

# CAMBIOS DE DENSIDAD DURANTE DEFORMACION DE FALLAS DE GRUESO FINITO: RUPTURA INCIPIENTE

Carlos A.M. Salvadó  
Departamento de Física

## INTRODUCCION

Un considerable esfuerzo se ha puesto en la investigación del proceso de ruptura geofísica espontánea. Los métodos teóricos que han sido usados para comprender este proceso se dividen en dos grupos: fuentes de relajación de volumen, representado por el trabajo de Archambeau y Minster (1978), y fracturas de grueso infinitesimal, en referencias contenidas en Aki y Richards (1980). De las vistas aéreas de la gran falla de San Andrés en el plano de El Carrizo, California, se evidencia que la zona de falla es de grueso finito. Este grueso también es evidente en la unión de las placas tectónicas que forman la falla del Motagua. Por lo tanto, es razonable pensar que la teoría de fracturas encontrará una buena aproximación a la realidad de rupturas geofísicas solamente si se consideran una serie de fracturas paralelas. Por otra parte, la fuente voluminosa definida por Archambeau y Minster (1978), que tiene mucho éxito modelando explosiones nucleares subterráneas en un medio con esfuerzo, de acuerdo con Archambeau (comunicación personal), la zona de falla delgada elipsoidal tiene tantas dificultades matemáticas que no habrá publicaciones en el futuro cercano.

Esta investigación es de fractura incipiente, en la cual se modela la zona que fallará como una falla de grueso finito, que llamaré inclusión delgada. Por inclusión quiero decir que es un material empotrado dentro de otro, con propiedades elásticas diferentes a los del material adentro del cual se encuentra (Figura 1). Por delgada quiero decir que una de las dimensiones de la inclusión es mucho más pequeña que las otras dos.

Con referencia a la Figura 1, las placas tectónicas se desplazan tangencialmente en direcciones opuestas. Por ejemplo, la falla del Motagua (la inclusión) es el escombros de la unión de las grandes placas Norte Americana y del Caribe. La placa Norte Americana se desplaza hacia el Este, mientras que la

placa del Caribe se desplaza hacia el Oeste. Este desplazamiento deforma la inclusión en una manera continua antes de la ruptura. Por lo tanto, antes de la ruptura, el cambio de desplazamiento con respecto a distancia a través de la inclusión es un proceso continuo. Esto quiere decir que las derivadas espaciales del desplazamiento son continuas a través de la inclusión. Esta investigación es del cambio total de desplazamiento a través de la inclusión y, por lo tanto, convertiré las derivadas espaciales del desplazamiento en diferencias finitas para modelar los saltos de desplazamiento de una placa a otra. Es una teoría no lineal en donde la aproximación a cambios finitos corresponde a una de longitud de onda larga. Ya que la deformación de una falla como la del Motagua dura años, la longitud de onda es ultra larga. En lenguaje técnico, Salvadó (1984) ha demostrado que si  $k$  es la frecuencia espacial y  $h$  es el grueso de la inclusión, entonces  $kh \ll 1$ . Como este estudio es de elastoestática, o sea de longitud de onda infinita, la aproximación es muy buena.

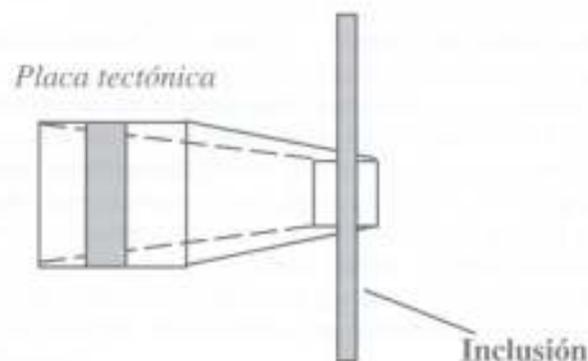


Figura 1. El escombros de la unión de dos grandes placas tectónicas (la falla) es una inclusión delgada que llamaré  $\Sigma$ .

En investigaciones de dispersión de ondas elásticas, métodos de longitud larga han sido usados por Sezawa y Kanai (1940), Kanai (1961), Herrera y Mai (1965), Murty (1975, 1976), Chatterjee *et al* (1980), Salvadó y Minster (1980), Schoenberg (1980) y Salvadó (1984). En esta investigación hago uso del método de longitudes largas definido en Salvadó (1984). Encontraré que una inclusión delgada sometida a esfuerzos de corte se pone más gruesa, menos densa y, por lo tanto, la fricción que provee a las placas adyacentes se debilita y precipita deslizamiento de las

superficies. Provee también un modelo de dilatación en que micro fracturas contenidas en la inclusión tenderían a abrirse, debilitando más la zona de fractura incipiente. Esta investigación predice también que, además del desplazamiento con polaridad paralela a la falla que se emitirá durante el proceso de ruptura, fenómeno que predice la teoría lineal, esta teoría no lineal predice que deberá de haber una componente pequeña con polaridad perpendicular a la falla.

