

Obtención de ganancias para maniobra de detumbling de CubeSats basado en Regulador Cuadrático Lineal

Obtaining gains for detumbling maneuver for CubeSats based in Linear Quadratic Regulator

Julio Andrés AVILA

Laboratorio Aeroespacial, Departamento de Ingeniería Mecánica, Facultad de Ingeniería, Universidad del Valle de Guatemala, Guatemala

Correspondencia: (avi19285@uvg.edu.gt)

Recibido: 23/V/2024; Aceptado: 27/V/2025

Resumen: La finalidad de esta investigación fue el diseño e implementación de un controlador capaz de estabilizar un CubeSat 3U a pesar de su diferencia de inercias proveniente de su geometría, el cual es un tipo de satélite miniaturizado cuyas dimensiones son aproximadamente 10 x 10 x 30 cm. Se llevaron a cabo simulaciones numéricas que representan el comportamiento del satélite, específicamente la orientación de este y sus velocidades angulares. Para ello, se definió el modelo matemático del satélite en Matlab. La implementación del regulador lineal cuadrático (LQR, por sus siglas en inglés) requiere de un sistema lineal, por lo que se obtuvieron los respectivos jacobianos del modelo y se definió un punto de equilibrio en el espacio de estados para encontrar la matriz de ganancias que lleve al sistema a dicho punto de equilibrio. Las simulaciones demostraron que este método es lo suficientemente eficiente para mantener al satélite en una orientación determinada en tres escenarios distintos. En el primer escenario, el controlador lleva al satélite a la orientación deseada al estar desfasado; en el segundo, se evita que una perturbación externa altere la estabilidad; y el último muestra que al oscilar descontroladamente es posible detenerlo y llevarlo a la orientación deseada (a esta acción se le llama detumbling). El controlador fue más rápido en estabilizar el sistema en el primer escenario (15 s), seguido por el segundo (22 s) y tercero (25 s), mostrando la funcionalidad del controlador LQR en presencia de variaciones asimétricas en la geometría del CubeSat en los escenarios simulados.

Palabras clave: Control, espacio de estados, orientación, parámetros modificados de Rodrigues, Sistemas dinámicos.

Abstract: The purpose of this study was the design and implementation of a control system capable of stabilizing a 3U CubeSat - a miniaturized satellite measuring approximately 10 x 10 x 30 cm - despite its difference in its inertias due to its geometry. Numerical simulations were performed to model the satellite's behavior, specifically its orientation and angular velocities. To achieve this, the satellite was mathematically modeled in Matlab. The implementation of the Linear Quadratic Regulator (LQR) requires a linear system; therefore, the corresponding Jacobians were obtained, and an equilibrium point in the state space was defined to find the gain matrix that drives the system to that equilibrium point. The simulations demonstrated that this method is sufficiently effective to maintain the satellite in a specific orientation under three different scenarios. In the first scenario, the controller aligns the satellite to the desired orientation when it is misaligned. In the second, it prevents an external disturbance from affecting stability. Finally, the third scenario shows when the satellite is oscillating uncontrollably, it is possible to stop it and bring it to the desired orientation (this action is called detumbling). The controller was fastest at stabilizing the system in the first scenario (15 s), followed by the second (22 s) and the third (25 s), demonstrating the functionality of the LQR controller in the presence of asymmetric variations in the CubeSat's geometry in the simulated scenarios.

Keywords: Control, dynamic systems, Modified Rodrigues Parameters, orientation, state space.

INTRODUCCIÓN

El sistema de determinación y control de orientación (ADCS) de un dispositivo o vehículo espacial es el módulo encargado de proporcionar una estimación de su orientación basado en distintas mediciones, y corregir dicha orientación en tiempo real. Dichas mediciones pueden realizarse mediante sensores como magnetómetros, sensores solares o giroscopios, para posteriormente realizar una estimación sobre la orientación en tiempo real. Existen diversas formas de modelar matemáticamente la orientación de un cuerpo rígido, como los ángulos de Euler (Stevens *et al.* 2016), los cuaterniones y los parámetros modificados de Rodrigues (MRP) (Özgür Doruk 2009), cada una con ventajas y limitaciones (ver Schaub & Junkins 2002). Por ejemplo, los cuaterniones requieren normalización constante para mantener su validez, mientras que los MRP evitan singularidades y son más fáciles de implementar computacionalmente (Pesce *et al.* 2022). La representación de la orientación debe ser manipulable computacionalmente, libre de singularidades, y permitir controlabilidad completa una vez que el sistema es linealizado.

