

eingereicht/handed in: 22.06.2020  
angenommen/accepted: 02.10.2020

**Prof. Dr.-Ing. Christian Hopmann, Fabian Becker, M.Sc.**  
**Institut für Kunststoffverarbeitung in Industrie und Handwerk an der RWTH Aachen,**  
**RWTH Aachen University**

## **Berechnung der Steifigkeit von FVK mit Lufteinschlüssen unter Berücksichtigung ihrer Geometrie**

*Lufteinschlüsse in faserverstärkten Kunststoffen (FVK) gehören zu den gängigsten Imperfektionen, die sowohl die resultierende Steifigkeit als auch die Festigkeit beeinflussen können. Für die Berechnung der Steifigkeit einer perfekten UD-Schicht können semi-empirische Mischungsregeln genutzt werden, welche gute Übereinstimmung zu experimentellen Daten zeigen. Da Lufteinschlüsse in der Regel gegenüber den Grundwerkstoffen einen niedrigen Anteil aufweisen, kann das Mori-Tanaka Schema in einem weiteren Schritt zur Homogenisierung von perfekter Phase und Lufteinschluss verwendet werden. Durch die Einführung einer Geometriefunktion im Mori-Tanaka Schema kann der Einfluss der Lufteinschlussform die Steifigkeit untersucht werden.*

## **Calculation of stiffness for FRP with air inclusions with respect to their geometry**

*Air inclusions in fiber reinforced plastics (FRP) are among the most common imperfections that can affect both the resulting stiffness and strength. For the calculation of the stiffness of a perfect UD layer, semi-empirical mixing rules can be used which show good agreement with experimental data. Since the content of air inclusions is generally low compared to the constituents of an FRP, the Mori-Tanaka scheme can be exploited in a following step to homogenise the perfect phase and air inclusions. By introducing a geometry function into Mori-Tanaka scheme, influence of air inclusions' appearance can be investigated.*

# Berechnung der Steifigkeit von FVK mit Lufteinschlüssen unter Berücksichtigung ihrer Geometrie

Ch. Hopmann, F. Becker

## 1 EINLEITUNG

Lufteinschlüsse in endlosfaserverstärkten Kunststoffen sind häufige Fehlstellen und beeinflussen die resultierende Steifigkeit und Festigkeit des Materials. In den vergangenen Jahrzehnten haben zahlreiche Forscher den Einfluss von Lufteinschlüssen auf die resultierenden Eigenschaften eines Verbundwerkstoffs untersucht. Frühe experimentelle Untersuchungen von *Lenoe* konzentrierten sich auf die Auswirkungen von Lufteinschlüssen auf die mechanischen Eigenschaften für unidirektionale und quasi-isotrope Lamine für Kohlefaser-Epoxid-Verbundwerkstoffe [1]. Die Lufteinschlussgehalte wurden zwischen 1 % und 5 % geschätzt. Es wurden Längs-, Quersug- und Scherversuche durchgeführt. Eine Korrelationsfunktion für Luftvolumenanteil und die daraus resultierenden Eigenschaften ist jedoch nicht angegeben.

Experimentelle Untersuchungen zum Einfluss von Lufteinschlüssen auf das Biegeverhalten für unidirektionales glasfaserverstärktes Polypropylen führten *Hagstrand et al.* durch [2]. Sie fanden eine lineare Beziehung zwischen dem Luftvolumenanteil und der Abnahme des effektiven Moduls in Faserrichtung. (1,5 % Verlust an Biegesteifigkeit bei 1 % höherem Luftvolumengehalt).

*Varna et al.* untersuchten ein unidirektionales Glasfaser-Vinylester-Prepreg-Material, das Lufteinschlüsse enthält [3]. Der resultierende Faservolumengehalt betrug 66 %, wobei der Luftvolumenanteil von 0 % bis 5 % reichte.

*Gürdal et al.* untersuchten quasi-isotrope Laminataufbauten und den Einfluss von Lufteinschlüssen auf die mechanischen Eigenschaften [4]. Sie setzten die Festigkeit mit dem Luftgehalt in Beziehung.

Weitere experimentelle Untersuchungen einschließlich der Berücksichtigung der Form eines Lufteinschlusses finden sich im Übersichtsartikel von *Mehdikani et al.* [5]. Die Lufteinschlüsse werden als Mikro-, Meso- und Makrolufteinschlüsse mit unterschiedlichen Formen charakterisiert. Die relevanten Meso- und Makroein-schlüsse sind häufig scheibenförmig, wobei die Hauptachse der Lufteinschlüsse in Faserrichtung ausgerichtet ist. Die Dimension in Faserrichtung ist deutlich grösser als in der Laminebene.

Die Berechnung der effektiven Eigenschaften von Verbundwerkstoffen kann auf das Eshelby Problem für eine Inhomogenität ellipsoider Form innerhalb einer Matrixphase zurückgeführt werden. Explizite Lösungen für die Berechnung des Spannungs- und Dehnungsfeldes in einer Inhomogenität leitete *Mura* für

allgemeine Fälle von Einschlüssen innerhalb einer isotropen Matrix her [6]. *Kushch et al.* entwickelten auf der Grundlage der Potentialtheorie eine asymptotisch exakte Lösung für gegenseitig wechselwirkende Einschlüsse zur Berechnung der effektiven Steifigkeiten [7].

*Ju und Chen* leiteten effektive Verbundeigenschaften auf der Grundlage einer nicht-wechselwirkenden Lösung der Eigenspannungen ab [8]. Andere dilute (d. h. wechselwirkungsfreie Einschlüsse) oder selbstkonsistente Homogenisierungsansätze, die auf der Eshelby-Lösung basieren, finden sich in der Literaturübersicht von *Tucker III. et al.* [9]. Dilute Lösungen beschreiben wechselwirkungsfreie Einschlüsse. Selbstkonsistente Homogenisierungsansätze berücksichtigen die Wechselwirkung unter der Annahme, dass ein einzelner Einschluss bereits in einem homogenisierten Material aus Einschlüssen und Matrixwerkstoff vorliegt. Damit hängt das Ergebnis der Homogenisierung im Ansatz von sich selbst ab [26].

*Benveniste et al.* wandten das Mori-Tanaka-Schema an, um die resultierenden Eigenschaften eines Verbundwerkstoffs zu berechnen [14]. Im Mori-Tanaka Schema wird die Wechselwirkung von Einschlüssen durch das Hinzufügen von Einschlüssen in eine bereits durch Einschlüsse verformte Matrix berücksichtigt.

*Huang et al.* wandten das Mori-Tanaka-Schema an, um die Ergebnisse der Finite-Elemente-Methode (FEM) mit experimentellen Daten von Verbundproben mit Lufteinschlüssen zu vergleichen [10]. Die experimentellen Daten sind aus [11] entnommen. Von *Bleier* durchgeführte Simulationen berichten über den Einfluss eines Lufteinschlusses unter 1 % Volumenanteil und Aspektverhältnissen zwischen 0,04 und 0,28 auf den fasersenkrechten Modul [12].

*Tandon und Weng* verwendeten ebenfalls das Mori-Tanaka-Schema zur Abschätzung der Ingenieurskonstanten mit ausgerichteten prolaten ellipsoiden Einschlüssen in Faserrichtung für verschiedene Aspektverhältnisse. Sie wenden ihre Lösung an, um die resultierenden Eigenschaften eines Verbundwerkstoffs zu berechnen, der aus Fasern in einer isotropen Matrix besteht [13]. Die resultierenden Eigenschaften sind die transversal-isotropen Eigenschaften eines Verbundwerkstoffs.

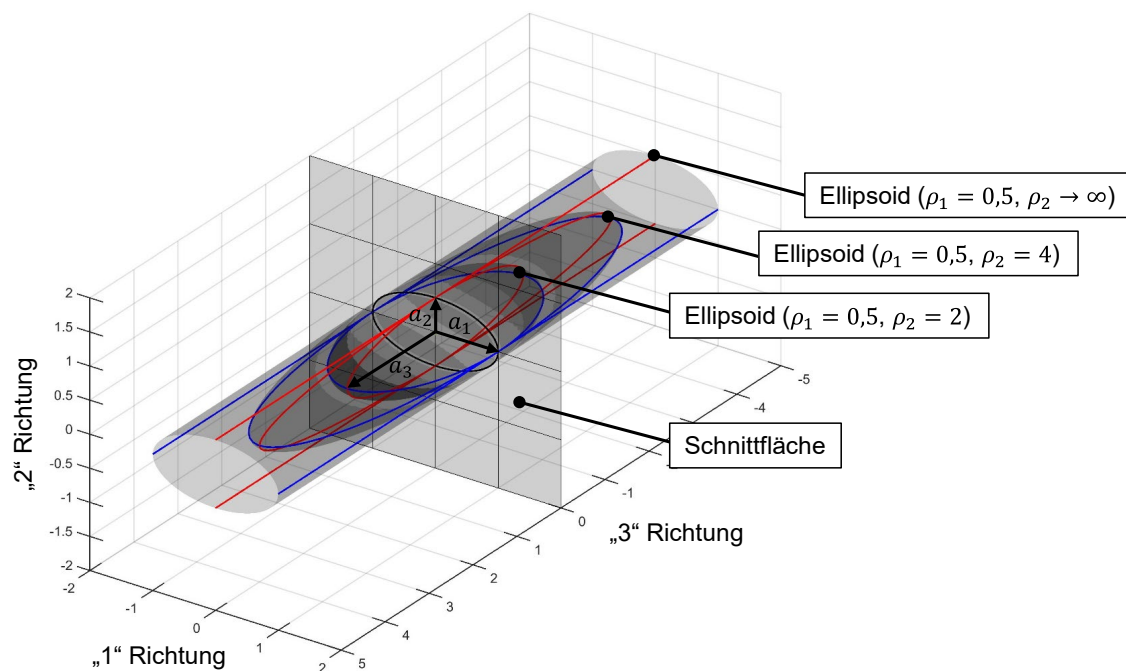
*Whiters* gab geschlossene Berechnungsformeln für den Eshelby-Tensor für eine transversal-isotrope Matrix und einen sphäroidischen Einschluss an [15].