## DECLARACION DEL PROBLEMA Y SOLUCION

Considero una zona de falla geofísica como una inclusión delgada de grueso  $h(\vec{r})$ , donde  $\vec{r}$  es el vector de posición. Los parámetros elásticos de la zona de falla son dados por  $C'_{ij}(r, t)$  donde  $t$  es tiempo. La inclusión está bajo esfuerzos de desplazamientos finitos, así que si  $\vec{u}(\vec{r}, t)$  es el vector de desplazamiento, el componente  $(i, j)$  del tensor no lineal de esfuerzo adentro de la inclusión en un sistema Euleriano está dado por

$$\sigma'_{ij}(\vec{r}, t) = C'_{ijkl}(\vec{r}, t) \left[ u'_{k,l}(\vec{r}, t) - \frac{u'_{a,ab}(\vec{r}, t) u'_{a,ab}(\vec{r}, t)}{2} \right] \quad (1)$$

donde he asumido la notación de suma de Einstein:

$$a, b, = \sum_i a_i b_i.$$

$u'_{k,l}(\vec{r}, t)$  es la derivada espacial de la componente  $k$  de  $\vec{u}(\vec{r}, t)$  con respecto a la coordenada  $l$ .

Con referencia a la figura 2, el vector unitario perpendicular a la inclusión, inclusión que llamaré de aquí en adelante  $\Sigma'$ , está dado por

$$\hat{n}' = \sin \delta \sin \phi \hat{e}_x - \sin \delta \cos \phi \hat{e}_y + \cos \delta \hat{e}_z = -\hat{n} \quad (2)$$

donde  $0 \leq \delta \leq \frac{\pi}{2}$  y mide el ángulo que  $\Sigma'$  hace con el plano  $xy$ ;

$0 \leq \phi \leq 2\pi$  es el ángulo que  $\Sigma'$  hace con el eje  $x$ .

En lo que sigue, aproximaré las derivadas espaciales del desplazamiento como el cambio total de desplazamiento a través de

$\Sigma'$ . La derivada perpendicular a  $\Sigma'$  de las componentes  $u'_i(\bar{r}, t)$  está dada por

$$\hat{n}' \cdot \nabla u'_i(\bar{r}, t) = n'_j u'_{i,j}(\bar{r}, t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{u'_i(\bar{r} + \epsilon \hat{n}', t) - u'_i(\bar{r}, t)}{\epsilon} \right].$$

Definiendo la notación de salto a través de  $\Sigma'$  como

$$[w'_i(\bar{r}, t)] \equiv u'_i(\bar{r} + h\hat{n}', t) - u'_i(\bar{r}, t),$$

puedo aproximar la gradiente de  $u'_i(\bar{r}, t)$  como

$$\nabla u'_i(\bar{r}, t) \approx \frac{[w'_i(\bar{r}, t)]}{h(\bar{r})} \hat{n}'$$

donde la derivada parcial sería

$$u'_{i,j}(\bar{r}, t) \equiv \frac{[w'_i(\bar{r}, t)]}{h(\bar{r})} n'_j. \quad (3)$$

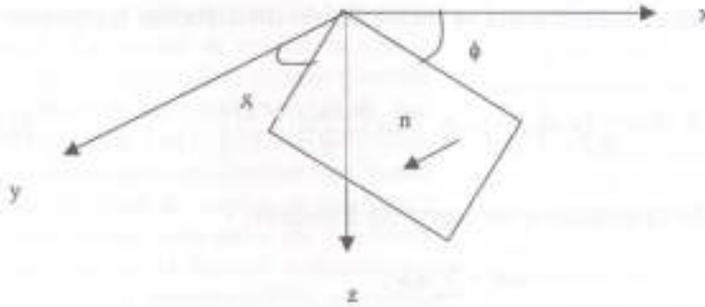


Figura 2. La definición del vector unitario  $\hat{n}$  perpendicular a la inclusión delgada. Es el vector  $(0,0,-1)^T$  rotado un ángulo  $0 \leq \delta \leq \pi/2$  con respecto al plano  $xy$ , seguido por una rotación  $0 \leq \phi \leq 2\pi$  con respecto al eje  $x$ .

