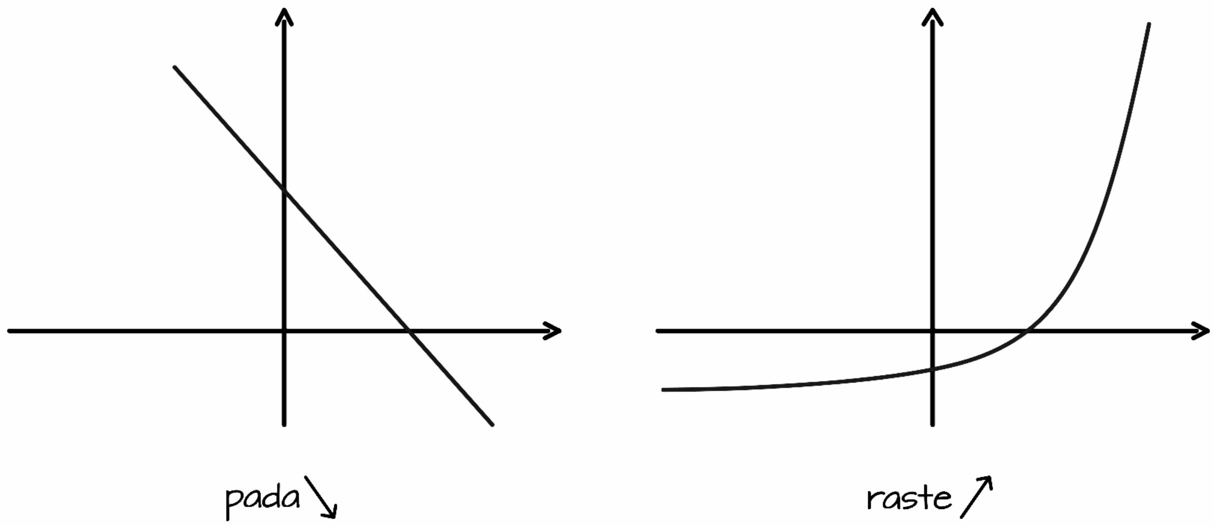


Monotonost

Funkcija je rastuća ako za što veći x koji ubacimo u funkciju, ona izbaci i veći broj nazad. Dakle, ako računamo vrijednost funkcije za neka dva broja, funkcija će vratiti veću vrijednost za veći od tih brojeva. Na grafu, ako gledajući s lijeva na desno vidimo da funkcija ide prema gore, da se penje, onda je funkcija rastuća.

Funkcija je padajuća ako za što veći x koji ubacimo u funkciju, ona izbaci manji broj. Dakle, ako računamo vrijednost funkcije za neka dva broja, funkcija će vratiti manju vrijednost za veći od tih brojeva. Na grafu, ako gledajući s lijeva na desno vidimo da funkcija ide prema dolje, da se smanjuje, onda je funkcija padajuća.

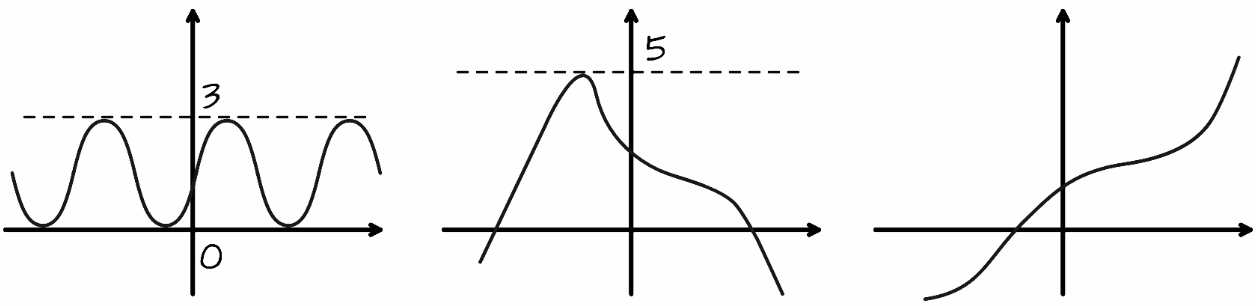
Monotone funkcije su ili rastuće ili padajuće funkcije.