*Chiang* schlug einen asymptotischen geschlossenen analytischen Ausdruck für den allgemeinen ellipsoiden Fall eines Einschlusses mit drei verschiedenen Halbachsen des Einschlusses vor [16]. Die geschlossene Form wurde in der gleichen Arbeit von *Chiang* für einen unendlichen Zylinder mit kreisförmiger Basis vorgestellt. Semi-empirische Beziehungen für die effektiven Moduln mit Lufteinschlüssen werden von *Dong* vorgestellt [17]. Die Lufteinschlüsse wurden als Zylinder mit kreisförmiger Basis innerhalb der FE-Methode modelliert.

## 2 MODELLIERUNGSANSATZ DER ZWEISTUFIGEN HOMOGENISIERUNG

Die Eigenschaften und Moduln faserverstärkter Kunststoffe lassen sich durch verschiedene Homogenisierungsansätze bestimmen. Da die analytische Beschreibung der Moduln durch selbst-konsistente, dilute Schemen oder das Mori-Tanaka Schema jedoch für hochgefüllte Kunststoffe die Wechselwirkungen der Fasern untereinander nicht oder unzureichend genau beschreiben, kommen semi-empirische Mischungsregeln zum Einsatz [18]. Damit lässt sich die Steifigkeit eines transversal-isotropen Verbundes bestimmen.

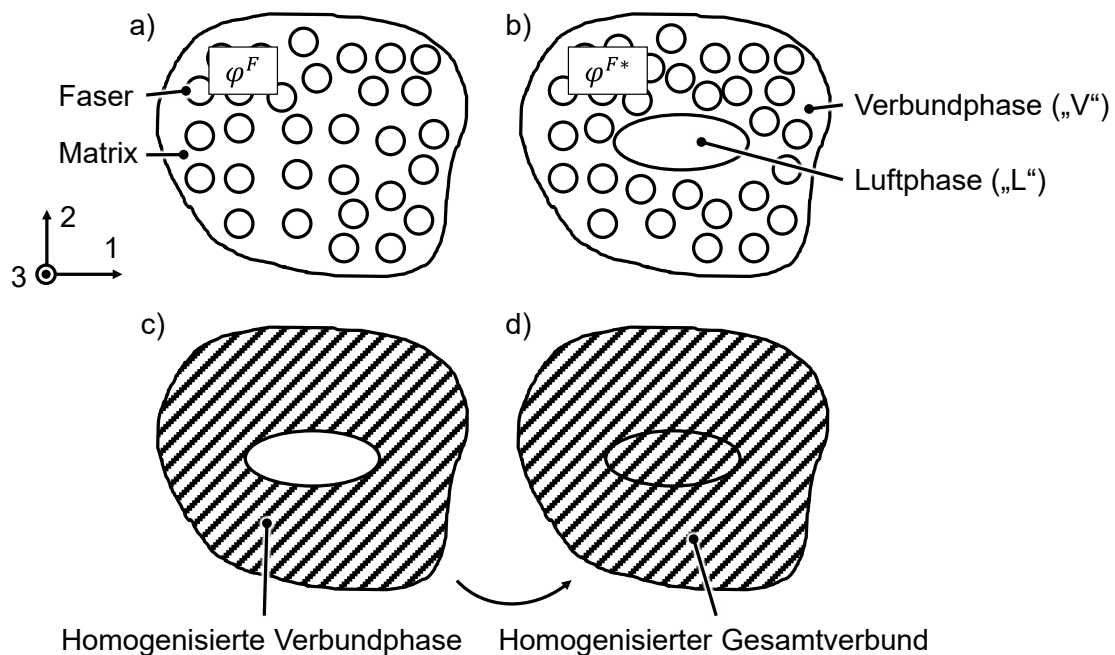
Da der Luftvolumenanteil gegenüber dem Faservolumengehalt in der Regel gering ist, eignet sich zur Zusammenführung der Verbundphase mit den Lufteinschlüssen das Mori-Tanaka Schema. Damit werden die Verbundphase und die Homogenisierung der Verbundphase mit der Lufteinschlussphase voneinander getrennt. Der hier betrachtete Verbund wird als unidirektional vorausgesetzt.



**Bild 1:** Vereinfachung des allgemeinen Ellipsoids zum Zylinder mit elliptischer Grundfläche

Ausgehend vom allgemeinen ellipsoiden Einschluss mit den Halbachsen  $a_1$ ,  $a_2$  und  $a_3$  werden zunächst die Aspektverhältnisse  $\rho_1$  und  $\rho_2$  definiert.  $\rho_1$  ist durch das Verhältnis von  $a_2/a_1$  gegeben und  $\rho_2$  durch das Verhältnis von  $a_3/a_1$ . Durch die längliche Ausdehnung von Lufteinschlüssen wird das Aspektverhältnis  $\rho_2$  gesteigert, bis es den Grenzwert  $\rho_2 \rightarrow \infty$  erreicht, Bild 1. Damit werden

Lufteinschlüsse als Zylinder mit elliptischer Grundfläche idealisiert, die alleine durch das Aspektverhältnis  $\rho_1 = a_2/a_1$  charakterisiert wird. Zur einfacheren Darstellung der folgenden Gleichungen wird das Aspektverhältnis daher ausschließlich auf das Verhältnis von  $a_2/a_1$  bezogen und auf den Index 1 verzichtet. Der Ablauf der Homogenisierung kann auf der Schnittfläche aus Bild 1 dargestellt werden. Im Verbund sind die Fasern in „3“ Richtung orientiert. Im ersten Homogenisierungsschritt wird die Verbundphase durch Mischungsregeln homogenisiert, Bild 2, b und c. Im zweiten Schritt werden die zylindrischen Lufteinschlüsse mit elliptischer Grundfläche durch das Mori-Tanaka Schema mit der Verbundphase homogenisiert, Bild 2, d.



**Bild 2:** Ablauf der Homogenisierung

a) Verbundphase ohne Lufteinschluss, b) Verbundphase und Lufteinschluss, c) Erster Homogenisierungsschritt der Verbundphase, d) Zweiter Homogenisierungsschritt der Verbund- mit der Luftphase

## 2.1 Erster Homogenisierungsschritt

Besonderes Augenmerk muss im ersten Schritt auf den Faservolumengehalt der Verbundphase gelegt werden. Da durch den Lufteinschluss die Fasern lokal verdrängt werden können, muss für die Verbundphase ein effektiver Faservolumengehalt gewählt werden, um den Gesamtvolumengehalt des Verbundes beizubehalten, Bild 2, b. Diese Annahme ist zutreffend, wenn der Verbund in einem Herstellungsprozess unter Formzwang mit bekanntem Fasermassenanteil hergestellt wird, welches beispielsweise auf Injektionsverfahren zutrifft. Falls der Verbund in einem Herstellungsverfahren ohne Kontrolle der Dicke produziert wird, addiert sich das Volumen der

Lufteinschlüsse zum Gesamtlaminatvolumen hinzu, sodass der Faservolumengehalt der Verbundphase unverändert bleibt:

$$\varphi^{F*} = \frac{\varphi^F}{1 - \varphi^L} \quad \text{z. B. RTM} \quad (\text{Gl. 1})$$

$$\varphi^{F*} = \varphi^F \quad \text{z. B. Wickeln} \quad (\text{Gl. 2})$$

Mit  $\varphi^F$  als dem zuvor eingestellten Gesamtfaservolumengehalt,  $\varphi^L$  dem Luftanteil und  $\varphi^{F*}$  dem effektiven Faservolumenanteil der Verbundphase. (Gl. 1) und (Gl. 2) stellen Extremfälle dar. Je nach Prozess wird erwartet, dass sich auch Faservolumengehalte in der Verbundphase einstellen können, die zwischen den Grenzen liegen. Beispielsweise könnte bei Autoklavverarbeitung mit Vakuumaufbau durch unterschiedliche Druckprofile ein solches Verhalten eintreten. Mithilfe des effektiven Faservolumenanteils lässt sich der erste Homogenisierungsschritt durchführen, Bild 2, c.

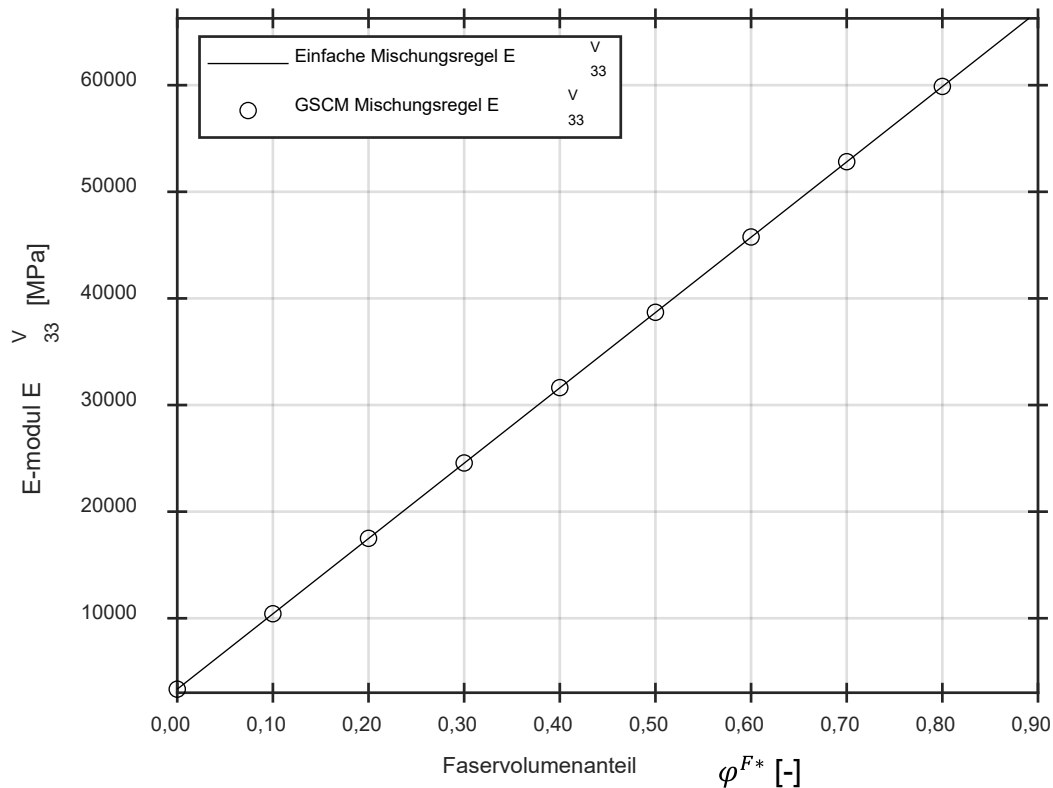
Zur Berechnung der 5 unabhängigen Ingenieurskonstanten der Verbundphase steht eine Vielzahl an Gleichungen zur Verfügung. Für diesen Beitrag werden für den ersten Homogenisierungsschritt unterschiedliche Ansätze in Abhängigkeit des Faservolumenanteils untersucht. Zur Darstellung der Mischungsregeln wird ein Glasfaserepoxydharzmodell angenommen ( $E^F = 74 \text{ GPa}$ ,  $\nu^F = 0,2$ ,  $E^M = 3,35 \text{ GPa}$ ,  $\nu^M = 0,35$ ). Beide Verbundpartner sind hierbei isotrop. Im Folgenden stehen die hochgestellten Indizes „F“ für Fasereigenschaften und „M“ für Matriceigenschaften. Resultierende Verbundeigenschaften werden mit hochgestelltem „V“ gekennzeichnet.