Salvadó (1984) ha demostrado que, con la derivada para el desplazamiento definida por la ecuación (3), la teoría es de longitud larga tal que  $kh \ll 1$ . Como esta es una teoría de desplazamiento estático, o sea de desplazamiento de longitud ultra largo, la aproximación deberá ser muy buena.

El uso de la aproximación de la ecuación (3) en la ecuación (1) da

$$\sigma'_i(\bar{r}, t) \equiv C'_{ij} \left\{ \frac{2n'_j [w'_i(\bar{r}, t)] h(\bar{r}) - n'_i n'_j [w'_i(\bar{r}, t)]^2}{2h^2(\bar{r})} \right\}. \quad (4)$$

De aquí en adelante escribiré las aproximaciones con el signo de igualdad. Calculando tracciones con la ecuación (4), tengo

$$t'_i(\bar{r}, t) = \sigma'_i(\bar{r}, t) n'_i = a'_s \left\{ \frac{2[w'_i(\bar{r}, t)] h(\bar{r}) - n'_i [w'_i(\bar{r}, t)]^2}{2h^2(\bar{r})} \right\} \quad (5)$$

donde

$$\alpha'_{ik}(\bar{r}, t) = C'_{\text{opt}}(\bar{r}, t) n'_i n'_k = C'_{\text{opt}}(\bar{r}, t) n_i n_k \quad (6)$$

es el tensor de parámetros elásticos para desplazamientos de longitud larga. También asumiré que el grueso de  $\Sigma'$  es tal, que lo puedo considerar soldado al material adyacente. Con esto quiero decir que aunque ocurran micro fracturas en  $\Sigma'$  durante su deformación, el grueso es tal, que tiene en sus orillas material que esta soldado al material vecino. Por lo tanto puedo asumir también que el desplazamiento y la tracción son funciones continuas en la discontinuidad entre el interior de  $\Sigma'$  y su exterior:

$$u'_i(\bar{r}, t) = u_i(\bar{r}, t) \quad (7)$$

$$t'_i(\bar{r}, t) = -t_i(\bar{r}, t) = -\sigma_{ij}(\bar{r}, t) n_j .$$

Las condiciones de continuidad de las ecuaciones (7), cuando son aplicadas a la tracción interior de  $\Sigma'$  dada en la ecuación (5), da como resultado la tracción exterior a  $\Sigma'$

$$t_i(\bar{r}, t) = -\frac{\alpha'_{ik}(\bar{r}, t) [u_k(\bar{r}, t)]}{h(\bar{r})} - \frac{\alpha'_{ik}(\bar{r}, t) n_k [u_k(\bar{r}, t)]^2}{2h^2(\bar{r})} . \quad (8)$$

El tensor  $\alpha'_{ik}(\bar{r}, t)$  de las ecuaciones (5), (6) y (8) tiene las siguientes propiedades:

1. La existencia de una densidad de energía de tensión implica que

$$C'_{\text{opt}}(\bar{r}, t) = C'_{\text{opt}}(\bar{r}, t) .$$

Por lo tanto  $\bar{\alpha}'(\bar{r}, t)$  es simétrico:

$$\alpha'_{ik}(\bar{r}, t) = \alpha'_{ki}(\bar{r}, t) .$$

2. Con el propósito de discutir las propiedades cristalográficas de  $\Sigma'$ , asumiré que está orientada en el plano  $xy$  (i.e.,  $\delta = 0$  en la ecuación (2)). Un desplazamiento de longitud larga no detecta la anisotropía de  $\Sigma'$  tan finamente como un desplazamiento de longitud corta. La tabla 1 tiene una comparación del número de parámetros independientes que están presentes en los tensores  $\bar{C}'(\bar{r}, t)$  y  $\bar{\alpha}'(\bar{r}, t)$ . Como puede ser apreciado,  $\Sigma'$  muestreado con

desplazamientos de longitud larga, es isotrópico para simetrías cristalográficas menos ordenadas que ortorrómbicas. Porque la simetría cristalográfica de  $\Sigma'$  es hexagonal por las micro fracturas que se forman paralelas a la frontera antes de fallar catastróficamente, necesito solamente considerar el caso isotrópico:

$$C'_{ijkl}(\bar{r}, t) = \lambda'(\bar{r}, t)\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu'(\bar{r}, t)(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) .$$

Por lo tanto, para  $\Sigma'$  orientada en el plano  $xy$ , los componentes del tensor  $\bar{a}'(\bar{r}, t)$  son

$$\bar{a}'(\bar{r}, t) = \begin{pmatrix} \mu'(\bar{r}, t) & 0 & 0 \\ 0 & \mu'(\bar{r}, t) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda'(\bar{r}, t) + 2\mu'(\bar{r}, t) \end{pmatrix} .$$