Diversos estudios han propuesto múltiples estrategias de control para CubeSats, incluyendo controladores PID (Proporcional, Integral, Derivativo) y métodos basados en LQR. El controlador PID ha sido ampliamente utilizado en otros estudios (Madhana *et al.* 2023), donde se ha alcanzado la estabilidad para CubeSats 1U. Este controlador se basa en la retroalimentación individual de cada eje, lo que limita su eficiencia en sistemas acoplados como un CubeSat. En cambio, el controlador LQR considera todas las variables de estado simultáneamente, lo que permite un control centralizado y más eficiente para sistemas no lineales. La presente investigación se centra en comparar la efectividad del LQR en distintos escenarios de estabilización para evaluar su desempeño frente a perturbaciones y condiciones iniciales desfavorables.

MATERIALES Y MÉTODOS

La herramienta principal de simulación utilizada fue Matlab, específicamente el toolbox de Control Systems, para diseñar y probar el controlador LQR. Este toolbox cuenta con herramientas que facilitan el desarrollo matemático en el diseño de controladores. El CubeSat considerado fue de 3U con las dimensiones mostradas en Cuadro 1, basadas en estándares americanos (NASA n.d.). Se modeló su dinámica considerando sus seis grados de libertad: tres de traslación y tres de rotación.

Cuadro 1. Características utilizadas para simular un CubeSat 3U.
Table 1. Characteristics utilized to simulate a CubeSat 3U.

Masa	4.0 kg
Inercia en x	0.030 kg · m ²
Inercia en y	0.030 kg · m ²
Inercia en z	0.007 kg · m ²
Longitud en x	10.0 cm
Longitud en y	10.0 cm
Longitud en z	30.0 cm

Para representar su orientación y evitar singularidades, se utilizaron los Parámetros Modificados de Rodrigues (MRP), los cuales permiten una manipulación computacional sencilla. Estos se obtienen a partir de la matriz de rotación (Ecuación 1), la cual es una representación en forma de matriz cuadrada de la orientación del sistema. A diferencia de los cuaterniones, que requieren normalización constante, los MRP son más robustos para simulaciones numéricas y presentan una mayor facilidad para diseñar e implementar el controlador, esto derivado de que los MRP son de tres dimensiones y los cuaterniones de cuatro.

$$\sigma = \frac{1}{\zeta(\zeta + 2)} \begin{pmatrix} C_{23} - C_{32} \\ C_{31} - C_{13} \\ C_{12} - C_{21} \end{pmatrix}$$

$$\zeta = \sqrt{\text{trace}(C) + 1}$$

Ecuación 1. Cálculo de los MRP en función de la matriz de rotación.
Equation 1. Calculation of the MRPs based on the rotation matrix..

donde σ = Vector de orientación en forma de MRP; C = Matriz de rotación.

Para ciertos valores críticos de los MRP, se implementó una transformación al conjunto sombra, el cual es un vector que representa la misma orientación pero manteniéndose acotado (ver Schaub & Junkins 2002), con el fin de evitar divergencias numéricas (Ecuación 2). Esta transformación ocurre cuando la magnitud del vector de orientación alcanza valores cercanos a la unidad, momento en el cual se reemplaza por una representación equivalente que evita la singularidad.

$$\sigma_i^s = \frac{-\sigma_i}{\sigma^2}$$

Ecuación 2. Cálculo del conjunto sombra en función de los MRP.
Equation 2. Calculation of the MRPs based on the rotation matrix.

donde σ_i^s representa a cada término del vector del conjunto sombra individualmente.

La dinámica del satélite se describe mediante una ecuación diferencial no lineal (Ecuación 3), la cual fue linealizada alrededor de un punto de equilibrio definido por el usuario. Este análisis incluyó la obtención de los jacobianos del sistema y la evaluación del acoplamiento entre los ejes de rotación. El sistema linealizado se expresa como $\dot{x} = Ax + Bu$, donde x incluye las variables de estado y u representa las entradas de control y tanto A como B son las matrices resultantes de aplicar los respectivos jacobianos en la linealización. La dinámica no lineal se define como:

$$\dot{x} = f(x, u) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}[(1 - \sigma^2)I_{3 \times 3} + 2\tilde{\sigma} + 2\sigma\sigma^T]^B \omega \\ -\frac{(I_y - I_z)\omega_y\omega_z + \tau_x}{I_x} \\ -\frac{(I_z - I_x)\omega_z\omega_x + \tau_y}{I_y} \\ -\frac{(I_x - I_y)\omega_x\omega_y + \tau_z}{I_z} \end{pmatrix}$$

Ecuación 3. Dinámica del CubeSat medida con MRP.
Equation 3. CubeSat dynamics measured using MRPs.

donde x corresponde al vector de variables de estado del sistema; u corresponde a las entradas de control (actuadores) del sistema; $I_{3 \times 3}$ es la matriz identidad de 3×3 ; I_x corresponde a la inercia alrededor del eje x , respectivamente con los otros ejes; ω_x corresponde a la velocidad angular alrededor del eje x , respectivamente con los otros ejes; τ_x corresponde al torque aplicado alrededor del eje x , respectivamente con los otros ejes.