### E-Modul in Faserrichtung

Der am häufigsten verwendete Ansatz zur Bestimmung der Eigenschaften in Faserrichtung ist die einfache Mischungsregel, die der *Voigt* Grenze entspricht:

$$E_{33}^V = E_{33}^F \cdot \varphi^{F*} + E^M \cdot (1 - \varphi^{F*}) \quad (\text{Gl. 3})$$

Als weiterer Ansatz steht die generalisierte selbst-konsistente Methode (GSCM) nach *Christensen* [18] zur Verfügung, die vernachlässigbare Unterschiede zur *Voigt* Grenze aufzeigt, Bild 3. Weitere Autoren geben ebenfalls die einfache Mischungsregel zur Berechnung des faserverparallelen Moduls an [12].



**Bild 3:** Vergleich der einfachen Mischungsregel mit der GSCM für den faserparallelen E-Modul

### Fasersenkrechter E-Modul

Für den fasersenkrechten Modul untersuchten *Bleier* und *Christensen* die Güte von Mischungsregeln [12,18]. Eine weitere semi-empirische Mischungsregel ist durch *Puck* gegeben [19]. Ein Nachteil der Lösung nach *Bleier* ist das Auftreten einer Polstelle für:

$$\varphi^{F*} = \frac{\pi}{4 \cdot \left(1 - \frac{E^M}{E_{11}^F}\right)^2} \quad (\text{Gl. 4})$$

Somit beschreibt die Lösung nach *Bleier* den fasersenkrechten Modul nur eingeschränkt. Im Bereich der Gültigkeit der *Bleier* Regel (angegeben mit  $\varphi^{F*} = 0.3 \dots 0.6$ ) liefert die Abschätzung steifere Werte als alle Vergleichslösungen. Die semi-empirische Mischungsregel nach *Puck* als auch die Mischungsregel nach *Bleier* liefern im Bereich bis zum Faservolumengehalt von 60% ähnliche Ergebnisse. Beide Mischungsregeln verletzen jedoch die obere *Hashin-Shtrikman* Grenze, welche die physikalische Grenze für den Modul des Verbundes darstellt [20,21]. Während dies im Falle der *Puck* Lösung erst in der Nähe der dichtesten Packung geschieht, ist das Verhalten der *Bleier* Lösung bereits bei geringeren Faservolumengehalten nicht mehr physikalisch

nachvollziehbar. Da *Bleier* die Mischungsregel für den Bereich bis 60% Faservolumengehalt durch einen Funktionsfit ermittelt, ist dieses Verhalten jedoch zu erwarten. Die Berechnungsformel nach *Chamis* [22] liefert bis 100% Faservolumengehalt ähnliche Ergebnisse wie die GSCM, ohne dabei die obere *Hashin-Shtrikman* Grenze zu verletzen, Bild 4.

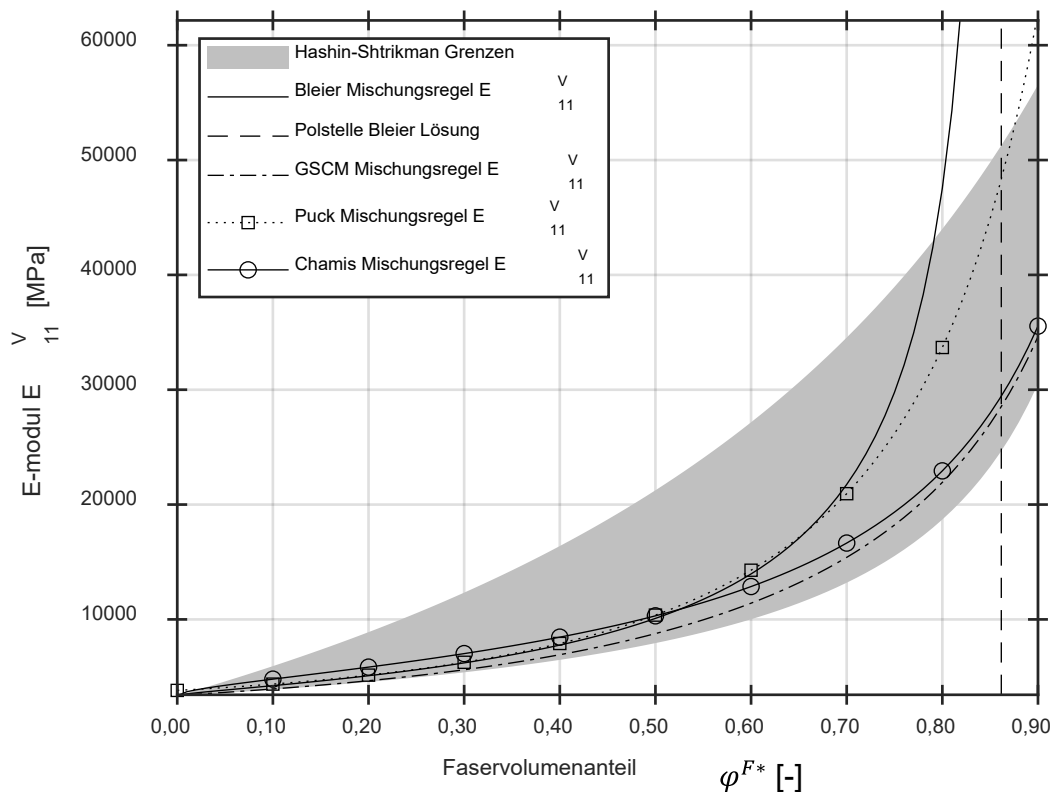


Bild 4: Darstellung der Mischungsregeln für den fasersenkrechten E-Modul

### Schubmodul in der Schichtebene

Für den Schubmodul in der Laminatenebene werden die Berechnungen nach *Bleier*, *Förster*, *Chamis* und der GSCM verglichen [12]. Die Mischungsregel nach *Bleier* weist erneut eine Polstelle auf, welche aus (Gl. 4) durch Ersetzen der E-Moduln durch die entsprechenden Schubmoduln erhalten wird. Die GSCM entspricht der unteren *Hashin-Shtrikman* Grenze. Die *Chamis* Lösung liefert erneut Lösungen in der Nähe der GSCM. Die Mischungsregel nach *Förster* verletzt die obere *Hashin-Shtrikman* Grenze im Bereich bis zur dichtesten Faserpackung nicht und kann daher physikalisch plausible Ergebnisse liefern, Bild 5.



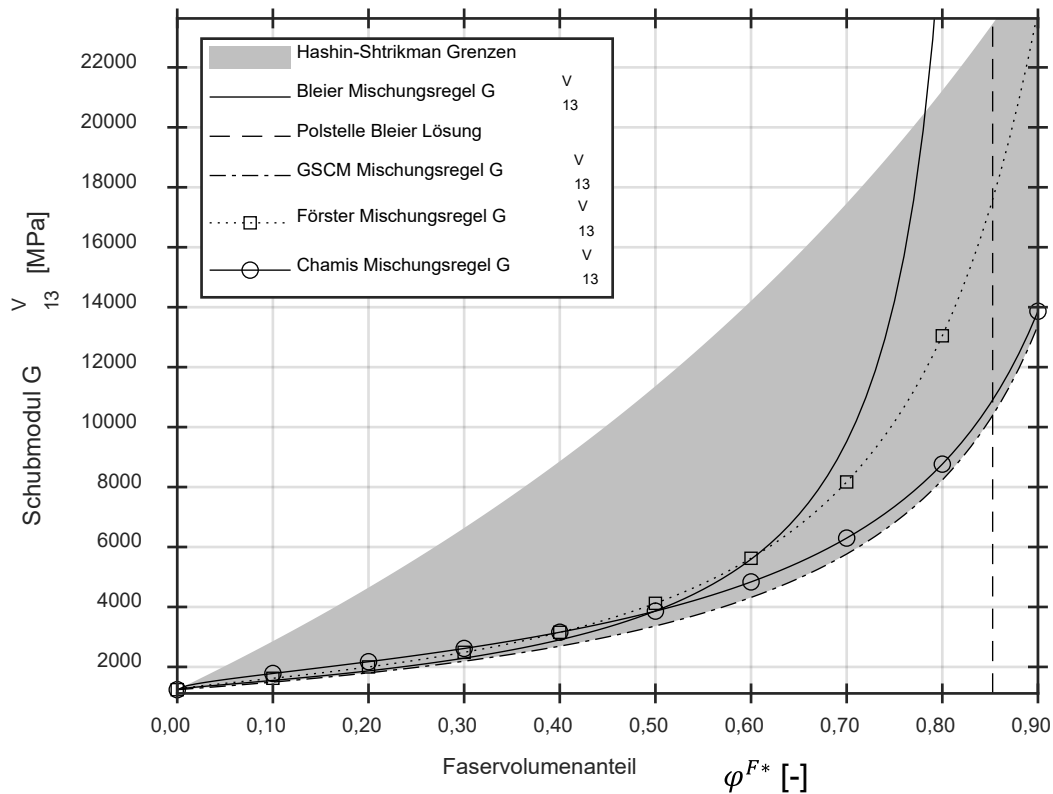


Bild 5: Darstellung der Mischungsregeln für den Schubmodul in Schichtebene

### Große und kleine Poisson Zahl

Die große Poisson-Zahl bei Zug in Faserrichtung und Kontraktion senkrecht zur Faserrichtung wird meist durch die einfache Mischungsregel bestimmt. Lediglich die GSCM errechnet geringfügig niedrigere Werte bei mittleren Faser volumengehalten, Bild 6.