Que  $\bar{b}'(\bar{r}, t)$  sea un tensor que satisfice

$$a'_{ij}(\bar{r}, t)b'_{jk}(\bar{r}, t) = b'_{ij}(\bar{r}, t)a'_{jk}(\bar{r}, t) = \delta_{ik} .$$

Operando con  $b'_{ik}(\bar{r}, t)$  la ecuación (8), el salto de desplazamiento a través de  $\Sigma'$  está dado por

$$[u_x(\bar{r}, t)]^* = -h(\bar{r})b'_{xy}(\bar{r}, t)k_x(\bar{r}, t) - \frac{n_x [u_x(\bar{r}, t)]^{*2}}{2h(\bar{r})} . \tag{9}$$

Por causa de que los valores característicos de  $\bar{a}'(\bar{r}, t)$  no son cero, se tiene un inverso.

	$\bar{C}'$	$\bar{a}'$
Triclínico	21	6
Monoclínico	13	4
Ortorrómbico	9	3
Tetragonal	6	2
Romboedra	6	2
Hexagonal	5	2
Cúbico	3	2

Tabla 1. Número de parámetros elásticos independientes para todas las simetrías cristalinas para el caso exacto ( $C'_{ijkl}$ ) y el de longitudes de onda larga ( $a'_{ij} = C'_{ijkl}$ ) cuando  $\Sigma'$  está orientado en el plano

$xy$  y es el plano de simetría. Para simetrías cristalinas menos ordenadas que ortorrómbicas,  $\Sigma'$  es aproximadamente isotrópico cuando muestreada con ondas de longitud larga.

En el límite lineal, la ecuación (9) es idéntica a la expresión para el salto de desplazamiento a través de  $\Sigma'$  dado por Salvadó (1984). Cuando las no linealidades no son descartadas, la ecuación (9) es un sistema no lineal de ecuaciones algebraicas acopladas para los componentes del salto de desplazamiento a través de  $\Sigma'$ . En general no tiene una solución exacta en forma cerrada para una orientación arbitraria de  $\Sigma'$ . Sin embargo, la raíz correcta de la solución (*i.e.*,  $[u(\bar{r}, t)]^* = 0$  para  $\bar{r}(\bar{r}, t) = 0$ ) se obtiene con una expansión por serie de Neumann (*i.e.*, aproximaciones sucesivas) de la ecuación, donde el término de orden cero es la solución del problema lineal:

$$[u_s(\bar{r}, t)]^* = \sum_{n=0}^{\infty} [u_s(\bar{r}, t)]_{-(n)}^* ,$$

$$[u_s(\bar{r}, t)]_{-(0)}^* = -h(\bar{r})b'_s(\bar{r}, t)y_s(\bar{r}, t)$$

y

$$[u_s(\bar{r}, t)]_{-(i)}^* = n_s \frac{[u_s(\bar{r}, t)]_{-(i-1)}^{*2}}{2h(\bar{r})} \quad i = 1, 2, \dots .$$

El sistema de ecuaciones dado en la ecuación (9) tiene soluciones exactas en forma cerrada para orientaciones particulares de  $\Sigma'$ . Consideraré el caso donde  $\Sigma'$  está orientada en el plano  $xy$  (*i.e.*,  $\delta = 0$ ). Este límite da las ecuaciones

$$[u_\beta(\bar{r}, t)]^* = -h(\bar{r})b'_\beta(\bar{r}, t)y_\beta(\bar{r}, t) \quad \beta = x, y$$

$$[u_z(\bar{r}, t)]^* = -h(\bar{r})b'_z(\bar{r}, t)y_z + \frac{[u_x(\bar{r}, t)]^{*2}}{2h(\bar{r})} .$$
(10)

Evidentemente, para la aproximación de esta investigación dada en la ecuación (3), los saltos de desplazamiento tangenciales a  $\Sigma'$  permanecen lineales, mientras que el salto de desplazamiento perpendicular a  $\Sigma'$  exhibe la no linealidad de la relación constitutiva dada en la ecuación (1). La solución para  $[u_z(\bar{r}, t)]^*$  está dada por

$$[u_x(\bar{r}, t)]^* = h(\bar{r}) \left[ 1 - \sqrt{1 + 2b'_x(\bar{r}, t) - [b'_x(\bar{r}, t), (\bar{r}, t)]^2 - [b'_x(\bar{r}, t), (\bar{r}, t)]^2} \right] \quad (11)$$