Omeđenost

Funkcija f je ograničena (omeđena) ako su sve vrijednosti koje funkcija poprima veće od nekog broja i manje od nekog drugog broja. Formalno, ako je $m \leq f(x) \leq M$ za neke brojeve m i M.

U suprotnom ćemo reći da je funkcija neomeđena.



odozgora omeđena s 3
odozdo omeđena s 0

odozgora omeđena s 5
odozdo neomeđena

odozgora neomeđena
odozdo neomeđena

Parnost i neparnost

Funkcija f je parna ako vrijedi $f(-x)=f(x)$. Graf parne funkcije je simetričan obzirom na y-os.

Funkcija f je neparna ako vrijedi $f(-x)=-f(x)$. Graf neparne funckije je simetričan obzirom na ishodište.

Za sve druge funkcije kažemo da nisu niti parne niti neparne.

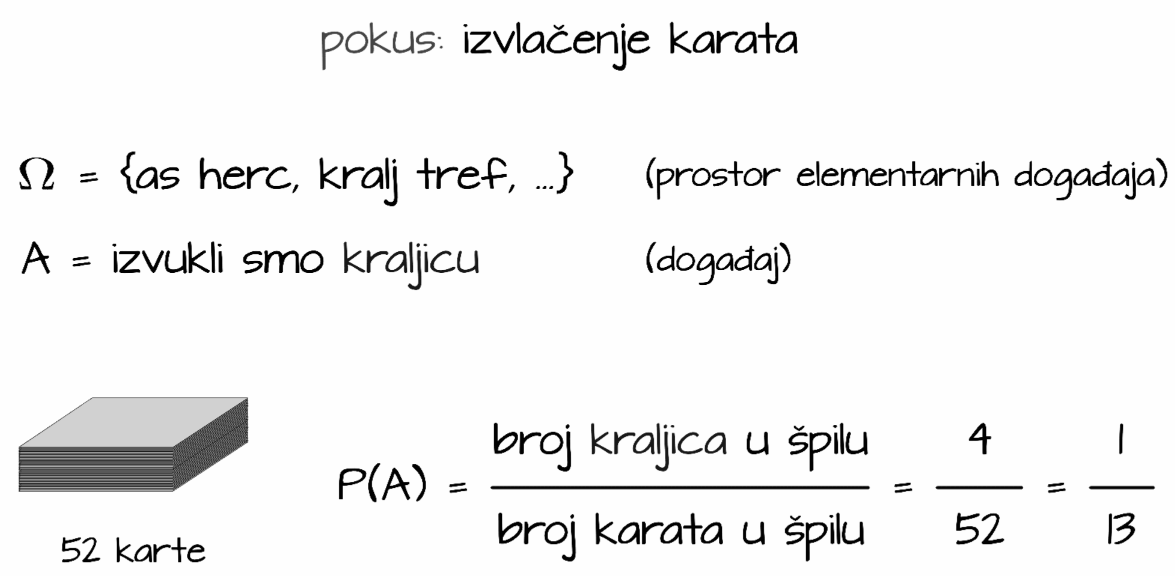
Periodičnost

Funkcija f je periodična s periodom T ako vrijedi $f(x)=f(x+T)$, odnosno vrijednost funkcije f se ponovi svaki put kada se pomaknemo za T. Najmanji takav pozitivni period T se zove temeljni period. Na grafu, periodičnost znači da ćemo imati neki komad funkcije koji će se svako toliko ponoviti.

Vjerojatnost

Događaj je bilo koji podskup skupa elementarnih događaja.