Die kleine Querkontraktionszahl ergibt sich durch die Symmetrie des Steifigkeitstensors zu:

$$\nu_{13}^V = \frac{E_{11}^V}{E_{33}^V} \cdot \nu_{31}^V \quad (\text{Gl. 5})$$

Auf eine grafische Darstellung wird an dieser Stelle verzichtet.

### Schubmodul und Poisson Zahl in der transversal isotropen Ebene

Die Poisson-Zahl und der Schubmodul in der transversal isotropen Ebene sind bei Kenntnis des fasersenkrechten E-Moduls abhängige Größen:

$$G_{12}^V = \frac{E_{11}^V}{2(1 + \nu_{12}^V)} \quad (\text{Gl. 6})$$

Daher findet der Vergleich der Mischungsregeln hier auf Basis des Schubmoduls  $G_{12}^V$  statt, unabhängig von der in der jeweiligen Originalquelle angegebenen Reihenfolge der Berechnung. Für den Schubmodul stehen ebenfalls die *Hashin-Shtrikman* Grenzen für einen transversal-isotropen Verbund zur Verfügung (Bild 7).

Die Untersuchungen der Mischungsregeln werden hier nicht mit experimentellen Untersuchungen abgeglichen, sondern auf die zitierten Quellen verwiesen. Für alle dargestellten Mischungsregeln finden die jeweiligen Autoren eine gute Übereinstimmung zu ihren experimentellen Daten im Bereich bis 60 % Faservolumenanteil.

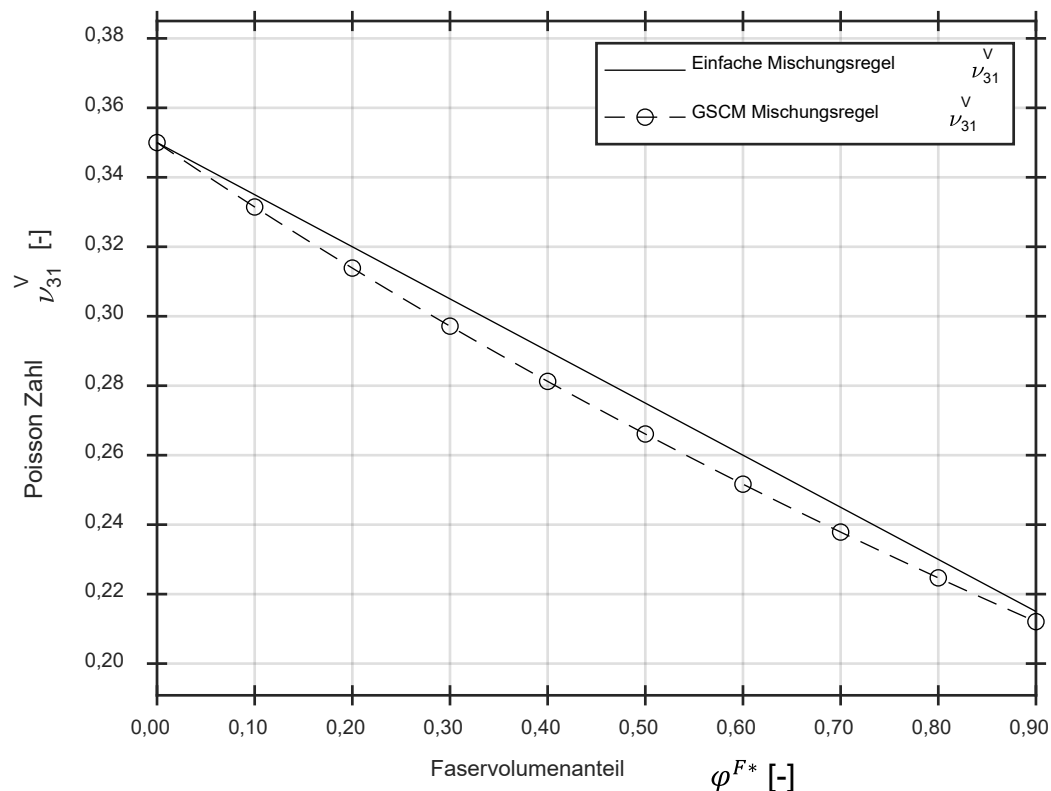


Bild 6: Darstellung der Mischungsregeln für die große Poisson Zahl

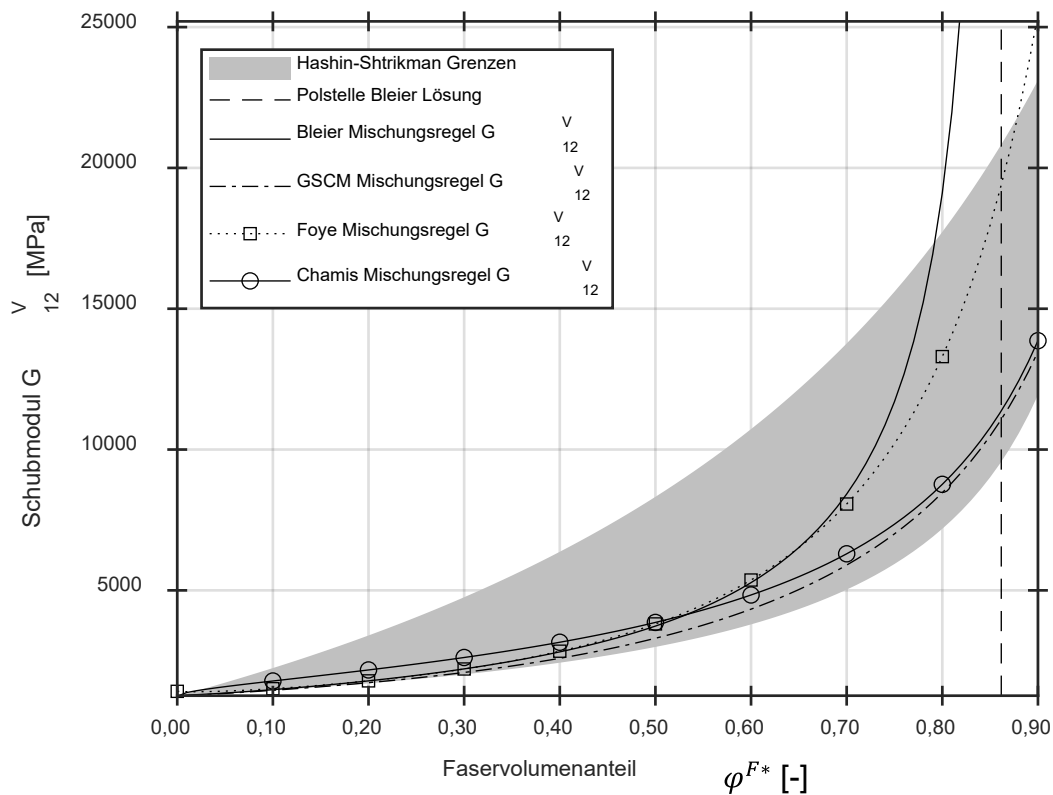


Bild 7: Darstellung der Mischungsregeln für den Schubmodul in der transversal isotropen Ebene

Da der effektive Faservolumengehalt (Gl. 1) der Verbundphase durch Luftporen steigen kann, werden semi-empirische Mischungsregeln, welche die obere *Hashin-Shtrikman* Grenze verletzen, jedoch ausgeschlossen. Daher wird für die folgende Beispielrechnung der Satz an Mischungsregeln nach *Chamis* genutzt [22].

Prinzipiell ist für den ersten Homogenisierungsschritt auch jeder andere Ansatz zur Bestimmung der Ingenieurskonstanten möglich. Das zweistufige Homogenisierungsschema mit Verwendung der Mischungsregeln nach *Bleier* [12] im ersten Schritt wurde in [23] im Bereich der Gültigkeit der Mischungsregel dargestellt.

Mithilfe der Gleichungen ist jetzt die Bestimmung des Nachgiebigkeitstensors 4. Stufe der Verbundphase möglich, der nach Kelvin-Mandel Notation in eine 6x6 Matrix für den allgemeinen dreidimensionalen Fall entfaltet wird. Die Mandel Notation bietet gegenüber der gebräuchlicheren Voigt Notation Vorteile und unterscheidet sich durch den Faktor 2 in den Einträgen im 4. Quadranten der Matrix des Steifigkeitstensors [24]. Die Nachgiebigkeitsmatrix ergibt sich unter Ausnutzung der transversal-isotropen Eigenschaften der Verbundphase wie folgt, mit der „3“-Richtung als Faserorientierung und Normale zur transversal-isotropen Ebene.

$$C^{V^{-1}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{11}^V} & -\frac{\nu_{12}^V}{E_{11}^V} & -\frac{\nu_{13}^V}{E_{11}^V} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}^V}{E_{11}^V} & \frac{1}{E_{11}^V} & -\frac{\nu_{13}^V}{E_{11}^V} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}^V}{E_{11}^V} & -\frac{\nu_{13}^V}{E_{11}^V} & \frac{1}{E_{33}^V} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{13}^V} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{13}^V} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{12}^V} \end{bmatrix} \quad (\text{Gl. 7})$$

Die Steifigkeitsmatrix kann als Inverse der Nachgiebigkeitsmatrix aufgelöst werden, sodass:

$$C^V = \begin{bmatrix} C_{11}^V & C_{12}^V & C_{13}^V & 0 & 0 & 0 \\ C_{12}^V & C_{11}^V & C_{23}^V & 0 & 0 & 0 \\ C_{13}^V & C_{23}^V & C_{33}^V & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44}^V & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44}^V & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}^V \end{bmatrix} \quad (\text{Gl. 8})$$

Damit steht das Ergebnis des ersten Homogenisierungsschrittes fest. Bereits durch die Betrachtung der beiden Grenzfälle von (Gl. 1) und (Gl. 2) ist für geringe Luftvolumenanteile eine erhebliche Streuung in den effektiven Eigenschaften zu erwarten, falls der Herstellungsprozess nicht unter Formzwang stattfindet.