El controlador LQR se diseñó para minimizar una función de costo cuadrática, donde Q y R son matrices de penalización. En la presente investigación se utilizaron matrices identidad como punto de partida, ajustadas posteriormente para evaluar la sensibilidad del sistema. La matriz de ganancias K se obtuvo utilizando la función lqr de Matlab.

Los actuadores se modelaron como generadores de torque ideales con límites máximos basados en especificaciones de CubeSats comerciales, los cuales pueden ser magne-torques o ruedas inerciales. Se introdujeron perturbaciones manuales en el modelo para evaluar la robustez del sistema ante condiciones adversas. Se utilizaron integradores numéricos de cuarto orden (Runge-Kutta) para la simulación del sistema completo. Para verificar el control sobre el sistema, se implementaron gráficas del error de orientación y el uso de actuadores, además de una visualización gráfica mediante una animación del comportamiento dinámico del CubeSat (Fig. 1).

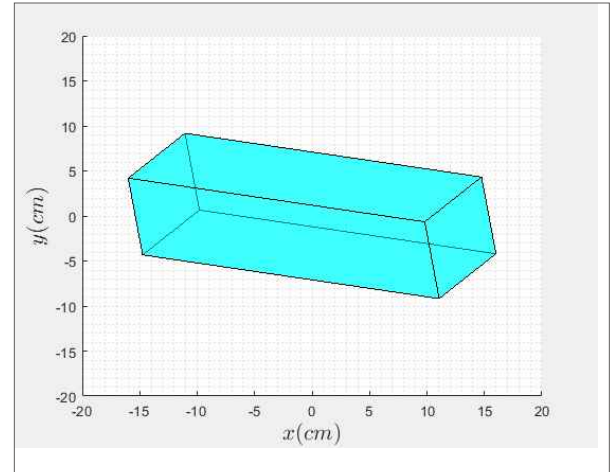


Figura 1. Animación de la orientación del CubeSat en el espacio durante las simulaciones.

Figure 1. Animation of CubeSat's orientation in space during the simulations.

RESULTADOS

Se realizaron tres simulaciones distintas que representan escenarios realistas, donde cada gráfica muestra la evolución en el tiempo de cada uno de los parámetros de Rodrigues (representados como σ) y de las velocidades angulares.

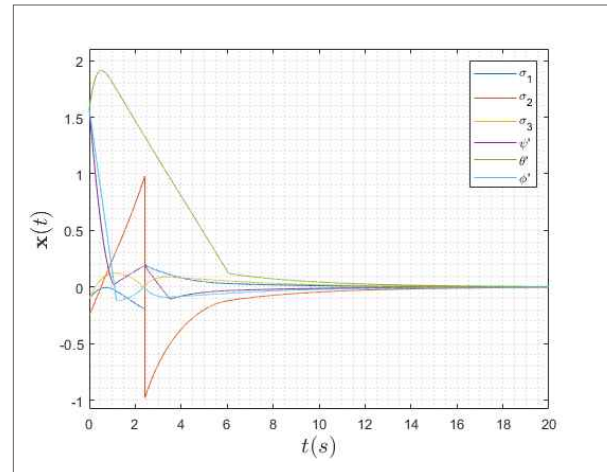


Figura 2. Evolución de las variables de estado sin perturbaciones.

Figure 2. Evolution of state variables without disturbances.

En el primer escenario, el satélite inicia con una orientación desviada y velocidad angular de $\pi/2$ rad/s. El sistema logra estabilizarse en 15 s. Figura 2 muestra la evolución de los MRP con una discontinuidad a los 2.5 s, resultado de la aplicación de la transformación al conjunto sombra. Figura 3 demuestra la reducción progresiva del uso de los actuadores.