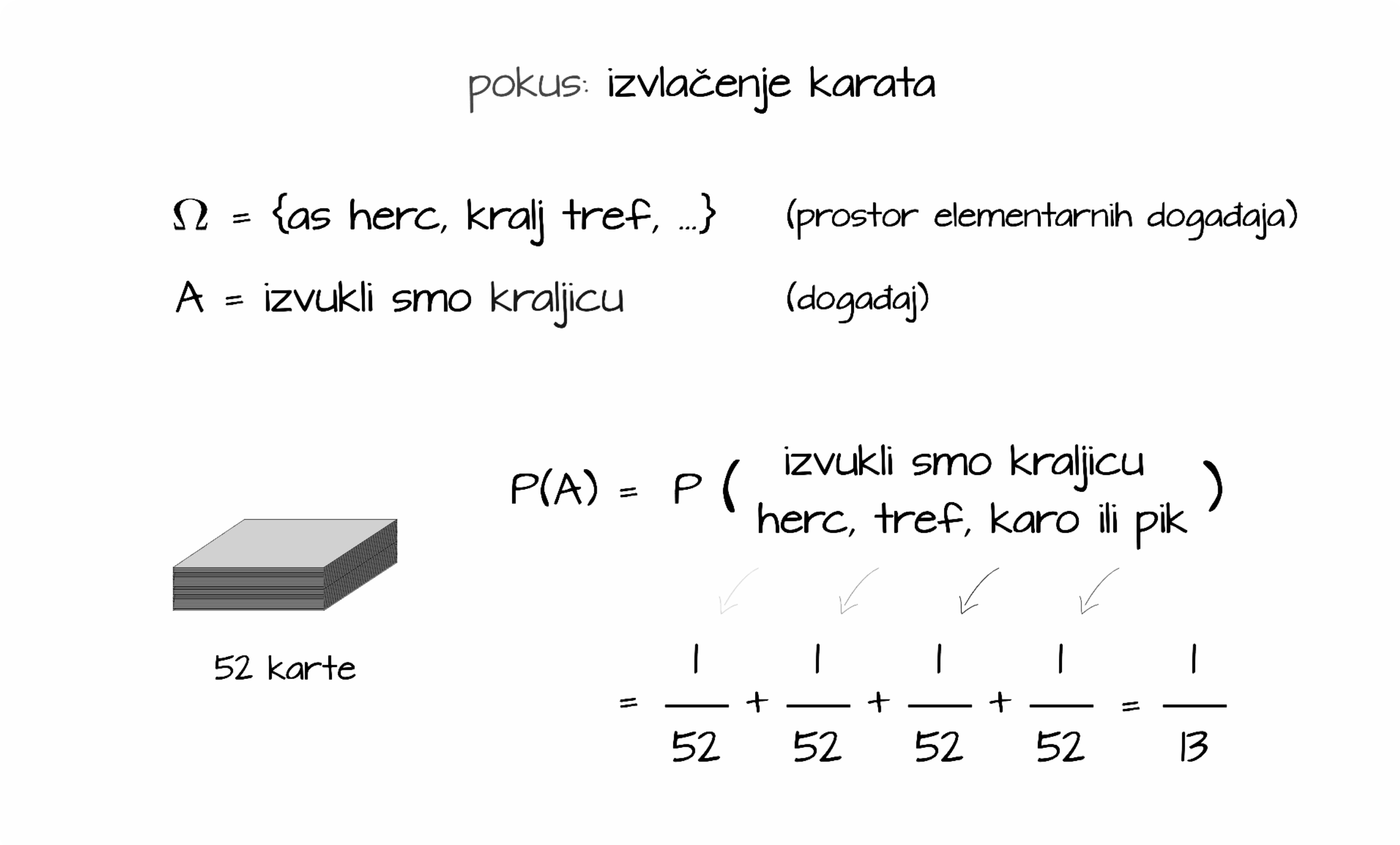
Razlika između elementarnog događaja i događaja je u tome što elementarni događaj gleda samo jednu moguću vrijednost kako pokus može završiti, a događaj može gledati jedan ili više rezultata. Na primjer, ako je pokus izvlačenje karata iz špila, elementarni događaj je "izvukli smo kralja herc", a događaj bi mogao biti "izvukli smo bilo kojeg kralja"(tu dakle imamo 4 mogućnosti "izvukli smo kralja herc, tref, karo ili pik").



Neka pokus ima konačno mnogo ishoda(elementarnih događaja). Vjerojatnost svakog ishoda je neki pozitivni broj. Ono što mora vrijediti je da je zbroj svih vjerojatnosti elementarnih događaja jednak 1.

Vjerojatnost događaja je zbroj vjerojatnosti elementarnih događaja od kojih je taj događaj sastavljen.