## 2.2 Zweiter Homogenisierungsschritt

Im zweiten Homogenisierungsschritt wird die Mori-Tanaka Gleichung zur Homogenisierung der Verbundphase und der Lufteinschlüsse verwendet, Bild 2, d. Dabei werden für Lufteinschlüsse Ingenieurskonstanten von null angenommen. Als Tensorarstellung ergibt sich unter der Berücksichtigung verschiedener geometrischer Ausprägungen der Lufteinschlüsse die Mori-Tanaka Gleichung [26]:

$$C^* = (1 - \varphi^L) C^V : \left( (1 - \varphi^L) \cdot I + \sum_i \varphi_i^L (I - S_i) \right)^{-1} \quad (\text{Gl. 9})$$

Mit  $C^*$  als Steifigkeitstensor 4. Stufe für den Gesamtverbund inklusive Lufteinschlüssen,  $C^V$  dem transversal-isotropen Steifigkeitstensor 4. Stufe aus dem ersten Homogenisierungsschritt,  $\varphi^L$  dem Gesamtvolumenanteil aller

Lufteinschlüsse,  $I$  dem symmetrischen Einheitstensor 4. Stufe und  $\varphi_i^L$  dem Luft-einschlussgehalt einer Gruppe von Lufteinschlüssen mit ähnlicher Geometrie. Ähnliche Geometrie bezeichnet hier Lufteinschlüsse mit gleichem Aspekt-verhältnis  $\rho$ . Das innere Tensorprodukt bezeichnet die doppelte Kontraktion über die letzten Indizes des ersten und die ersten Indizes des zweiten Tensors, sodass gilt (Einsteinsche Summenkonvention):  $(A:B)_{ijkl} = A_{ijpq}B_{pqkl}$  [2].

Die Matrix-Phase in der Mori-Tanaka Gleichung entspricht damit der bereits homogenisierten und transversal-isotropen Verbundphase aus dem ersten Schritt.

Die Eshelby Tensoren  $S_i$  werden entsprechend für diesen Fall benötigt. Eine allgemeine Lösung für Ellipsoiden in einer transversal-isotropen Matrix haben *Chiang et al.* hergeleitet [16]. Aufgrund der länglichen Ausdehnung der Lufteinschlüsse in Faserrichtung werden die von *Chiang et al.* angegebenen Gleichungen für einen Zylinder mit elliptischer Grundfläche vereinfacht [23]. Die Einträge des Eshelby Tensors in Abhängigkeit des Apektverhältnisses  $\rho$  sind im Anhang angegeben. Die Eshelby Tensoren  $S_i$  lassen sich in Kelvin-Mandel Notation entfalten, sodass folgende Matrixdarstellung möglich wird:

$$S_i = \begin{bmatrix} S_{1111} & S_{1122} & S_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ S_{2211} & S_{2222} & S_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2S_{2323} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2S_{3131} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2S_{1212} \end{bmatrix}_i \quad (\text{Gl. 10})$$

Die Entfaltung der Mori-Tanaka Gleichung liefert:

$$C^* = (1 - \varphi^L) C^V \cdot \left( (1 - \varphi^L) \cdot E + \sum_i \varphi_i^L (E - S_i)^{-1} \right)^{-1} \quad (\text{Gl. 11})$$

Mit  $E$  als 6x6 Einheitsmatrix. Die Rechenoperationen reduzieren sich damit auf Matrixmultiplikation und Matrixinversion, anstelle von Tensoroperationen 4. Stufe.

Die Inverse von (Gl. 11) liefert schließlich die einfacher darzustellende Gleichung (mithilfe der Beziehung  $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ ):

$$Q^* = (C^*)^{-1} = \frac{1}{1 - \varphi^L} \cdot \left[ (1 - \varphi^L) \cdot E + \sum_i \varphi_i^L (E - S_i)^{-1} \right] \cdot (C^V)^{-1} \quad (\text{Gl. 12})$$

Mit  $Q^*$  als Nachgiebigkeitsmatrix. Woraus sowohl die effektiven E-moduln als auch die effektiven Poisson Zahlen bestimmt werden können:

$$E_{ii}^* = \frac{1}{Q_{ii}^*} \quad \text{Für } i = 1,2,3 \quad (\text{Gl. 13})$$

$$2G_{23}^* = \frac{1}{Q_{44}^*} \quad (\text{Gl. 14})$$

$$2G_{13}^* = \frac{1}{Q_{55}^*} \quad (\text{Gl. 15})$$

$$2G_{12}^* = \frac{1}{Q_{66}^*} \quad (\text{Gl. 16})$$

$$v_{ij}^* = -\frac{Q_{ij}^*}{Q_{ii}^*} \quad \begin{array}{l} \text{Für } i, j = 1, 2, 3 \\ \text{und } i \neq j \end{array} \quad (\text{Gl. 17})$$

(Gl. 12) kann für ein konstantes Aspektverhältnis der Lufteinschlüsse und damit einer einzelnen Gruppe der Lufteinschlüsse explizit aufgelöst werden [23]. Die Gleichungen sind im Anhang angegeben.

### 2.2.1 Erweiterung des Modells auf unterschiedliche Geometrien von Lufteinschlüssen

Zur Bestimmung unterschiedlicher Lufteinschlussklassen wird die Annahme getroffen, dass jeder Luftvolumengehalt ein charakteristisches Aspektverhältnis aufweist und damit  $\rho$  eine Funktion von  $\varphi^L$  ist:

$$\rho = f(\varphi^L) \quad (\text{Gl. 18})$$

Des Weiteren wird davon ausgegangen, dass ein steigender Luftvolumenanteil zu einer Änderung des Aspektverhältnisses der neu hinzukommenden Lufteinschlüsse führt. Die Lufteinschlüsse, welche für einen geringeren Anteil sorgen würden, bleiben in ihrer Geometrie unverändert. Diese Annahme ist zweckmäßig und erscheint anhand der mikroskopischen Aufnahmen nach *Lukaszewicz et al.* ebenfalls als plausibel [27].

Da das Aspektverhältnis ebenfalls in die Berechnung des Eshelby Tensors eingeht, kann auch dieser in Abhängigkeit des Luftvolumenanteils dargestellt werden:

$$S = f(\varphi^L) \quad (\text{Gl. 19})$$

Mithilfe der getroffenen Annahmen lässt sich anstelle der Einteilung der Lufteinschlüsse in verschiedene Klassen eine Integration über die entsprechende Funktion aus (Gl. 12) durchführen:

$$\Sigma_i \varphi_i^L (E - S_i)^{-1} \rightarrow \int_0^{\varphi^{v,0}} (E - S(\varphi^L))^{-1} d\varphi^L \quad (\text{Gl. 20})$$

Da in der Mandel Darstellung der Term aus (Gl. 20) eine 6x6 Matrix darstellt, in der insgesamt 10 Terme ungleich null enthalten sind, lässt sich eine elementweise numerische Integration durchführen. Durch Einsetzen des

Ergebnisses in (Gl. 12) werden alle effektiven Steifigkeiten und Poisson Zahlen des orthotropen Materials erhalten. Wird die Funktion  $\rho(\varphi^L)$  als Konstante angesetzt, ergeben sich wieder die expliziten Lösungen für die Ingenieurskonstanten (Anhang).

Die Grenzen der Erwartungswerte der effektiven Moduln werden durch Nutzen des Faservolumengehaltes nach (Gl. 1) und (Gl. 2) erhalten. Damit ergeben sich folgende Grenzen der Moduln: (Gestrichene Größen kennzeichnen den Erwartungswert des effektiven Moduls):

$$E_{11}^*(\varphi^F, \rho(\varphi^L)) \leq \overline{E_{11}^*} \leq E_{11}^* \left( \frac{\varphi^F}{1 - \varphi^L}, \rho(\varphi^L) \right) \quad (\text{Gl. 21})$$

$$E_{22}^*(\varphi^F, \rho(\varphi^L)) \leq \overline{E_{22}^*} \leq E_{22}^* \left( \frac{\varphi^F}{1 - \varphi^L}, \rho(\varphi^L) \right) \quad (\text{Gl. 22})$$

Der faserparallele E-Modul ist alleine eine Funktion des Luftvolumenanteils, da der Eintrag des Eshelby Tensors keine Abhängigkeit vom Aspektverhältnis aufweist:

$$E_{33}^*(\varphi^F) \leq \overline{E_{33}^*} \leq E_{33}^* \left( \frac{\varphi^F}{1 - \varphi^L} \right) \quad (\text{Gl. 23})$$

Für die Schubmoduln können analog folgende Grenzen festgelegt werden:

$$G_{13}^*(\varphi^F, \rho(\varphi^L)) \leq \overline{G_{13}^*} \leq G_{13}^* \left( \frac{\varphi^F}{1 - \varphi^L}, \rho(\varphi^L) \right) \quad (\text{Gl. 24})$$

$$G_{23}^*(\varphi^F, \rho(\varphi^L)) \leq \overline{G_{23}^*} \leq G_{23}^* \left( \frac{\varphi^F}{1 - \varphi^L}, \rho(\varphi^L) \right) \quad (\text{Gl. 25})$$

$$G_{12}^*(\varphi^F, \rho(\varphi^L)) \leq \overline{G_{12}^*} \leq G_{12}^* \left( \frac{\varphi^F}{1 - \varphi^L}, \rho(\varphi^L) \right) \quad (\text{Gl. 26})$$