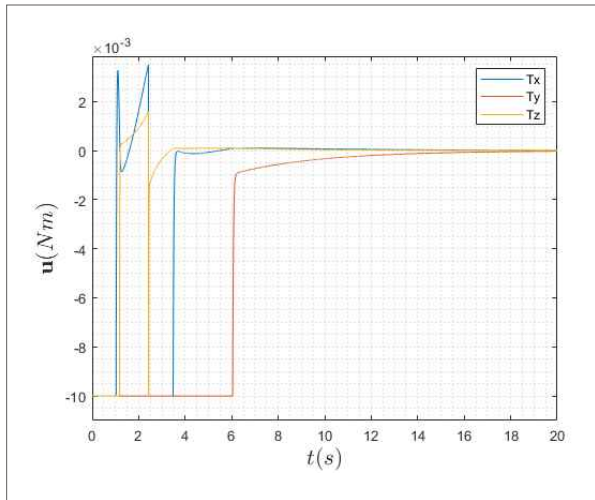


Figura 3. Uso de actuadores sin perturbaciones.
Figure 3. Use of actuators without disturbances.

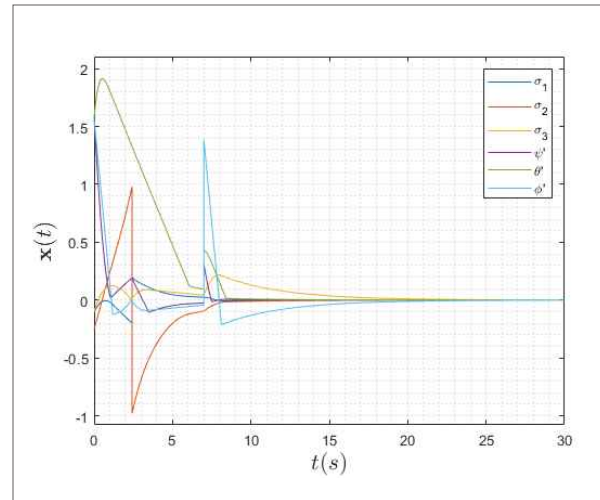


Figura 4. Evolución de las variables de estado en presencia de una perturbación.
Figure 4. Evolution of state variables in the presence of a disturbance.

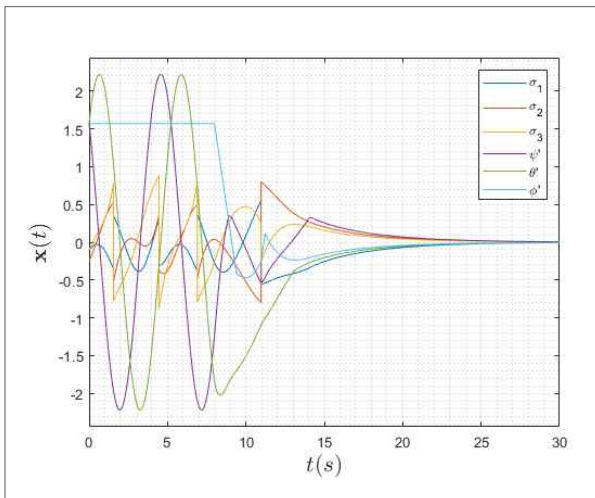


Figura 5. Evolución de las variables de estado en un caso de detumbling.
Figure 5. Evolution of state variables in a detumbling case.

En el segundo escenario, se introduce una perturbación de magnitud 1000 veces mayor al torque máximo permitido por los actuadores (en el orden de microNewton-metro, según Markley & Crassidis 2016). El sistema alcanza el equilibrio en 22 s. Figura 4 ilustra cómo el sistema rechaza efectivamente la perturbación manteniendo la orientación estable.

El último escenario representa el momento posterior al despliegue del satélite, con velocidades angulares en todos los ejes y sin activación de actuadores durante los primeros ocho segundos. Una vez activados, el sistema alcanza la estabilidad en 25 s. Este escenario demuestra la robustez del controlador en condiciones de máxima incertidumbre (Fig. 5).

DISCUSIÓN

En todos los casos analizados en el presente estudio, las variables de estado permanecieron acotadas, y el uso de los actuadores fue eficiente. El sistema mostró capacidad de recuperación incluso en presencia de discontinuidades en los parámetros de orientación. Se sugiere en trabajos futuros comparar directamente los resultados con el uso de cuaterniones y controladores alternativos como PID y MPC (Control de Modelo Predictivo).