Vjerojatnosni prostor čine skup elementarnih događaja Ω i na njemu definirana vjerojatnost.



Klasični vjerojatnosni prostor

Klasični vjerojatnosni prostor je vjerojatnosni prostor u kojem su svi ishodi jednako vjerojatni. Na primjer, bacanje novčića ili bacanje kockice.

Ako imamo n mogućih ishoda, onda je vjerojatnost jednog ishoda jednaka $\frac{1}{n}$. Ako imamo događaj koji se sastoji od više ishoda, tada imamo donju formulu:

$$p(A) = \frac{k}{n}$$

Nezavisni događaji

Neki događaji jednostavno nisu povezani jedan s drugim, odnosno ishod jednog ne utječe na ishod drugog. Na primjer, događaji "sutra će padati kiša" i "na kocki će pasti broj 5".

Takve događaje zovemo nezavisni događaji.

Za nezavisne događaje vrijedi da je vjerojatnost da se dogode svi događaji(odnosno njihov presjek) jednaka umnošku vjerojatnosti svakog događaja posebno, što govori donja formula.

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$$

$$p(A \cap B \cap C) = p(A) \cdot p(B) \cdot p(C)$$

Bernoullijeva shema

Zamislimo da ponavljamo neki pokus n puta. Taj pokus ima samo dva ishoda - može biti bilo što, uspjeh i neuspjeh, pismo i glava, ili nešto slično. Vjerojatnost prve opcije je p, a druge je onda $1-p$. Vjerojatnost da se prva opcija ponovi točno k puta računa se Bernoullijevom shemom.

$$p(\text{ točno k puta prva opcija }) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, 0 \leq k \leq n$$

Uvjetna vjerojatnost

Imamo dva događaja A i B tako da je događaj B moguć, to jest vjerojatnost $P(B) > 0$. Za takve događaje možemo računati uvjetnu vjerojatnost. Puni naziv je uvjetna vjerojatnost događaja A uz uvjet da se dogodio događaj B, a formula je dolje u dva oblika.

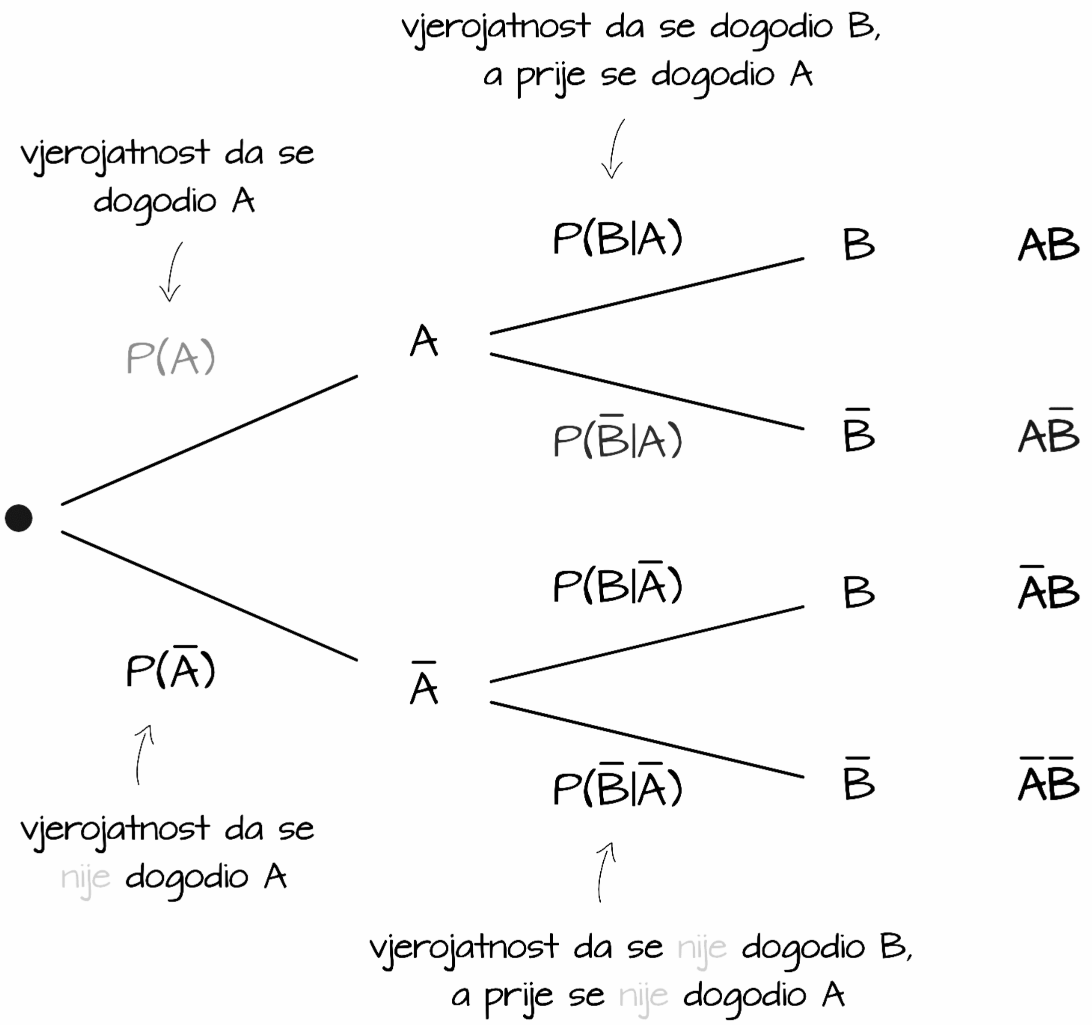
$$p(A \mid B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}.$$