Für die Poisson-Zahlen gelten folgende Grenzen:

$$\nu_{13}^*(\varphi^F, \rho(\varphi^L)) \leq \overline{\nu_{13}^*} \leq \nu_{13}^* \left( \frac{\varphi^F}{1 - \varphi^L}, \rho(\varphi^L) \right) \quad (\text{Gl. 27})$$

$$\nu_{31}^* \left( \frac{\varphi^F}{1 - \varphi^L}, \rho(\varphi^L) \right) \leq \overline{\nu_{31}^*} \leq \nu_{31}^*(\varphi^F, \rho(\varphi^L)) \quad (\text{Gl. 28})$$

$$v_{12}^* \left( \frac{\varphi^F}{1 - \varphi^L}, \rho(\varphi^L) \right) \leq \overline{v_{12}^*} \leq v_{12}^*(\varphi^F, \rho(\varphi^L)) \quad (\text{Gl. 29})$$

$$v_{23}^*(\varphi^F, \rho(\varphi^L)) \leq \overline{v_{23}^*} \leq v_{23}^* \left( \frac{\varphi^F}{1 - \varphi^L}, \rho(\varphi^L) \right) \quad (\text{Gl. 30})$$

$$v_{32}^* \left( \frac{\varphi^F}{1 - \varphi^L}, \rho(\varphi^L) \right) \leq \overline{v_{32}^*} \leq v_{32}^*(\varphi^F, \rho(\varphi^L)) \quad (\text{Gl. 31})$$

$$v_{21}^* \left( \frac{\varphi^F}{1 - \varphi^L}, \rho(\varphi^L) \right) \leq \overline{v_{21}^*} \leq v_{21}^*(\varphi^F, \rho(\varphi^L)) \quad (\text{Gl. 32})$$

### 3 BESTIMMUNG DER GEOMETRIEFUNKTION UND VERGLEICH DER BERECHNETEN MODULN MIT LITERATURWERTEN

In der Veröffentlichung von *Olivier et al.* finden sich neben mechanischen Untersuchungen ebenfalls Anmerkungen zur Form der Lufteinschlüsse. So lässt sich dem als „Composite A“ [11] bezeichnetem Werkstoff folgende Lufteinschlusscharakteristik zuordnen:

Luftvolumenanteil $\varphi_L$	Beschriebenes Aspektverhältnis $\rho$
0,3 % - 0,7 %	$\approx 1$
2,8 %	$\approx 30/100$
3,9 %	$\approx 10/30$
6,8 %	$\approx 30/100$

Tabelle 1: Eingangsdaten zum Ansatz der Funktion  $\rho(\varphi_L)$

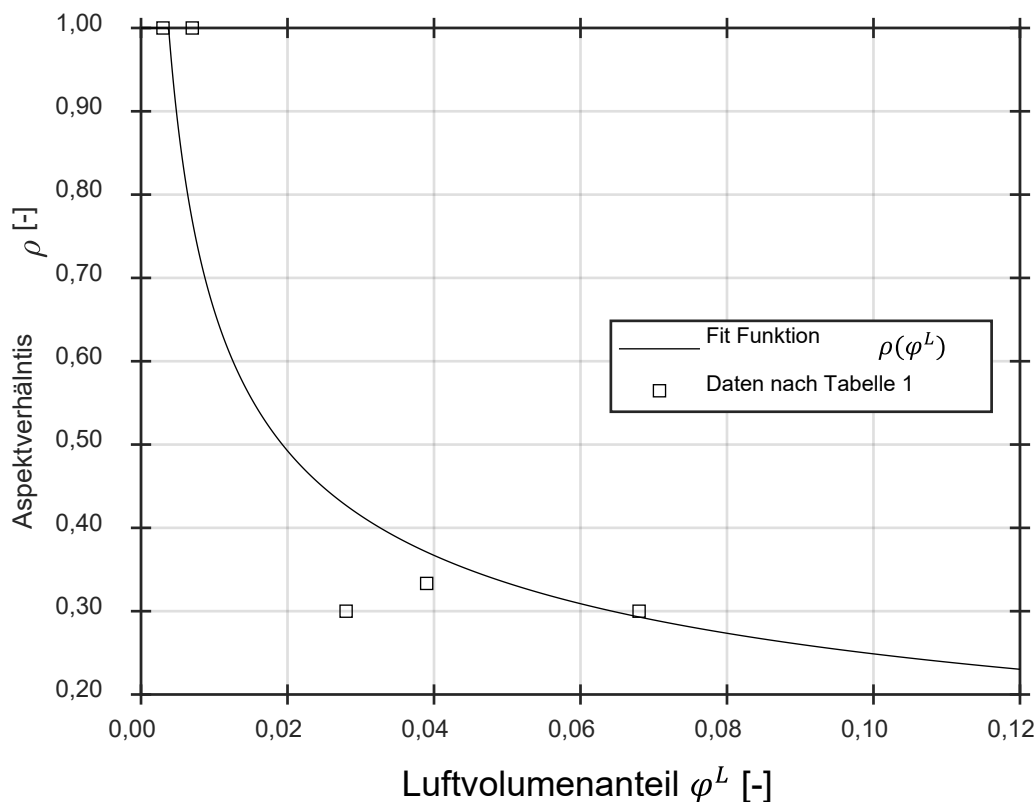
Als Fitfunktion wird eine zweckmäßige Potenzfunktion verwendet, da das Aspektverhältnis für zunehmenden Lufteinschlussgehalt dabei gegen null geht und somit ein degressiver Einfluss des Lufteinschlussgehaltes auf den Quer-E-Modul abgebildet werden kann [11]. Die Potenzfunktion wird für niedrige Lufteinschlussgehalte auf den Wert von „1“ begrenzt.



$$\rho(\varphi^L) = A \cdot (\varphi^L)^B \quad \text{Für } \rho(\varphi^L) < 1 \quad (\text{Gl. 33})$$

$$\rho(\varphi^L) = 1 \quad \text{Für } \rho(\varphi^L) > 1 \quad (\text{Gl. 34})$$

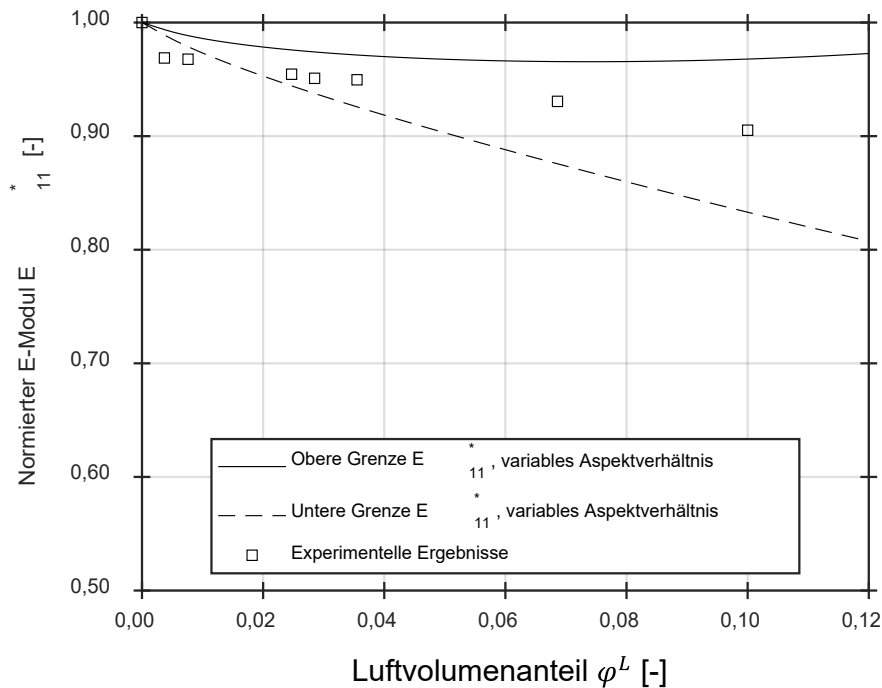
Die Daten werden mithilfe der Software Matlab, TheMathWorks, Natick, USA gefittet. Als Parameter ergeben sich  $A = 0,09367$  und  $B = -0,4242$ . Bild 8 stellt das Ergebnis des Fits dar.



**Bild 8:** Aspektverhältnis in Abhängigkeit des Lufteinschlussgehaltes

Mithilfe der bestimmten Funktion ist eine Berechnung der Grenzen der Moduln und Querkontraktionszahlen möglich. In der Originalquelle von *Olivier et al.* stehen dazu normierte Werte des E-Moduls quer und parallel zur Faserrichtung zur Verfügung [11]. Das Verfahren zur Herstellung der Probekörper mit unterschiedlichen Luftgehalten in der angegebenen Quelle basiert auf einer Druckvariation im Autoklavprozess. Daher sollten die gemessenen Quermoduln im Bereich der Grenzen für den effektiven Faservolumengehalt der Verbundphase liegen. In Bild 9 ist dazu das Berechnungsergebnis des zweistufigen Homogenisierungsansatzes in Abhängigkeit des Lufteinschlussgehaltes für den fasersenkrechten Modul dargestellt. Ab Luftvolumengehalten von 0,02 liegen die gemessenen Moduln innerhalb der dargestellten Grenzen. Für Lufteinschlussgehalte darunter liegen die resultierenden Moduln in der Nähe

der unteren Grenze. Angesichts der Unsicherheit in der Bestimmung der Geometriefunktion erscheint die Abweichung zur Berechnung der Quermoduln jedoch hinnehmbar.