Los resultados de esta investigación permiten concluir que los Parámetros Modificados de Rodrigues (MRP) ofrecen una forma eficiente de representar la orientación de un satélite sin necesidad de recurrir a normalizaciones constantes, como ocurre con otras representaciones como los cuaterniones. Esta característica, combinada con la robustez computacional de los MRP, contribuye significativamente a la estabilidad y precisión del modelo utilizado. Además, el análisis del sistema reveló que existe un acoplamiento importante entre las variables de estado, incluso después de la linealización del sistema. Este comportamiento valida la elección de un controlador centralizado como el LQR, que considera el estado global del sistema, por encima de métodos tradicionales como el controlador PID, el cual actúa de manera independiente sobre cada eje. En estudios previos como el de Madhana Mohan *et al.* (2023), se ha demostrado la viabilidad de implementar un controlador PID para estabilizar la actitud de un CubeSat mediante simulaciones en Python. Su enfoque, basado en la regulación de cada eje de forma independiente, permitió lograr estabilización en condiciones nominales y frente a perturbaciones estáticas, con resultados satisfactorios en términos de sobreimpulso y tiempo de asentamiento.

En contraste, en la presente investigación se optó por un enfoque centralizado utilizando un controlador LQR, el cual considera todas las variables de estado de manera simultánea. Esta característica lo hace más adecuado para sistemas dinámicamente acoplados como los CubeSats 3U, donde las perturbaciones pueden afectar múltiples ejes simultáneamente. Además, a diferencia del estudio de Madhana Mohan *et al.* (2023); en este trabajo se incluyeron escenarios más exigentes, como el detumbling con activación tardía de actuadores y perturbaciones 1000 veces superiores al torque máximo, en los cuales el controlador LQR demostró robustez y eficiencia, alcanzando la estabilización completa en menos de 25 segundos.

Por tanto, si bien el enfoque PID puede ser útil para condiciones simplificadas o iniciales, los resultados aquí presentados sugieren que el uso de LQR mejora significativamente la respuesta del sistema en escenarios no ideales, lo cual es especialmente relevante para aplicaciones reales en misiones de bajo costo y alta incertidumbre.

El desempeño del controlador LQR fue consistente a través de los tres escenarios simulados: desde una condición inicial de desfase, pasando por perturbaciones externas significativas, hasta condiciones extremas de *detumbling*. En todos los casos, el controlador demostró una capacidad de respuesta rápida y eficiente, recuperando la orientación deseada con un uso optimizado de los actuadores.

Finalmente, se concluye que la estrategia de control basada en LQR no solo es eficaz y robusta para estabilizar CubeSats bajo diferentes condiciones, sino que también es adaptable a escenarios realistas en misiones espaciales de bajo costo. Esto la convierte en una alternativa viable para futuras aplicaciones en sistemas satelitales de pequeña escala.

AGRADECIMIENTOS

Esta investigación fue posible gracias al seguimiento y recomendaciones del MSc. José Bagur, Laboratorio Aeroespacial. También se agradece al MSc. Miguel Zea, Laboratorio de Robótica, y al Dr. Luis Rivera, Departamento de Electrónica, por su asesoramiento en los temas de control y el desarrollo matemático. Se extiende un agradecimiento especial a la Ing. Ashley Morales y al Ing. Pablo Moreno, quienes apoyaron en el proceso de investigación y gestión de este proyecto. Se extiende también un agradecimiento a los revisores de la Revista UVG por su asesoramiento para la realización de este artículo.

REFERENCIAS

- Markley, F. L. & Crassidis, J. L. (2014). *Fundamentals of spacecraft attitude determination and control*. Space Technology Library, Vol. 33. Springer, New York, NY, U.S.A.
- NASA (n.d.). *Guidance, navigation, and control (GNC)*. NASA Small Spacecraft Systems Virtual Institute. [<https://www.nasa.gov/smallsat-institute/sst-soa/guidance-navigation-and-control/>]. Accesado: 23 de septiembre 2024.
- Pesce, V., Colagrossi, A. & Silvestrini, S. (2022). *Modern spacecraft guidance, navigation, and control*. Elsevier, Amsterdam, The Netherlands.
- Madhana Mohan, K., Anitha, U. & Anbumani, K. (2023). CubeSat attitude control by implementation of PID controller using python. *2023 12th International Conference on Advanced Computing (ICoAC)*, 1-5. [<https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/10249887>]. Accesado: 25 de mayo 2025.
- Özgür Doruk, R. (2009). Linearization in satellite attitude control with modified Rodriguez parameters. *Aircraft Engineering and Aerospace Technology* 81(3): 199-203. [<https://doi.org/10.1108/00022660910954691>]. Accesado: 26 de mayo 2025.
- Schaub, H. & Junkins, J. L. (2002). *Analytical mechanics of space systems*. AIAA, Educational Series, Reston, VI, U.S.A.
- Stevens, B. L., Lewis, F. L. & Johnson, E. N. (2016). *Aircraft control and simulation: Dynamics, controls design, and autonomous systems* (3rd ed.). John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey, U.S.A.