en donde escogí la raíz consistente con el caso lineal:  $[u_x(\bar{r}, t)]^* = 0$  para  $\bar{r}(\bar{r}, t) = 0$ . Para el caso isotrópico, he enseñado que  $\bar{\alpha}(\bar{r}, t)$  es diagonal para el caso en el cual  $\Sigma'$  está orientada en el plano  $xy$ . Por lo tanto también es diagonal su inverso  $\bar{\delta}(\bar{r}, t)$ . Para los casos isotrópicos de la tabla 1, la ecuación (11) es

$$[u_x(\bar{r}, t)]^* = h(\bar{r}) \left[ 1 - \sqrt{1 + \frac{2t_x(\bar{r}, t)}{\lambda'(\bar{r}, t) + 2\mu'(\bar{r}, t)} - \frac{t_x^2(\bar{r}, t)}{\mu'^2(\bar{r}, t)}} \right] \quad (12)$$

donde

$$t_x^2(\bar{r}, t) = t_x^2(\bar{r}, t) + t_y^2(\bar{r}, t).$$

La ecuación (12) enseña que las tracciones de corte (o tangenciales a  $\Sigma'$ ) aumentan el grueso de  $\Sigma'$  y, por lo tanto, disminuyen su densidad. Este efecto tiene varias consecuencias para el proceso de fractura:

- 1) La fricción que provee  $\Sigma'$  a las placas adyacentes disminuye, facilitando el desplazamiento lateral de éstas.
- 2) Las micro fracturas presentes en  $\Sigma'$  tenderían a abrirse. Como existen concentraciones de esfuerzo en las puntas de fracturas, éstas tenderían a propagarse y unirse. Si suficiente número de ellas se juntan en un evento, esto constituiría un sismo medible.
- 3) El proceso de ruptura ocurriría como un pulso de fractura que se propaga a lo largo de  $\Sigma'$ . La punta delantera del pulso, en donde se acumula esfuerzo, se abre. A lo largo del pulso, se libera esfuerzo. La punta trasera, en donde se ha liberado suficiente esfuerzo, se cierra.
- 4) La teoría lineal predice que habrá, durante una ruptura, liberación de ondas con polaridad horizontal paralela a la falla. Esta teoría no lineal predice que debe de haber también una componente horizontal pequeña, perpendicular a la falla. Esto ocurre porque, durante el proceso de ruptura, se desvanece el esfuerzo y, por lo tanto,  $\Sigma'$  se adelgaza.

Esta teoría provee las condiciones en la frontera para una teoría dinámica de deslizamiento de placas adyacentes formulada por Salvadó (manuscrito no publicado).

## LITERATURA CITADA

- Aki, K. y Paul G. Richards, 1980. *Quantitative seismology*. W.H.Freeman and Company, San Francisco.
- Archambeau, C.B. y Bernard Minster, 1978. Dynamics in prestressed media with moving phase boundaries: a continuum theory of failure in solids. *J. Geophys. Res.* **52**, 65-96.
- Chatterjee, A.K., A.K. Mal, L. Knopoff y J.A. Hudson, 1980. Attenuation of elastic waves in a cracked, fluid saturated solid. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **88**, no. 3, 547-561.
- Datta, S.K., 1977. Diffraction of plain elastic waves by ellipsoidal inclusions. *J. Acoust. Soc. Am.*, **61**, 1432-1437.
- Herrera, I. and A.K. Mal, 1965. A perturbation method for elastic wave propagation: II. small inhomogeneities. *J. Geophys. Res.* **70**, 871-883.
- Kanai, K., 1961. A new problem concerning surface waves. *Bull. Earthquake Res. Inst. Tokyo*, **39**, 465-482.
- Murty, G.S., 1975. A theoretical model for the attenuation and dispersion of Stoneley waves at the loosely bonded interface of two half spaces. *Phys. Earth. Planet. Int.*, **11**, 65-79.
- Murty, G.S., 1976. Reflection, transmission and attenuation of elastic waves at a loosely bonded interface of two half spaces. *Geophys. Res. Roy. Astr. Soc.*, **44**, 389-404.
- Salvadó, C.A. and J.B. Minster, 1980. Slipping interfaces: a possible source of S radiation from explosive sources. *Bull. Seism. Soc. Am.*, **70**, 659-670.
- Salvadó, C.A., 1984. Long wavelength elastodynamics of thin inclusions: I. formal results. *Wave Propagation in Inhomogeneous Media and Ultrasonic Nondestructive Evaluation*, American Society of Mechanical Engineers, Applied Mechanics Division, **62**, 37-49.
- Schoenberg, M.J., 1980. Elastic wave behaviour across linear slip interfaces. *J. Acoust. Soc. Am.*, **68**, 1516-1521.