**Bild 9:** Ergebnis des normierten E-Moduls in Querrichtung im Vergleich mit den experimentellen Werten nach [11]

Durch die Darstellung der Grenzen ist weiterhin anzunehmen, dass die Streuung der Moduln zunimmt, falls das Fertigungsverfahren keine Einstellung der Dicke des entstehenden FVK zulässt. Bild 10 zeigt die experimentellen Ergebnisse nach [11] für zunehmende Lufteinschlussgehalte für den faserparallelen Modul. Bereits in den experimentellen Ergebnissen zeigt sich eine erhebliche Streuung, allerdings ein geringer Einfluss des Lufteinschlussgehaltes auf die resultierenden Moduln. Bis auf die Werte des Lufteinschlussgehaltes im Bereich von 0,005 bis 0,02 befinden sich die resultierenden Moduln im Bereich der beiden definierten Grenzen.

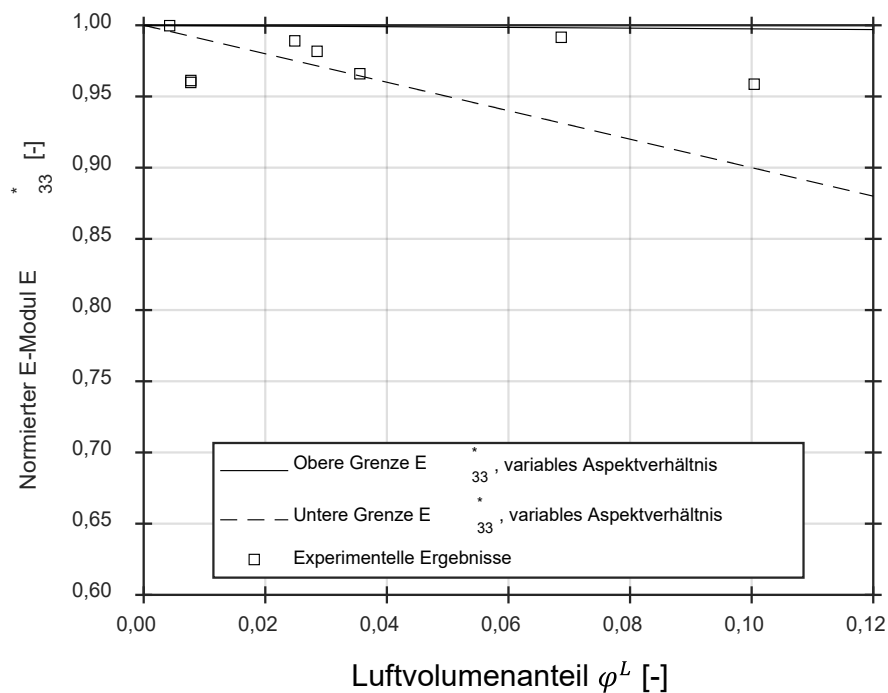


Bild 10: Ergebnis des normierten E-Moduls in Faserrichtung im Vergleich mit den experimentellen Werten nach [11]

#### 4 ZUSAMMENFASSUNG UND FAZIT

Durch einen zweistufigen Homogenisierungsansatz wurden semi-empirische Mischungsregeln und das Mori-Tanaka Schema verbunden. Im ersten Schritt wird dazu zunächst die transversal-isotrope Verbundphase homogenisiert. Durch die Einführung des effektiven Faservolumengehaltes in der Verbundphase wurden mögliche Grenzwerte der Moduln der Verbundphase definiert. Die Grenzwerte werden dabei in Abhängigkeit des Fertigungsprozesses hergeleitet. Durch die Untersuchung von semi-empirischen Mischungsregeln zur Bestimmung der Ingenieurskonstanten der Verbundphase kann die Verwendung der Mischungsregeln nach *Chamis* [22] empfohlen werden.

In einem zweiten Schritt wird das Ergebnis der transversal-isotropen Verbundphase mit den Lufteinschlüssen durch das Mori-Tanaka Schema homogenisiert. Die Lufteinschlüsse werden dabei als zylinderförmig mit elliptischer Grundfläche vereinfacht. Um unterschiedliche Lufteinschlussgeometrien im Schema zu berücksichtigen, wurde durch die Einführung einer Geometriefunktion eine Abhängigkeit zwischen Aspektverhältnis und Lufteinschlussgehalt hergestellt. Durch die stetige Funktion konnte auf die Einteilung der Lufteinschlüsse in Klassen verzichtet und stattdessen eine

numerische Integration durchgeführt werden. Der abschließende Vergleich der formulierten Grenzen mit Literaturwerten nach *Olivier et al.* [11] liefert eine gute Übereinstimmung zu den Moduln senkrecht und parallel zur Faserrichtung und zeigt außerdem auf, mit welcher Streuweite der Ergebnisse in der Praxis gerechnet werden muss.

## Danksagung

Gefördert von der VolkswagenStiftung. Die vorgestellten Arbeiten wurden von der VolkswagenStiftung im Rahmen des Projektes „Crack arrest with voids in fiber reinforced plastics under fatigue loading“ finanziell gefördert. Ihr gilt unser ausdrücklicher Dank.

## Literatur

- [1] Lenoe, E. Effect of voids on mechanical Properties of graphite fiber composites  
AVCO CORPORATION SYSTEMS DIVISION, 1970
- [2] Hagstrand, P.-O.; Bonjour, F.; Månson, J.-A.E. The influence of void content on the structural flexural performance of unidirectional glass fibre reinforced polypropylene composites  
Composites Part A: Applied Science and Manufacturing 36 (2005) 5, S. 705-714  
DOI: 10.1016/j.compositesa.2004.03.007
- [3] Varna, J.; Joffe, R.; Berglund, L. A.; Lundström, T.S. Effect of voids on failure mechanisms in RTM laminates  
Composites Science and Technology 53 (1995) 2, S. 241-249  
DOI: 10.1016/0266-3538(95)00024-0
- [4] Gürdal, Z.; Tomasino, A. P.; Biggers, S. B. Effects of processing induced defects on laminate response: Interlaminar tensile strength  
SAMPE Journal 27 (1991) 4, S. 39-49
- [5] Mehdikhani, M.; Gorbatikh, L.; Verpoest, I.; Lomov, S. V. Voids in fiber-reinforced polymer composites: A review on their formation, characteristics, and effects on mechanical performance.  
Journal of Composite Materials 14 (2018),  
DOI: 10.1177/0021998318772152
- [6] Mura, T. Micromechanics of Defects in Solids - 2nd Revised Edition  
Dordrecht, Boston, Lancaster: Martinus Nijhoff Publishers, 1987  
DOI: 10.1007/978-94-009-3489-4

- [7] Kushch, V. I.; Sevostianov, I. The "rigorous" Maxwell homogenization scheme in 2D elasticity: Effective stiffness tensor of composite with elliptic inhomogeneities  
Mechanics of Materials 103 (2016), S. 44-54  
DOI: 10.1016/j.mechmat.2016.09.006
- [8] Ju, J. W.; Chen, T. M. Micromechanics and effective moduli of elastic composites containing randomly dispersed ellipsoidal inhomogeneities  
Acta Mechanica 103 (1994) 1-4, S. 103-121  
DOI: 10.1007/BF01180221
- [9] Tucker III., C. L.; Liang, E.: Stiffness predictions for unidirectional short-fiber composites: Review and evaluation  
Composites Science and Technology 59 (1999) 5, S. 655-671  
DOI: 10.1016/S0266-3538(98)00120-1
- [10] Huang, H.; Talreja, R. Effects of void geometry on elastic properties of unidirectional fiber reinforced composites  
Composites Science and Technology 65 (2005) 13, S. 1964-1981  
DOI: 10.1016/j.compscitech.2005.02.019
- [11] Olivier, P.; Cottu, J. P.; Ferret, B. Effects of cure cycle pressure and voids on some mechanical properties of carbon/epoxy laminates  
Composites 26 (1995) 7, S. 509-515  
DOI: 10.1016/0010-4361(95)96808-J
- [12] Bleier, A. Prüfverfahren zur Ermittlung exakter Werkstoffkennwerte einer unidirektionalen Schicht unter besonderer Berücksichtigung physikalischer Nichtlinearitäten  
Technische Universität Darmstadt, Dissertation, 2011
- [13] Tandon, G. P.; Weng, G. J. The effect of aspect ratio of inclusions on the elastic properties of unidirectionally aligned composites  
Polymer Composites 5 (1984) 4, S. 327-333  
DOI: 10.1002/pc.750050413

- [14] Benveniste, Y. A new approach to the application of Mori-Tanaka's theory in composite materials  
Mechanics of Materials 6 (1987) 2, S. 147-157  
DOI: 10.1016/0167-6636(87)90005-6
- [15] Withers, P. J. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion in a transversely isotropic medium, and its relevance to composite materials  
Philosophical Magazine A 59 (1989) 4, S. 759-781  
DOI: 10.1080/01418618908209819
- [16] Chiang, C.-R. On Eshelby's tensor in transversely isotropic materials  
Acta Mechanica 228 (2017) 5, S. 1819-1833  
DOI: 10.1007/s00707-017-1811-x
- [17] Dong, C. Effects of Process-Induced Voids on the Properties of Fibre Reinforced Composites  
Journal of Materials Science & Technology 32 (2016) 7, S. 597-604  
DOI: 10.1016/j.jmst.2016.04.011
- [18] Christensen, R. M. A critical Evaluation for a Class of Micro-Mechanics Models  
Journal of Mechanics and Physics of Solids 38 (1990) 3, S. 379-404  
DOI: 10.1016/0022-5096(90)90005-O
- [19] Schürmann, H. Konstruieren mit Faser-Kunststoff-Verbunden  
Berlin, Heidelberg, Springer Verlag, 2007
- [20] Hashin, Z.; Shtrikman, S. A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials  
Journal of Mechanics and Physics of Solids 11 (1963), S. 127-140  
DOI: 10.1016/0022-5096(63)90060-7
- [21] Hashin, Z. On elastic behaviour of fibre reinforced materials of arbitrary transverse phase geometry  
Journal of Mechanics and Physics of Solids 13 (1965), S. 119-134  
DOI: 10.1016/0022-5096(65)90015-3