$$p(A \cap B) = p(B) \cdot p(A \mid B)$$

Vjerojatnosno stablo

Preko vjerojatnosnog stabla možemo računati vjerojatnosti i uvjetne vjerojatnosti. Dobro nam dođe kada imamo kompliciranije primjere, a osobito kod onih koji imaju zadane informacije po nekakvim koracima.

U prvom grananju stabla gledamo kolika je vjerojatnost da se dogodio neki od mogućih ishoda u prvom slučaju. Dalje, za svaki od tih slučajeva gledamo uvjetnu vjerojatnost da se dogodio novi događaj, uz uvjet da se dogodio ovaj prije njega u stablu. Tako nastavljamo dalje koliko treba.



$$P(A\bar{B}) = P(A) \cdot P(\bar{B}|A)$$

Formula potpune vjerojatnosti

Zamislimo da imamo neke događaje koji se svi međusobno isključuju, odnosno da se nikoja dva ne mogu dogoditi istovremeno. Nazovimo te događaje $H_1, H_2, ..., H_n$. Isto tako, neka se prostor elementarnih događaja Ω može u potpunosti sastaviti od tih događaja tako da ništa ne fali. Drugim riječima, ti događaji u uniji daju cijeli Ω, tj. prostor elementarnih događaja Ω se može podijeliti na naše događaje $H_1, H_2, ..., H_n$.

Tada za bilo koji događaj A vrijedi formula potpune vjerojatnosti.

$$p(A) = p\left(H_1\right) p\left(A \mid H_1\right) + p\left(H_2\right) p\left(A \mid H_2\right) + \ldots + p\left(H_n\right) p\left(A \mid H_n\right)$$

bake dijele slatkiše s određenim vjerojatnostima

	Baka Nevenka	Baka Milka
		
čokolada	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{4}$
bomboni	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$

Vjerojatnost da dobijemo čokoladu ako dobivamo slatkiše od baka s jednakom vjerojatnošću?

$\frac{1}{2}$

$$P(\text{čokolada}) = P(\text{Nevenka}) \cdot P(\text{čokolada} \mid \text{Nevenka}) + P(\text{Milka}) \cdot P(\text{čokolada} \mid \text{Milka})$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{13}{24}$$

Sada možemo doći do i Bayesove formule. Imamo dvije vrste, kraću i dužu. One su skroz iste, samo je u dužoj $P(A)$ zamijenjen s formulom potpune vjerojatnosti koju smo vidjeli gore.

$$P(B \mid A)=\frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$

$$p\left(H_i \mid A\right)=\frac{p(H_i)p(A|H_i)}{p(H_1)p(A|H_1)+p(H_2)p(A|H_2)+..+p(H_n)p(A|H_n)}$$