- [22] Chamis, C. C. Simplified Composite Micromechanics Simplified Composite Micromechanics Equations for Hygral, Thermal and Mechanical Properties  
NASA Technical Memorandum 83320, Houston, Texas, USA, 1983
- [23] Becker, F.; Hopmann, C. Stiffness Estimates for Composites with Elliptic Cylindrical Voids  
Materials 13 (2020) 6, S. 1354  
DOI: 10.3390/ma13061354
- [24] Brannon, R. M. Rotation, reflection and frame changes - Orthogonal tensors in computational engineering mechanics  
Bristol, UK: IOP Publishing, 2018  
DOI: 10.1088/978-0-7503-1454-1
- [25] Sevostianov, I.; Yilmaz, N.; Kushch, V.; Levin, V. Effective elastic properties of matrix composites with transversely-isotropic phases  
International Journal of Solids and Structures 42 (2005) 2, S. 455-476  
DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2004.06.047
- [26] Dormieux, L.; Kondo D.; Ulm, F. J.: Microporomechanics  
Chichester, England: John Wiley & Sons, Ltd, 2006  
DOI: 10.1002/0470032006
- [27] Lukaszewicz, D.H.-J.A.; Potter, K. D.; Eales, J. A concept for the in situ consolidation of thermoset matrix prepreg during automated lay-up  
Composites Part B: Engineering 45 (2013) 1, S. 538-543  
DOI: 10.1016/j.compositesb.2012.09.008

### Bibliography

DOI 10.3139/O999.02012021  
Zeitschrift Kunststofftechnik / Journal of Plastics  
Technology 17 (2021) 1; page 36–62  
© Carl Hanser Verlag GmbH & Co. KG  
ISSN 1864 – 2217



## ANHANG

Die Einträge des Eshelby Tensors für einen Zylinder mit elliptischer Grundfläche in einer transversal isotropen Matrix sind wie folgt gegeben [23]:

$$S_{1111} = \frac{\rho}{1 + \rho} + \frac{\rho}{(1 + \rho)^2} \cdot \frac{C_{11}^V + C_{12}^V}{2C_{11}^V} \quad (\text{Gl. A.1})$$

$$S_{1122} = \frac{\rho}{1 + \rho} \cdot \frac{C_{12}^V}{C_{11}^V} - \frac{\rho}{(1 + \rho)^2} \cdot \frac{C_{11}^V + C_{12}^V}{2C_{11}^V} \quad (\text{Gl. A.2})$$

$$S_{1133} = \frac{\rho}{1 + \rho} \cdot \frac{C_{13}^V}{C_{11}^V} \quad (\text{Gl. A.3})$$

$$S_{2211} = \frac{1}{1 + \rho} \cdot \frac{C_{12}^V}{C_{11}^V} - \frac{\rho}{(1 + \rho)^2} \cdot \frac{C_{11}^V + C_{12}^V}{2C_{11}^V} \quad (\text{Gl. A.4})$$

$$S_{2222} = \frac{1}{1 + \rho} + \frac{\rho}{(1 + \rho)^2} \cdot \frac{C_{11}^V + C_{12}^V}{2C_{11}^V} \quad (\text{Gl. A.5})$$

$$S_{2233} = \frac{1}{1 + \rho} \cdot \frac{C_{13}^V}{C_{11}^V} \quad (\text{Gl. A.6})$$

$$S_{2323} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \rho} \quad (\text{Gl. A.7})$$

$$S_{3131} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho}{1 + \rho} \quad (\text{Gl. A.8})$$

$$S_{1212} = \frac{1}{2} - \frac{\rho}{(1 + \rho)^2} \cdot \frac{C_{11}^V + C_{12}^V}{2C_{11}^V} \quad (\text{Gl. A.9})$$

Für ein konstantes Aspektverhältnis aller vorhandenen Luft einschlüsse sind die Lösungen für die Ingenieurskonstanten explizit gegeben [23], die mit hochgestelltem „V“ gekennzeichneten Kennwerte entsprechen den Ergebnissen des ersten Homogenisierungsschrittes:

$$E_{11}^* = E_{11}^V \cdot \frac{1 - \varphi^L}{1 + 2\rho \cdot \varphi^L \cdot \left(1 - \frac{E_{33}^V}{E_{11}^V} \cdot \nu_{13}^{V^2}\right)} \quad (\text{Gl. A.10})$$

$$E_{22}^* = E_{11}^V \cdot \frac{1 - \varphi^L}{1 + 2/\rho \cdot \varphi^L \cdot \left(1 - \frac{E_{33}^V}{E_{11}^V} \cdot \nu_{13}^{V^2}\right)} \quad (\text{Gl. A.11})$$

$$E_{33}^* = E_{33}^V \cdot (1 - \varphi^L) \quad (\text{Gl. A.12})$$

$$G_{23}^* = G_{23}^V \cdot \frac{\rho \cdot (1 - \varphi^L)}{\rho + \varphi^L} \quad (\text{Gl. A.13})$$

$$G_{13}^* = G_{23}^V \cdot \frac{1/\rho \cdot (1 - \varphi^L)}{1/\rho + \varphi^L} \quad (\text{Gl. A.14})$$

$$G_{12}^* = G_{12}^V \cdot \frac{(1 + \nu_{12}^V) \cdot \rho \cdot (1 - \varphi^L)}{(1 - \nu_{23}^V \nu_{32}^V) \cdot (1 + \rho)^2 \cdot \varphi^L + (1 + \nu_{12}^V) \cdot \rho \cdot (1 - \varphi^L)} \quad (\text{Gl. A.15})$$

$$\nu_{12}^* = \frac{E_{11}^V \cdot (\nu_{12}^V \cdot (1 - \varphi^L) + \varphi^L) - 2 E_{33}^V \cdot \varphi^L \cdot \nu_{13}^V{}^2}{E_{11}^V \cdot (1 + 2\rho \cdot \nu_{12}^V) - 2 E_{33}^V \cdot \rho \cdot \varphi^L \cdot \nu_{13}^V{}^2} \quad (\text{Gl. A.16})$$

$$\nu_{21}^* = \frac{E_{11}^V \cdot (\nu_{12}^V \cdot (1 - \varphi^L) + \varphi^L) - 2 E_{33}^V \cdot \varphi^L \cdot \nu_{13}^V{}^2}{E_{11}^V \cdot (1 + 2/\rho \cdot \nu_{12}^V) - 2 E_{33}^V / \rho \cdot \varphi^L \cdot \nu_{13}^V{}^2} \quad (\text{Gl. A.17})$$

$$\nu_{31}^* = \nu_{32}^* = \nu_{31}^V \quad (\text{Gl. A.18})$$

$$\nu_{13}^* = \frac{E_{11}^V \cdot \nu_{13}^V}{E_{11}^V \cdot (1 + 2\rho \cdot \nu_{12}^V) - 2 E_{33}^V \cdot \rho \cdot \varphi^L \cdot \nu_{13}^V{}^2} \quad (\text{Gl. A.19})$$

$$\nu_{23}^* = \frac{E_{11}^V \cdot \nu_{13}^V}{E_{11}^V \cdot (1 + 2/\rho \cdot \nu_{12}^V) - 2 E_{33}^V / \rho \cdot \varphi^L \cdot \nu_{13}^V{}^2} \quad (\text{Gl. A.20})$$

**Stichworte:****FVK, Lufteinschlüsse, Steifigkeiten, Homogenisierung****Keywords:****FRP, Air inclusions, stiffness, homogenisation****Autor / author:**

Univ. Prof. Dr.-Ing. Christian Hopmann  
Fabian Becker  
Institut für Kunststoffverarbeitung an der RWTH Aachen  
RWTH Aachen University  
Seffenter Weg 201  
52074 Aachen

E-Mail: [office@ikv.rwth-aachen.de](mailto:office@ikv.rwth-aachen.de)  
Webseite: [www.ikv-aachen.de](http://www.ikv-aachen.de)  
Tel.: +49 (0)241/80-93838  
Fax: +49 (0)241/80- 92262

**Herausgeber / Editors:**Editor-in-Chief

Prof. em. Dr.-Ing. Dr. h.c. Gottfried W. Ehrenstein  
Lehrstuhl für Kunststofftechnik  
Universität Erlangen-Nürnberg  
Am Weichselgarten 9  
91058 Erlangen  
Deutschland  
Tel.: +49 (0)9131/85 - 29703  
Fax: +49 (0)9131/85 - 29709  
E-Mail: [ehrenstein@lkt.uni-erlangen.de](mailto:ehrenstein@lkt.uni-erlangen.de)

Europa / Europe

Prof. Dr.-Ing. Dietmar Drummer, verantwortlich  
Lehrstuhl für Kunststofftechnik  
Universität Erlangen-Nürnberg  
Am Weichselgarten 9  
91058 Erlangen  
Deutschland  
Tel.: +49 (0)9131/85 - 29700  
Fax: +49 (0)9131/85 - 29709  
E-Mail: [drummer@lkt.uni-erlangen.de](mailto:drummer@lkt.uni-erlangen.de)

Amerika / The Americas

Prof. Prof. hon. Dr. Tim A. Osswald, verantwortlich  
Polymer Engineering Center, Director  
University of Wisconsin-Madison  
1513 University Avenue  
Madison, WI 53706  
USA  
Tel.: +1 608/263 9538  
Fax: +1 608/265 2316  
E-Mail: [osswald@enr.wisc.edu](mailto:osswald@enr.wisc.edu)

**Verlag / Publisher:**

Carl-Hanser-Verlag GmbH & Co. KG  
Wolfgang Beisler  
Geschäftsführer  
Kolbergerstraße 22  
D-81679 München  
Tel.: +49 (0)89/99830-0  
Fax: +49 (0)89/98480-9  
E-Mail: [info@hanser.de](mailto:info@hanser.de)

**Redaktion / Editorial Office:**

Dr.-Ing. Eva Bittmann  
Jannik Werner, M.Sc.  
E-Mail: [redaktion@kunststofftech.com](mailto:redaktion@kunststofftech.com)

**Beirat / Advisory Board:**

Experten aus Forschung und Industrie, gelistet unter  
[www.kunststofftech.com](http://www.kunststofftech.com)